Revista de Educação Matemática
ISSN: 2526-9062
ISSN: 1676-8868
sbem.sp.revista@gmail.com
Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Brasil

Alves Silveira, Adriano; Andrade, Silvanio

Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio

Revista de Educação Matemática, vol. 17, núm. 1, 2020, Janeiro-, pp. 1-21
Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Brasil

DOI: https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id259

Número completo
Mais informações do artigo
Site da revista em redalyc.org

CC BY NC

REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

doi.org/10.37001/remat25269062v17id259 eISSN: 2526-9062

Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio

Adriano Alves Silveira [1]
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Alagoinha, PB, Brasil

Silvanio de Andrade [2]
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Campina Grande, Brasil

Resumo
A presente pesquisa analisa como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. A pesquisa foi empreendida segundo uma abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas; na modalidade de pesquisa caracterizada como pedagógica, segundo a qual o professor é o pesquisador de sua própria sala de aula (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008). A Metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em sala de aula foi a de Exploração, Resolução e Proposição de problemas (ANDRADE, 1998; 2017), desenvolvida em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, por meio de um conjunto de situações-problema referentes ao conteúdo de Análise Combinatória. Os dados foram levantados por meio de aulas ministradas na turma, observações e registros dos materiais utilizados pelos alunos, bem como de gravação sonora. Neste artigo, destaca-se 7 encontros, totalizando 7 aulas, cada uma com duração de, no máximo, 45 minutos. Durante a intervenção, o pesquisador agiu como professor-pesquisador, trabalhando em sala de aula tanto como pesquisador e como professor regente, mediador e incentivador do processo ensino-aprendizagem dos alunos, dando-lhes autonomia na construção das ideias essenciais de Análise Combinatória e desenvolvendo assim reflexões sobre a experiência realizada. Os resultados da pesquisa evidenciaram que através da abordagem via Exploração, Resolução e Proposição de problemas foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, que lançaram suas próprias ideias para explorar e resolver os problemas propostos tanto pelo professor-pesquisador como por eles mesmos, encontraram múltiplas estratégias e processos de exploração e resolução desenvolvidas por eles mesmos no diálogo aluno(s)-aluno(s) e professor-aluno(s), justificaram suas explorações, resoluções, soluções, insights e processos, propuseram novas explorações e novos problemas, indo além do processo de resolução, participando assim efetivamente da construção do seu conhecimento em Análise

Submetido em: 27/06/2019 **Aceito em:** 30/11/2020 **Publicado em:** 01/05/2020

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba. Endereço para correspondência: Sítio Mumbuca, Alagoinha – Paraíba. E-mail: adriano.exatas@hotmail.com.

[2] Doutor em Educação (Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo, com Doutorado Sanduíche na University of Georgia, EUA. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Endereço para correspondência: Rua Desembargador Trindade, 332, apto. 603, Centro, Campina Grande - Paraíba. E-mail: silvanio@alumni.usp.br.

Combinatória. De onde se conclui que tal metodologia permitiu ao aluno um aprendizado com mais compreensão e profundidade, potencializando-o para resolver problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca da resolução e solução do problema, podendo ir muito além, como a realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas em perspectivas múltiplas.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Sala de aula; Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Combinatorial Analysis Teaching and Learning via problem Exploration, Solving and Posing in High School

Abstract

This research analyses how a classroom approach via Problem Exploration, Solving and Posing can potentialize the teaching and learning of Combinatorial Analysis. The research was conducted according to a qualitative approach, aiming to search meanings, interpreting and comprehend the information obtained, in a modality that can be characterized as teacher research, according to which the professor is the researcher of his or her own classroom (LANKSHEAR AND KNOBEL, 2008). The teaching and learning Methodology chosen to work in the classroom was of the Problem Exploration, Solving and Posing (ANDRADE, 1998; 2017), developed in a group of the 2nd year of Secondary School of a public school, Brazil, through a set of problem situations regarding the content of Combinatorial Analysis. Data were collected through classroom observations and records of the materials used by the students, as well as sound recording. This article, it will highlight 7 meetings, totaling 7 classes, each one lasting no more than 45 minutes. During the intervention, the researcher acted as a teacher-researcher, working in the classroom both as researcher and as a regent teacher. He was a mediator and instigator of the students' teaching-learning process, giving them autonomy in the construction of the essential ideas of Combinatorial Analysis and developing thus reflections on the experience carried out. The results of the research showed that through the approach by Problem Exploration, Solving and Posing it was possible to monitor students' growth, who launched their own ideas to explore and solve the problems proposed both by the teacher-researcher and by themselves. They used exploration and solving processes created by themselves in the student (s) - student (s) and teacher-student (s) dialogue. They also justified their explorations and solving, insights and processes, posing new explorations and problems, going beyond the solving process, effectively participating in the construction of their knowledge in Combinatorial Analysis. From which it follows that such methodology allows the student to learn with much more understanding and depth, empowering him to solve Combinatorial Analysis problems with a focus not only on the search for the solving of the problem, but could go much further, such as the performance of a work of problem exploration and posing from multiple perspectives.

Keywords: Combinatorial Analysis; Mathematics Classroom; Problem Exploration, Solving, and Posing.

Enseñanza-aprendizaje de análisis-combinatório por medio de la exploración, resolución y proposición de problemas en la Enseñanza Media

