

Diseño de Observadores No Lineales para Plantas Mecatrónicas por Medio de LMIs

Nonlinear Observer Design for Mechatronic Systems via LMIs

Estrada-Manzo, V.; Martínez-Velázquez, J.; Bernal, M.

V. Estrada-Manzo

victorestrada@upp.edu.mx

Departamento de Mecatrónica, México

J. Martínez-Velázquez

avierc555@hotmail.com

Departamento de Mecatrónica, México

M. Bernal

miguel.bernal@itson.edu.mx

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, México

Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

ISSN-e: 2007-6363

Periodicidad: Semestral

vol. 8, núm. 16, 2021

sitioweb@uaeh.edu.mx

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/595/5953116022/>

Autor de correspondencia: victorestrada@upp.edu.mx



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Resumen: En este artículo se realiza el diseño de observadores para sistemas descriptores no lineales en tiempo discreto mediante técnicas convexas. El enfoque se basa en una factorización exacta del error de observación recientemente aparecida, para superar el conocido problema de las variables de ponderación no medibles dentro del área de modelos convexas, por lo tanto se evita el uso metodologías conservativas que contemplan cotas Lipschitz, teorema diferencial de valor medio o técnicas robustas. Como resultado, se pueden utilizar el método directo de Lyapunov y modelado convexo para obtener condiciones de diseño en términos de desigualdades matriciales lineales, mismas que se resuelven eficientemente a través de técnicas de optimización convexa. La efectividad de la propuesta se ilustra a través del péndulo de Furuta.

Palabras clave: Diseño de observadores no lineales, sistema descriptor, factorización del error, desigualdad matricial lineal, modelado convexo.

Abstract: This paper presents an observer design for discrete-time nonlinear descriptor systems via convex techniques. The approach is based on a recently appeared technique for exact factorization of the observation error, in order to overcome the well-known problem of unmeasurable scheduling variables within the convex area; thus, avoiding the use of conservative methodologies such as Lipschitz bounds, differential mean value theorem, or robust techniques is avoided. As a result, the direct Lyapunov method together with convex models can be employed in order to obtain designing conditions in terms of linear matrix inequalities, which are efficiently solved via convex optimization techniques. The effectiveness of the proposal is illustrated in the Furuta pendulum.

Keywords: Nonlinear observer design, descriptor system, error factorization, linear matrix inequality, convex modeling.

NOTAS DE AUTOR

victorestrada@upp.edu.mx

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento del vector de estados es importante para muchas tareas control, por ejemplo, cuando se implementa una ley de control por retroalimentación de estados (Mahmoud, 1982), para la estimación de entradas desconocidas (Guan, 1991), para el diagnóstico y aislamiento de fallas (Frank, 1990), entre otros. Desde su aparición en (Luenberger, 1971), los observadores de estados son comúnmente utilizados para acceder a estas señales no directamente disponibles en función de las mediciones de las variables de salida y control (Ogata, 2001).

El uso de métodos lineales prevalece por su simplicidad; sin embargo, al aplicarlos a sistemas no lineales, los resultados son sólo válidos localmente (Khalil, 2002). Técnicas no lineales como los modos deslizantes (Spurgeon, 2008), esquemas adaptativos (Loria et al., 2009), enfoques de geometría diferencial (Noh et al., 2004), observadores de alta ganancia (Besancón, 2003), o combinaciones de éstos (Boizot et al., 2010; Oh and Khalil, 1997), requieren cierta estructura del modelo o realizan transformaciones no lineales.

Este trabajo adopta un modelado convexo cuya estructura final es similar a los modelos Takagi-Sugeno (TS) (Takagi and Sugeno, 1985) y lo combina con el método directo de Lyapunov para obtener condiciones en términos de desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés) (Boyd et al., 1994). Un modelo tipo TS o convexo es una colección de modelos lineales interconectados por funciones escalares y no lineales (también conocidas como funciones de ponderación) que mantienen la propiedad de suma convexa en un conjunto compacto (Tanaka and Wang, 2001; Lendek et al., 2010). Si el modelo convexo es el resultado del sector no lineal (Ohtake et al., 2001), entonces es una representación exacta del sistema no lineal. Las condiciones en forma de LMI son preferidas porque se pueden resolver en tiempo polinomial mediante técnicas de optimización convexa (Scherer, 2004). Existen varios enfoques para el diseño de controladores y observadores dentro de esta área, tanto para sistemas de tiempo continuo (Bernal and Guerra, 2010; Sala et al., 2011; Campos et al., 2013; Lee and Kim, 2014), como para sistemas de tiempo discreto (Guerra and Vermeiren, 2004; Kruszewski et al., 2008; Ding, 2010); estos últimos han mostrado mayor desarrollo debido a que las llamadas funciones de Lyapunov no cuadráticas (convexas) no presentan el inconveniente de las derivadas de las funciones de ponderación (González et al., 2016). Este trabajo se enfoca en sistemas de tiempo discreto.