Resumen

La presente encuesta hace un análisis como un abordaje en sala de clase con exploración, resolución y preposición de problemas puede potencializar con la enseñanza-aprendizaje de análisis combinatorio. La encuesta fue emprendida según un abordaje cualitativa, aspirando buscar significados, interpretar y comprender las informaciones obtenidas. La modalidad de encuesta puede ser caracterizada como pedagógica, según la cual el maestro es el encuestador de su propia sala de clase (LANKSHEAR E KNOBEL, 2008). La metodología de enseñanza-aprendizaje elegida para trabajar en sala de clase fue a de exploración, resolución y proposición de problemas (ANDRADE, 1998; 2017), desarrollada con una secuencia de actividades en un equipo del segundo grado de la enseñanza media de una escuela pública, Brasil. Los datos fueron levantados durante las clases por medio de observaciones y registros de materiales utilizados por los alumnos, bien como grabación auditiva. En este artículo, se destacan siete encuentros, totalizando siete clases, cada clase con duración de, en el máximo, cuarenta y cinco minutos. Durante la intervención, el presente encuestador actuó como maestro-investigador, trabajando en sala de clase como maestro regente, dando autonomía a los alumnos en la construcción de las ideas esenciales de combinatorio, de modo que el autor actuó como mediador e incentivador. Los resultados de la encuesta evidenciaron que por medio del abordaje vía exploración, resolución y proposición de problemas fue posible acompañar el crecimiento de los alumnos, que lanzaron sus propias ideas para explorar y resolver los problemas propuestos tanto por el maestro-investigador como por ellos mismos, encontraron múltiplas estratégias y procesos de exploración y resolución desarrollados por ellos mismos en el diálogo alumno(s) - alumno(s) y maestro - alumno(s), justificaron sus exploraciones, resoluciones, soluciones, insights y procesos, propusieron nuevas exploraciones y nuevos problemas, indo más allá del proceso de resolución, participando así efectivamente de la construcción de su conocimiento en análise combinatória. De donde se concluye que tal metodología permitió un aprendizaje con más comprensión y profundidad, potencializando el alumno para resolver problemas de análisis combinatorio con foco no solamente en la búsqueda de solución del problema, pero en el proceso de resolución y pudiendo ir más allá, como la realización de un trabajo de exploración y proposición de problemas en múltiples perspectivas.

Palabras clave: Análisis Combinatorio; Sala de Clase; Exploración, Resolución y Proposición de Problemas.

1. Introdução

O presente estudo tem como objetivo analisar como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

O interesse pelo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória partiu primeiramente de algumas lacunas deixadas quando o autor principal ainda era aluno da Educação Básica, época em que não houve qualquer contato com o estudo de Análise Combinatória. Desse modo, questionávamos a respeito de como contribuir para que os alunos tenham um aprendizado com compreensão no estudo da Análise Combinatória; o que levou a buscar alternativas metodológicas para este conteúdo, na perspectiva da Resolução de Problema.

Os PCN+ indicam que o trabalho em sala de aula acerca de Análise Combinatória pode ocorrer pela resolução de problemas ao afirmar que, “esse conteúdo deve ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril” (BRASIL, 2002, p. 127).

Nesse contexto, diante das diferentes perspectivas do uso da metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula, adotamos neste trabalho a proposta de Andrade (1998; 2017), intitulada, “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas (ERPCDP)”.

Andrade (2017) destaca que o ensino de Matemática nessa proposta começa sempre com um problema ou situação-problema. Nela os estudantes aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática explorando a situação-problema.

No ensino-aprendizagem de combinatória, percebe-se que no ambiente escolar, é dada ênfase conferida ao modelo fórmula-aplicação, assim é ensinado um conjunto de fórmulas e depois cabe ao aluno escolher a fórmula correta para resolver o problema proposto. Nesse sentido, os alunos não desenvolvem a compreensão dos problemas discutidos, visto que são valorizados certos mecanismos que pouco contribuem para a compreensão dos significados dos problemas de contagem, e tampouco permitem que eles desenvolvam o raciocínio combinatório.

Desse modo, “as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2002, p. 126-127).

Sobre isso, os PCN+ (BRASIL, 2002) dizem que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático que consiste em decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. Para este documento, esta nova forma de pensar em Matemática não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

É fato que a Combinatória apresenta dificuldade de natureza conceitual. Sob essa ótica, é necessário realizar um trabalho em sala de aula que valorize a compreensão dos conceitos referente a este tópico, já que o conhecimento das fórmulas garante muito pouco sobre como proceder em determinados problemas. Além disso, percebe-se que os problemas de Análise Combinatória não mantêm o mesmo padrão em suas resoluções. Por isso, quando estamos diante de um problema referente a este tópico, é necessário pensar, em seguida fazer anotações, com o intuito de conhecer sua natureza, e como se procede, por exemplo, diante de uma enumeração sistemática.

As novas pesquisas devem valorizar a compreensão e a formalização das ideias essenciais de Combinatória. Isso pode acontecer quando colocamos o aluno em um ambiente que leve à reflexão, permita que ele tome decisões adequadas e organize as informações diante do problema proposto, desenvolvendo uma forma de pensar matemático: o raciocínio combinatório.

Com base nesse entendimento, a nossa proposta em trabalhar com a Resolução de Problemas em sala de aula compreende ir além da resolução do problema e da sua solução, ao trabalhar com a Exploração e a Proposição de Problemas, dando ainda uma atenção maior a Exploração de Problemas.

2. Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas em sala de aula

Andrade (1998) destaca que, em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início aproximadamente na década de 1970. De acordo com ele, grande parte da literatura que hoje se conhece sobre a resolução de problemas foi desenvolvida a partir dos anos de 1970. Este autor também enfatiza a necessidade de reconhecer a relevância dos trabalhos de George Polya, que datam de 1944, os quais foram publicados no livro “How to solve it”, cuja primeira edição data de 1945. Nessa obra, a resolução de problemas é tratada pela primeira vez como tema de interesse para professores e estudantes, nos níveis superiores de ensino de Matemática.

Durante a década de 1980, após o movimento da Matemática Moderna, aconteceram muitas mudanças curriculares. Nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática), em "Uma Agenda para a Ação”, apresentou uma série de recomendações para a matemática escolar, onde “Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar para aquela década”.

Nessa referida década, trabalhou-se muito com estratégias de resolução de problemas e muitos livros didáticos foram escritos usando-se as ideias de Polya que, desde 1944, falava em resolução de problemas para se ensinar e aprender matemática. Entretanto, os trabalhos realizados se apoiavam em estratégias que apresentavam caminhos de resolução e não, como realmente queria Polya, no pensar dos alunos.

Refletindo sobre as potencialidades da Resolução de Problemas, começou-se a fazer um planejamento para o desenvolvimento de um trabalho em sala de aula. Onuchic e Allevatto (2004) destacam que na década de 1980 os recursos foram sendo desenvolvidos quanto à temática da Resolução de problemas. Sempre era visado o trabalho de sala de aula na forma de coleções de problemas, listas de estratégias e sugestões de atividades que pudessem orientar e avaliar o desempenho em Resolução de Problemas. Assim, grande parte desse material passou a ajudar os professores a fazer da Resolução de Problemas o ponto central de seu trabalho.

De acordo com Andrade (1998), esta década é considerada a "idade de ouro" da Resolução de Problemas. Ele destaca que nesse período o Brasil começou a trabalhar de modo mais efetivo sobre Resolução de Problemas.

Finalizando a década de 1980, pesquisadores passaram a questionar o ensino e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Então, a resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, ou seja, como um meio de se ensinar matemática. O problema passa a ser concebido como um agente que pode desencadear um processo de construção do conhecimento. Nesse ínterim, Andrade (1998) destaca que a resolução de problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problemas dos anos 90.

Diversas pesquisas foram desenvolvidas, trazendo diferentes concepções sobre a Metodologia de Resolução de Problemas, cada uma apresentando suas contribuições e sendo aprimoradas ao longo do tempo.

Os pesquisadores Schroeder e Lester (1989) destacam as seguintes concepções: ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar *para* resolver problemas e ensinar matemática *através* da resolução de problemas.

A primeira concepção está relacionada com o trabalho de Polya (1945), que discute sobre as quatro fases da Resolução de Problemas. Essa concepção também se propõe a trabalhar o conteúdo matemático destacando as heurísticas utilizadas.

Na segunda concepção, temos os problemas rotineiros e as devidas contribuições para aprendizagem. Denota-se preocupação com as habilidades dos alunos em transferir o que está sendo ensinado, na aplicação desses tipos de problemas.

A última concepção remete à compreensão da Matemática, na qual o aluno é ator principal, o problema matemático é ponto de partida e o professor age como mediador na construção da aprendizagem da Matemática. Nesta concepção, os problemas são importantes não somente como um meio de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Uma situação-problema é apresentada com o propósito de se construir novos conceitos e novos conteúdos, bem como a compreensão dos mesmos.

A metodologia de "Resolução de Problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos" (ONUCHIC E ALLEVATO, 2011, p. 82).

Essa compreensão da matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar. "[...] esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema" (ONUCHIC, 1999, p. 208).

Em vista disso, o problema é o ponto de partida e orientação para aprendizagem de novos conceitos e conteúdos (PCN, 1998; ONUCHIC, 1999; ONUCHIC E ALLEVATO, 2004, 2011; ANDRADE, 1998, 2017; ABRAMOVICH, 2019; FELMER, PEHKONEN, KILPATRICK, 2016; CAI, 2010; ENGLISH, SRIRAMANN, 2010; TÖRNER, SCHOENFELD, REISS, 2007). Nesse cenário, o aluno aparece como ator principal do processo de aprendizagem, no qual ele faz intervenções por si só, cabendo ao professor mediar e proporcionar situações que levam o estudante a pensar matematicamente.

Ao trabalhar com a Resolução de Problemas, podemos dar ênfase à Exploração de Problemas que nos permitem ter uma melhor compreensão dos conteúdos que estão sendo discutidos. Sobre isso, Andrade (2017) ressalta que as abordagens iniciais de resolução de problemas, principalmente as da década de 1980, limitavam-se apenas à busca da solução do problema. Portanto, o processo se limitava apenas à solução do problema, nunca ia além do problema inicialmente dado. A partir daí, o pesquisador apresenta uma proposta de exploração de problema em que, entre outros pontos, tem-se como orientação teórica/prática ir além da resolução do problema. O mesmo diz que, "no trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez ..." (ANDRADE, 1998, p. 24).

O pesquisador Andrade (2017) enfatiza um novo modelo em que, a *exploração* e a *resolução* de um problema são desenvolvidas a partir de um movimento aberto, não fechado, embora não solto, denominado de *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Sínteses-Resultado (P-T-RS-R)*. Numa aplicação prática desse modelo, inicialmente, é dado ou proposto um problema ou situação-problema, que pode partir tanto do professor quanto dos próprios alunos, esses mesmos alunos realizaram um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e sínteses. Chegando, desse modo, possivelmente à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Nesse novo modelo, Andrade (2017) enfatiza a necessidade de inclusão do termo *Resultado*, enquanto que na proposta original era apenas *Problema-Trabalho-Reflexões e*

Sínteses. Em meio às experiências vivenciadas pelo o autor, o mesmo enfatiza que o acréscimo da palavra resultado define melhor o processo como um todo, entendendo aqui o resultado como um refinamento das diversas sínteses desenvolvidas ao longo do processo de uma experiência de exploração de problemas, bem como destaca a solução do problema como um tipo de resultado.

O trabalho em sala de aula na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de problemas permite que o aluno possa fazer diversas descobertas, como também o levantamento de ideias com o intuito de entender os conceitos matemáticos que vão aparecendo durante a resolução do problema. Ademais, a exploração de um problema não pode ser vista como fim, mas sob uma perspectiva na qual, em um determinado momento, podemos retornar ao problema anterior buscando apresentar um novo conceito ou conteúdo em um nível mais avançado ou não. Andrade (2017) destaca que,

> A proposta de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas precisa ser sempre percebida como uma proposta aberta, não fechada, embora não solta, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas, nos encantos e desencantos, na transfiguração poética, no espaço-tempo, que o cotidiano da sala de aula nos proporciona. O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo. (ANDRADE, 2017, p. 367).

Nesse entendimento, a resolução de problemas não deve ser vista apenas como uma busca de resposta, mas, sim, interessada na compreensão do aluno. Na exploração de um problema o ponto de partida é o aluno, que está diante de um problema aberto, no qual ele desenvolve sua autonomia, levantando hipóteses, tomando decisões, refletindo sobre o seu fazer e investigando novos problemas que vão aparecendo durante a resolução do problema inicial. Desse modo, "os estudantes desempenham um papel muito ativo em sua aprendizagem explorando situações problema com a orientação do professor e "inventar" suas próprias estratégias de resolução" (CAI, 2010, p. 255).

Nessa abordagem, quando o aluno compreende o problema e suas soluções, cabe ao professor incentivar a exploração de novos problemas a partir do problema inicial, visando a uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Ademais, quando o professor está explorando variações do problema que foi apresentado inicialmente, está propondo meios valorosos que levam os alunos a refletir sobre os significados das diversas ideias matemáticas que estão implícitas no problema apresentado.

No entanto, para que o professor conduza um ambiente de exploração de problemas, é necessário valorizar a criatividade dos alunos e sua autonomia, incentivando-os na elaboração de suas próprias estratégias, não negando as ideias por eles apresentadas, mesmo que elas não ajudem na resolução do problema. Na exploração do problema, os alunos apontam suas inquietações e o professor conduz um ambiente de reflexão acerca das questões propostas, levando os alunos a compreender as suas próprias perguntas e consequentemente o problema.

Diante da experiência vivenciada com o tema Resolução e Exploração de Problemas, Andrade (2017) enfatiza o caminhar para uma experiência ligeiramente modificada que hoje denomina de Exploração, *Resoluçãoexploração*, *Proposiçãoexploração* e Codificação - Descodificação de Problemas (ERPCDP).

Conforme o mesmo pesquisador, a nova denominação permite uma melhor compreensão e tomada de consciência do processo como um todo. Ele também destaca que colocar o termo *Resoluçãoexploração* implica numa tomada de consciência, percebendo a resolução como parte integrante e resultante de um caminhar feito num processo de exploração de problemas. Já o termo *Proposiçãoexploração* implica numa tomada de consciência de perceber a proposição também como parte impactante, integrante e resultante de um caminhar realizado ao longo de um processo de exploração de problemas.

3. Metodologia

A pesquisa se situa numa abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Os autores Prodanov e Freitas (2013) enfatizam que esta é a melhor abordagem que podemos adotar, pois o ambiente natural é fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados.

A modalidade de pesquisa pode ser caracterizada, conforme Lankshear e Knobel (2008), como uma pesquisa pedagógica, na qual o professor é, sobretudo, o pesquisador em sua própria sala de aula, investigando e refletindo sobre sua própria prática. De acordo com os mesmos autores, uma das finalidades que em geral é compartilhada sobre pesquisa pedagógica é a de que ela pode contribuir, de forma demonstrável, para melhorar o ensino ou a formação dos alunos. É por meio de suas próprias pesquisas que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que pode mudar em sua prática, visando a um bom rendimento dos alunos.

A pesquisa foi realizada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, no turno matutino da Escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos, na cidade de Alagoinha-PB. A sala foi organizada em 12 grupos, sendo compostos por três alunos e, em alguns casos, em duplas, com o intuito de um trabalho cooperativo e colaborativo, no qual se considerou importante, nesse processo, o respeito mútuo entre os pares e o respeito às ideias sugeridas e compartilhadas na busca da solução dos problemas.

Os dados foram levantados em sala de aula através das observações e registros dos materiais utilizados pelos alunos. Também fizemos uso de gravação sonora com o intuito de coletar o máximo de evidências possíveis para que se pudesse ter mais clareza diante do que se propôs a investigar.

Na intervenção, o presente pesquisador agiu como professor-pesquisador, trabalhando em sala de aula como professor regente, dando autonomia aos alunos na construção das ideias essenciais de Combinatória, no qual o papel do pesquisador foi de mediador e incentivador.

A Metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em sala de aula foi a de Exploração, Resolução, Proposição de problemas, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, na qual destacamos neste artigo 7 encontros que correspondem ao total de 7 aulas, cada uma com duração de, no máximo, 45 minutos.

4. Abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas

Inicialmente, o professor-pesquisador se apresentou à turma, destacando que iniciaria a aula com uma situação-problema. No entanto, seria necessário que eles ficassem atentos às seguintes informações:

- Ao fim da aula, os problemas seriam recolhidos;
- Depois de ter resolvido o problema e perceber que no caminhar da discussão a sua resolução estava incorreta, não poderia apagar o registro dela;
- É importante a frequência na sala de aula;
- A avaliação ocorrerá de forma contínua e será feita a partir do que eles fazem (certo ou errado);
- Será observada e avaliada a interação dos membros do grupo durante a realização das atividades;
- É importante o potencial de participação e o envolvimento nas discussões;
- Eles teriam que ler o problema e identificar que é dado e o que se pede;
- Remanescendo qualquer dúvida sobre o problema, poderia solicitar a ajuda do professor-pesquisador.

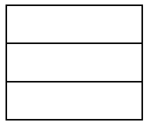
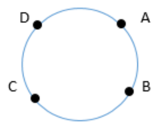
Em seguida foi entregue um problema para cada aluno e eles iriam realizar um trabalho sobre ele. Os problemas a seguir, trabalham com conceitos que julgamos essenciais no estudo da Análise Combinatória, tais como: Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, Permutação simples, Arranjo simples e Combinação simples.

eISSN: 2526-9062

No Quadro 1, destacamos os problemas que foram trabalhados ao longo dos sete encontros.

Quadro 1: Problemas trabalhados

Problema dos códigos	Gerlane dispõe dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e de uma moeda. Pretende fazer códigos compostos inicialmente por um número de dois algarismos, seguido por uma das faces da moeda. Quantos códigos diferentes ela pode criar? a) Se os códigos fossem criados com algarismos distintos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades? b) Se os códigos fossem criados com números pares de dois algarismos seguidos de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades? c) Se os códigos fossem criados com números de quatro algarismos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
Problema das quatros bolas	Uma urna contém quatro bolas de cores diferentes: branca, verde, azul e preta. Quantas são as maneiras diferentes de retirar, sucessivamente, 2 bolas dessa urna, sem reposição das bolas retiradas? a) Quantas são as maneiras diferentes de retirar, sucessivamente, 2 bolas dessa urna, repondo cada bola antes da retirada da próxima? b) Se acrescentarmos uma bola de cor cinza, quantas são as possibilidades de retirar 2 bolas sem reposição? E 3 bolas sem reposição?
Problema dos anagramas	Qual o número de anagramas da palavra GARI? a) Quantos anagramas começam com a letra A? b) Quantos anagramas terminam por consoante? c) Quantos anagramas começam por I e terminam por R?
Problema do carro e da moto	Adriano, Ivam, Bruno e Erivam foram os funcionários que mais se destacaram em uma empresa durante o ano de 2015. Com isso, o dono da empresa resolveu sortear entre os quatro, um carro no valor de R$ 50. 000,00 para o primeiro sorteado e uma moto no valor de R$ 10. 000,00 para o segundo sorteado. Quantas são as possíveis duplas de ganhadores? a) A ordem dos sorteados é importante? Explique sua resposta. b) Se fossem sorteados dois carros que têm o mesmo valor, quantas possíveis duplas de ganhadores poderíamos formar? Nesse caso, a ordem dos sorteados é importante? Explique sua resposta.

Problemas da bandeira	Maria da Penha pretende pintar a bandeira a seguir de modo que as faixas adjacentes não a possuam a mesma cor. Sabendo que ela dispõe das cores: azul, preto e laranja, de quantas maneiras possíveis ela pode pintar a bandeira?  a) No caso de as faixas adjacentes poderem possuir a mesma cor, de quantas maneiras possíveis a bandeira poderá ser pintada? b) Se Maria da Penha dispõe, agora, das cores azul, preto, laranja e vermelho e pode pintar as faixas adjacentes. De quantas maneiras possíveis ela pode pintar a bandeira?
Problema da foto	Dayana, Manoel, Luciana e Paulo pretendem tirar uma foto juntos. No entanto, Dayana e Manoel são um casal de namorados e têm que sair juntos na foto. a) De quantas maneiras diferentes eles podem tirar uma foto juntos? b) Se Dayana, Manoel, Luciana e Paulo pretendem tirar uma foto em um banco com quatro lugares, no entanto, Paulo quer ficar sentado no segundo lugar. De quantas maneiras eles podem se arrumar para a fotografia, levando em consideração essa condição?
Problema da circunferência	Em uma circunferência foram destacados os seguintes pontos, A, B, C e D. Assim quantos segmentos podemos traçar com uma extremidade em dois desses quatro pontos?  a) Quantos triângulos convexos podem ser construídos com vértices nesses pontos? b) Quantos quadriláteros convexos podem ser construídos com vértices nesses pontos?

Fonte: Acervo do pesquisador

Sendo implementada a pesquisa em sala de aula, aos poucos, os alunos foram se engajando nas discussões das atividades, já que lhes agradava a proposta de Exploração, Resolução e Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas, eles puderam refletir sobre o que estavam fazendo, retomando um problema anterior para chegar à resolução de um novo problema. Durante a intervenção, tivemos algumas evidências que comprovaram isso, como as justificativas do grupo G8 no item (b) no *Problema dos códigos*, como também do grupo G2 no item (a) na questão do *Problema das quatro bolas*, respectivamente. Observe, a seguir, a descoberta desses grupos:

> *G8 (Aluno 2): Professor a resposta é 24.*
> *PP: Como vocês resolveram?*
> *G8 (Aluno 2): No problema inicial a resposta foi 32, mas tem 8 códigos que não são distintos, aí eu fiz: 32 – 8 = 24 possibilidades.*
> *PP: Correto.*
>
> *G2 (Aluno 1): Basta acrescentar os seguintes casos: (V, V), (B, B), (P, P) e (A, A) e adicionar essas quatro possibilidades às outras dozes possibilidades da letra (a), obtendo dezesseis possiblidades.*
> *PP: Correto.*

No *Problema dos anagramas*, o grupo G6 resolveu todos os itens a partir do problema inicial, justificando, ao professor-pesquisador, que bastava observar na árvore de possibilidades que se tinha um panorama de todas as possiblidades para cada item.

"O trabalho de exploração de um problema, em sala de aula, pode sempre ser continuado. O que acontece é que alunos e professor, num determinado momento, param, mas não acabam, definitivamente, de explorar o problema colocado, partindo para outros problemas, podendo, depois, se necessário e oportuno, retornar, se o desejarem, ao problema original" (ANDRADE, 1998, p. 179).

Isso posto, quando percebemos que os alunos não chegaram a um aprofundamento esperado na atividade proposta, naquele momento, a retomamos ao percebermos que eles dispõem, agora, dos conhecimentos necessários para apreender as ideias inerentes aos problemas discutidos anteriormente.

No *Problema do carro e da moto*, ao formalizarmos as ideias essenciais de arranjo e combinação simples, questionamos a turma se eles conseguiam identificar quais os problemas que abordam estes conceitos – discutidos em aulas anteriores. Observamos que os alunos não tiveram dificuldades de reconhecer os problemas, fazendo a distinção clara dos agrupamentos. Os diálogos abaixo evidenciam, um novo olhar da turma em relação a esses problemas:

> *PP: Dos problemas que já foram discutidos nas outras aulas, quais são problemas de arranjo simples?*
> *Turma: O problema dos códigos.*
> *PP: Porque?*
> *Turma: Porque por exemplo* $12 \neq 21$. *A ordem aí é importante.*
> *PP: Já resolvemos algum problema em que ordem dos elementos não gerava um novo agrupamento? Qual foi o problema?*
> *Turma: No sorteio dos dois carros, a dupla de ganhadores (Adriano, Erivam) e (Erivam e Adriano) é a mesma. No caso a ordem não importa.*

Notamos que a metodologia de Exploração, Resolução e Proposição de problemas colocou os alunos em um ambiente em que foi necessário refletir sobre o seu fazer ou sobre o seu pensar. Dessa forma, as atividades trabalhadas possibilitaram a evolução do processo metacognitivo. Isso ficou evidenciado durante os questionamentos do professor-pesquisador que exigia do aluno uma tomada de decisão, levando-o a refletir sobre o que fez ou estava fazendo. Percebemos que, ao explorar a capacidade do aluno de refletir sobre o processo de resolução do problema, permitiu-lhe obter resultados satisfatórios, como também uma aprendizagem com compreensão. Observe o diálogo com grupo G4 no Problema dos códigos:

G4: Professor a resposta é 16.
PP: Como vocês fizeram?
G4 (Aluno 1): Fizemos todos os códigos que contêm a face cara.
PP: E a face coroa?
G4 (Aluno 2): Coroa é um número?
PP: Não. Coroa é uma das faces da moeda.
G4 (Aluno 2): Então é duas vezes dezesseis.
PP: Porque?
G4 (Aluno 2): Porque vai ter mais dezesseis coroas.

Nota-se o comportamento metacognitivo, no qual os alunos monitoram e regulam suas ações repensando o que foi feito e elaboram estratégias que dão conta do novo problema. Vimos acima, nos diálogos com os grupos G2 e G8 acerca dos problemas das quatro bolas e dos códigos respectivamente, que os alunos retomam o seu processo de pensamento, tomando consciência do que foi feito para decidir sobre as estratégias que podem ser eficazes na resolução do problema. A mediação professor-aluno, professor-grupo e professor-turma colocou o aluno como o foco central do trabalho em sala de aula, demonstrando que ele é capaz de fazer intervenções por si só. Ou seja, em meio a questionamentos dos alunos sobre como resolver o problema, sobre o seu trabalho realizado, ou sobre a má interpretação do problema, buscamos fazer mediações que não intimidassem sua criatividade.

Assim, tentamos evidenciar, para os alunos, que eles são capazes e que acreditamos em seus potenciais. Percebemos o desenvolvimento de alguns alunos em meio à resolução dos problemas, visto que era comum, nas primeiras atividades, eles solicitarem, do professor-pesquisador, uma intervenção com o objetivo de sanar dúvidas para, a partir daí, iniciar a resolução do problema.

Com o prosseguimento da pesquisa, constatamos uma nova postura, visto que o professor-pesquisador era solicitado, na maioria das vezes, apenas para ouvir as explicações dadas pelos alunos acerca do trabalho realizado durante a resolução do problema proposto. O grupo G6 justifica sua resolução no *Problema da bandeira*:

G6 (Aluno 2): Professor a resposta é 12.
PP: Como vocês fizeram?

G6 (Aluno 2): Para escolha da primeira cor tem 3 possibilidades, para escolha da segunda 2 possibilidades, porque as faixas que estão juntas não podem ser pintadas com a mesma cor e para terceira 2 possibilidades. Assim fizemos: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

A exploração dos problemas possibilitou que os alunos pudessem buscar algum padrão na formação dos agrupamentos e, em seguida, fazer generalizações. Em nossas observações em sala de aula, constamos que isso aconteceu, já que grupo G1 conseguiu chegar à ideia essencial do Princípio Fundamental da Contagem no Problema dos códigos, fazendo uma lista organizada e buscando padrões na formação dos códigos, conforme pode ser observado na Figura 1.

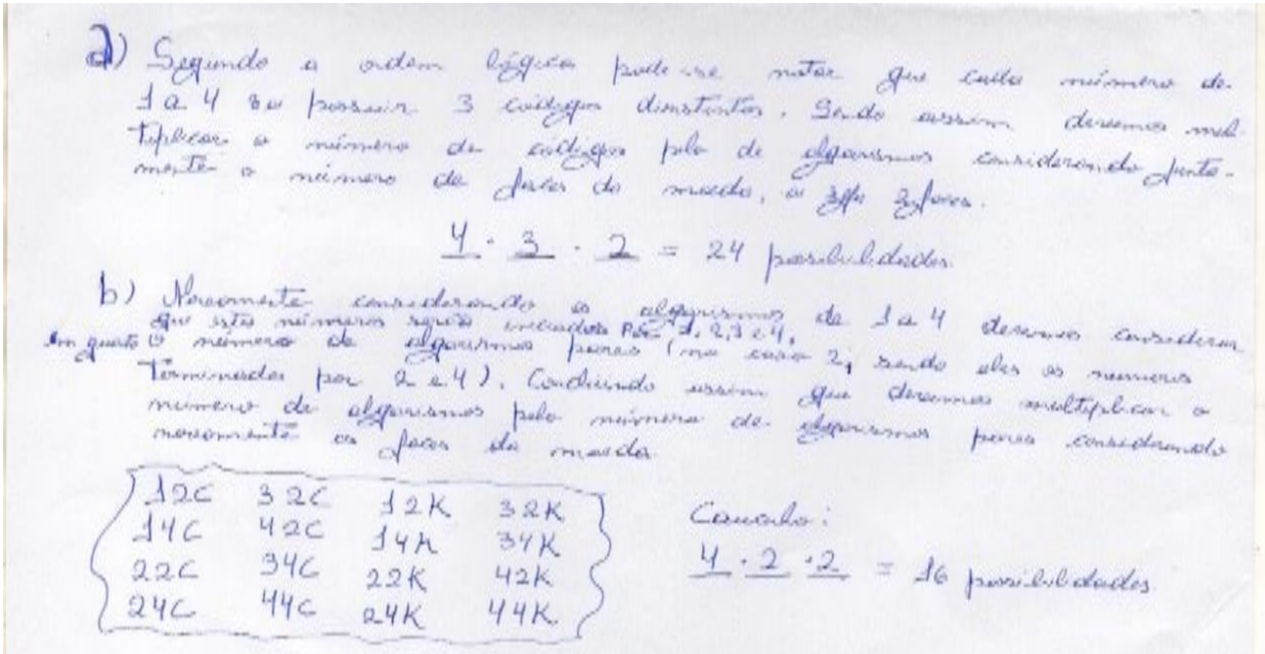


Figura 1: Resolução do grupo G1 aos itens (a) e (b) referente ao problema dos códigos

Fonte: Dados da pesquisa

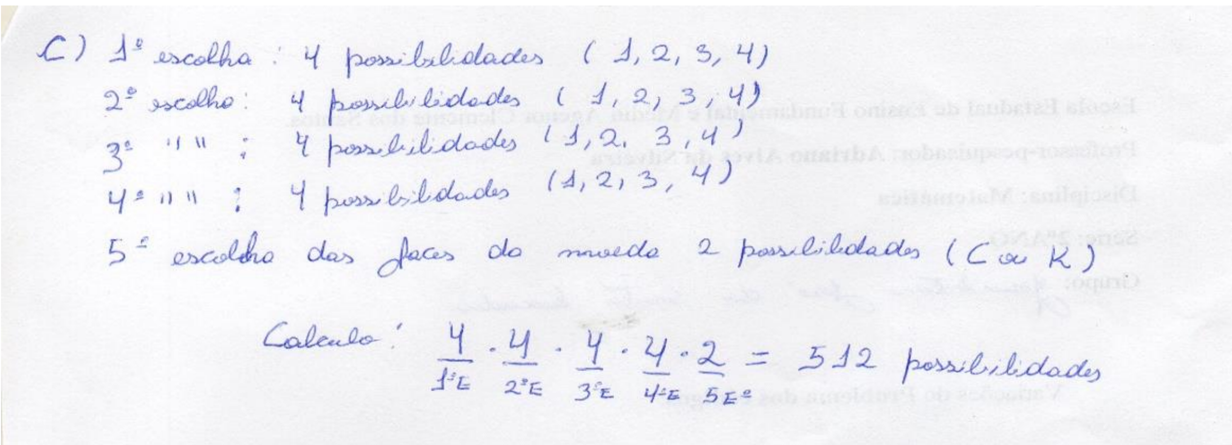


Figura 2: Resolução do grupo G1 ao item (c) referente ao problema dos códigos
Fonte: Dados da pesquisa

No Problema das quatro bolas, os alunos do grupo G8 apresentaram sua compreensão do Princípio Fundamental da Contagem a partir da observação de padrões na formação de cada agrupamento, "G8 (Aluno 1): No caso percebemos que há três maneiras de cada bola sair por primeiro". A utilização de problemas com uma quantidade relativamente pequena de possibilidades vem possibilitando, aos alunos, buscar padrões na formação dos agrupamentos.

A lista organizada de todas as possibilidades possibilitou ao grupo G8 chegar à generalização do problema, conforme pode ser observado na Figura 3.

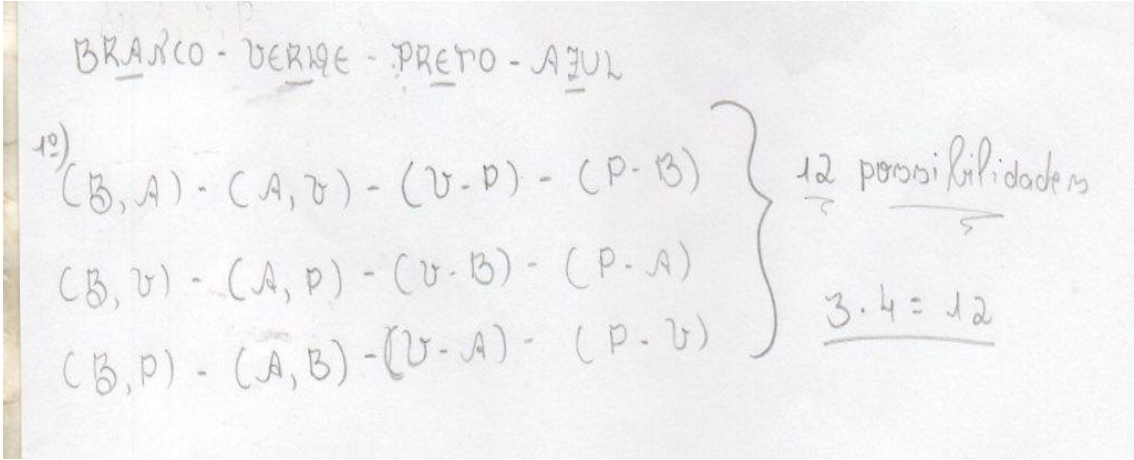


Figura 3: Resolução do grupo G8 referente ao Problema das quatro bolas

Fonte: Dados da pesquisa

Durante a mediação, os alunos justificavam suas ideias e o professor-pesquisador propunha alguns questionamentos que pudessem levá-los a refletir sobre o que eles estavam fazendo, promovendo com essa prática um ambiente de diálogo e de cooperação entre os alunos do grupo. A seguir, trazemos alguns diálogos entre os alunos no *Problema da foto* e do *Problema da circunferência*, respectivamente:

> *PP: Estão conseguindo resolver o problema? Como as pessoas podem se organizar para tirar uma foto?*
> *G6: Dayana e Manoel têm que sair juntos nas fotos?*
> *PP: Isso. E como vocês estão pensando?*
> *G6 (Aluno 1): São quatro pessoas, sendo que Dayana e Manoel têm que ficar juntos. Então na primeira podemos colocar Dayana e Manoel...e Luciana e Paulo. Na outra pode ser Manoel e Dayana, e Luciana e Paulo.*
> *G6 (Aluno 2): Então basta trocar as posições?*
> *G6 (Aluno 2): Pode ser pela árvore de possibilidades?*
> *PP: Pode sim.*
> *G2 (Aluno 1): O que importa é estarem Manoel e Dayana juntos? E Paulo pode ir para frente e para trás.*
> *PP: No caso, quem vai ficar trocando de posição?*
> *G2 (Aluno 1): Paulo e Manoel.*
> *G2 (Aluno 2): E vai continuar sempre os dois juntos?*
> *G2 (Aluno 1): Os dois vão ficar, o que vale é mudar a ordem.*
> *G2 (Aluno 2): E não é a mesma foto?*
> *G2 (Aluno 1): Não. Manoel e Dayana e Dayana e Manoel são duas formas de tirar a foto. Não é professor?*

> *PP: Isso. Será que são 12? Quem seria um segmento aí?*
> *G1 (Aluno 1): BA, BD.*
> *G1 (Aluno 2): AB.*
> *PP: Vocês acham que AB e BA são segmentos diferentes ou iguais?*
> *G1 (Aluno 1): É igual.*
> *G1 (Aluno 3): É não.*
> *PP: Porque sim? Ou porque não?*
> *G1 (Aluno 3): Porque vão ser segmento repetidos.*
> *PP: Isso. Neste caso se não vamos contar os segmentos repetidos, então vão ser quantas possibilidades?*
> *G1 (Aluno 2): Se for diminuindo os repetidos, vai diminuindo cada um, então vai ser menos, vai ser 6.*

Foi possível verificar que a exploração de atividades com poucos agrupamentos possibilitou, aos alunos em alguns problemas, a distinção dos problemas de Combinatória. Observamos que os alunos que recorriam à árvore de possibilidades, à tabela ou a uma lista organizada, puderam observar, com mais clareza, que a mudança na ordem dos elementos gerava um novo agrupamento ou não. O diálogo com grupo G9 evidencia sua descoberta:

> *G9 (Aluno 1): Professor são 6 possibilidades.*
> *PP: Como vocês observaram isso?*
> *G9 (Aluno 1): Observamos na tabela que, por exemplo Adriano ser o primeiro ganhador e Erivam o segundo ganhador, é a mesma coisa de Erivam ser o primeiro ganhador e Adriano o segundo ganhador. Aí fizemos uma tabela obtendo 6 possibilidades.*

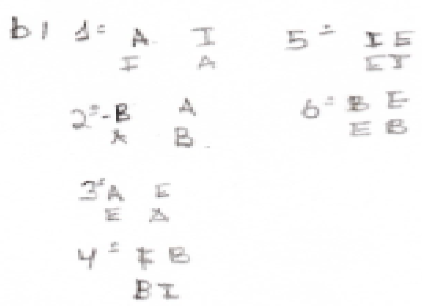


Figura 4: Resolução do grupo G9 ao item (b) referente ao problema do carro e da moto
Fonte: Dados da pesquisa

No problema da circunferência, os grupos G7 e G9 fizeram uma distinção correta do tipo de agrupamento ao listar doze possibilidades e notarem que havia segmentos repetidos, ou seja, que não fariam parte da contagem, conforme pode ser observado na Figura 4. No entanto, tivemos a preocupação de evidenciar, em alguns problemas, que nem sempre é recomendável descrever todas as possibilidades. A formalização do Princípio Fundamental da Contagem possibilitou aos alunos uma nova tomada de decisão quando se deparavam com um problema caracterizado por uma quantidade relativamente grande de agrupamentos.

Os alunos, no decorrer dos encontros, foram melhorando seu rendimento, resolvendo problemas de Combinatória com muito mais autonomia, sem precisar tanto da confirmação do professor-pesquisador sobre o trabalho realizado. Com isso, os alunos passaram a ser agentes ativos do seu processo de aprendizagem, ao justificar e refletir sobre o que estavam fazendo e evidenciando múltiplas soluções, podendo validar o seu trabalho nos problemas propostos. As discussões geradas ao fim de cada aula possibilitaram aos alunos refletirem sobre o que fizeram, validando suas soluções ao mesmo tempo em que evidenciaram as dificuldades encontradas, as quais tentamos suprimir mediante debates entre o professor-turma, além de conseguirmos formalizar ideias essenciais de Combinatória.

5. Considerações finais

Durante a nossa abordagem em sala de aula, percebemos que o uso da proposta de Exploração, Resolução e Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas possibilitou aos alunos desempenhar o papel de sujeito principal da aprendizagem, posto que eles expõem suas ideias e reflexões acerca do problema, criando um cenário com sujeitos mais autônomos e entendedores do seu próprio fazer. Assim, a abordagem dessa proposta em sala de aula tem um impacto positivo na aprendizagem da Matemática, visto que contribuiu com a formação de indivíduos críticos e que fizeram intervenções autônomas, cabendo ao professor apenas mediar o processo de aprendizagem do aluno.

Por sua vez, os alunos experimentaram o prazer pelas suas descobertas a partir dos seus próprios esforços, gerando ao fim da aula novas aprendizagens, o que e fomenta a motivação para o enfretamento de novos problemas. Este conhecimento que foi autogerado pelo aluno se incorporou aos seus conhecimentos anteriores, expandindo seu potencial matemático.

Diante de todas essas constatações, o nosso trabalho possibilitou perceber melhor o cotidiano da sala de aula e a importância dele para a formação do professor, de modo que pudemos vivenciar a nossa proposta didática, permitindo perceber como os alunos apreendem o que está sendo ensinado.

O processo de mediação fez o professor-pesquisador perceber o momento da aprendizagem dos alunos, propondo questões a partir das ideias levantadas por eles, evitando o fornecimento de respostas, evidenciando, aos estudantes, uma crença em seus potenciais.

Para que isso fosse possível, foi necessário incorporar essas práticas a nossa proposta didática, ter domínio teórico dela e pensar em problemas que abordassem os conceitos matemáticos que foram introduzidos durante as aulas. Tais ideias possibilitaram que o professor-pesquisador aprendesse com a experiência vivenciada.

Todas essas experiências que foram vivenciadas em sala de aula proporcionaram um diálogo entre a teoria e a prática, trazendo reflexões sobre como os alunos mobilizam seus conhecimentos no estudo da Combinatória, a partir de uma abordagem inovadora do tema apoiada na proposta de Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas.

Assim, ao pesquisar nossa própria prática docente, acreditamos ter contribuído também para o aperfeiçoamento da nossa identidade profissional, visto que ficamos atentos sobre como nossas ações surtiram efeitos positivos na aprendizagem dos alunos. Deste modo, esta pesquisa propiciou experiências que serviram para a nossa formação continuada ao possibilitar reflexões sobre como o uso da metodologia de resolução de problemas surtiu efeitos positivos no processo de ensino-aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Outrossim, as pesquisas desenvolvidas no cotidiano de sala de aula conseguiram dar forma aos conteúdos que estão sendo trabalhados. Com isso, a participação do professor que acumula atribuições de profissional da educação e de pesquisador da educação matemática nas discussões que envolvem ensino-aprendizagem, consegue dar uma nova compreensão à matemática que é ensinada aos alunos.

Os resultados da pesquisa evidenciaram que através da abordagem de Exploração, Resolução, Proposição de Problemas, foi possível acompanhar o crescimento dos alunos no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, que lançaram suas próprias ideias para explorar e resolver os problemas propostos tanto pelo professor-pesquisador como por eles mesmos, encontraram múltiplas estratégias, insights e processos de exploração, resolução e justificativas desenvolvidas por eles mesmos no diálogo aluno(s)-aluno(s) e professor-aluno(s), participando efetivamente da construção do seu conhecimento. De onde se conclui que tal metodologia permitiu um aprendizado com mais compreensão e profundidade, potencializando o aluno para explorar, resolver e propor problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca da resolução e solução do problema, podendo ir muito além, como a realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas em perspectivas múltiplas.

6. Referências

ABRAMOVICH, S. **Integrating computers and problem posing in mathematics teacher education**. Singapore: World Scientific, 2019.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodicação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ANDRADE, S. **Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemático no Cotidiano da Sala de Aula.** In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Orgs). Perspectivas para Resolução de Problemas, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

BRASIL. Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria do Ensino Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries) – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002.

CAI, J. Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion. In: **Theories of Mathematics Education**: seeking new frontiers. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. P. 251-258.

ENGLISH, L.; SRIRAMANN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMANN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of mathematics education:** seeking new frontiers. Heidelberg: Springer, 2010. p. 263-290.

FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and solving mathematical problems**: advances and new perspectives. Switzerland: Springer, 2016.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-218.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A.; BORBA, M. (Orgs.). **Educação Matemática** – pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. **Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas. Um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: interciência, 1995, 196p.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. **Developing understanding in mathematics via**

problem solving. *In*: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). New directions for elementar school mathematics. Reston: NCTM, 1989, p. 31-32.

TÖRNER, G.; SCHOENFELD, A. H.; REISS, K. M. (Eds.). **Problem solving around the world**: summing up the state of the art. Dordrecht: Springer, 2007. (ZDM Mathematics Education, v. 39, n. 5-6, p. 353-563, 2007).