Sin embargo, en el diseño de observadores hay un problema abierto, a saber: si las variables de ponderación no son medibles, las condiciones de diseño se vuelven complicadas y difíciles de expresar como LMIs. Trabajos recientes abordan este problema empleando el teorema diferencial de valor medio (DMVT por sus siglas en inglés) (Ichalal et al., 2010), enfoques robustos mediante H_∞ para mitigar la influencia de los parámetros desconocidos (Guerra et al., 2018), restricciones de tipo Lipschitz (Rajamani, 1998; Bergsten and Driankov, 2002); más recientemente en (Ichalal et al., 2018) se propone una transformación, mientras que en (Chadli and Karimi, 2012) se emplean argumentos de robustez propios de sistemas inciertos. En este trabajo, las ideas de (Quintana et al., 2020) son utilizadas para resolver este problema mediante manipulaciones algebraicas para factorizar la señal de error al lado izquierdo de la ecuación en diferencias.

Por otro lado, una clase muy amplia de sistemas puede ser representada por sistemas descriptores (Luenberger, 1971), especialmente en mecánica, biomecánica y mecatrónica, donde la matriz del descriptor es invertible (Lewis et al., 2003). Para esta clase de sistemas descriptores, en (Estrada-Manzo et al., 2014) se diseña un observador convexo, mientras que en (Estrada-Manzo et al., 2016) se proporciona su generalización. Ambos enfoques utilizan el Lema de Finsler para evitar invertir la matriz del descriptor al involucrar la dinámica del error con la función de Lyapunov. El caso de los observadores para sistemas singulares se estudia en (Lopez-Estrada et al., 2017); esta clase de sistemas está fuera del alcance del presente trabajo.

Contribución: Desarrollo de observadores convexos para sistemas descriptores no lineales a través de una metodología sistemática que permita escribir el sistema del error de forma convexa y exacta tal que el

método directo de Lyapunov se pueda utilizar para encontrar condiciones de diseño en forma de LMIs. La metodología propuesta reduce conservatividad al evitar el cálculo de cotas Lipschitz, del teorema diferencial del valor medio o enfoques propios de sistemas inciertos.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera: la sección 2 plantea el problema, proporciona lemas y notación; la sección 3 establece las condiciones LMI para el diseño de observador no lineal a través de modelos convexos; la sección 4 ilustra la propuesta a través del péndulo de Furuta; la sección 5 concluye este trabajo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema descriptor no lineal en tiempo discreto de la forma:

$$E(y_k) x_k = A(x_k) x_k + B(y_k) u_k, y_k = C(x_k) x_k \quad (1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u_k \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y_k \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas; $A(x_k)$, $B(y_k)$, $C(x_k)$, y $E(y_k)$ son funciones matriciales cuyos elementos son suaves y están acotados en el conjunto compacto $\Omega_x \times \Omega_y$, que incluye el origen. En este trabajo sólo se considera el caso particular cuando $E(\cdot)$ es de rango completo para $x_k \in \Omega_x$, es decir, de (1) siempre es posible obtener una representación en espacio de estados estándar:

$$x_{k+1} = E^{-1}(y_k) A(x_k) x_k + E^{-1}(y_k) B(y_k) u_k \quad (2)$$

Los argumentos de funciones serán omitidos cuando su significado pueda inferirse del contexto.

El problema del diseño de observadores no lineales se enfrenta con el estudio de un sistema del error con la forma $e_k + 1 = (f(y_k) - L(y_k))e_k + \varphi(x_k) - \varphi(\hat{x}_k)$, donde $e_k = x_k - \hat{x}_k$ es el error de observación, x_k es el estado estimado, $L(\cdot)$ es la ganancia del observador, $f(\cdot)$ y $\varphi(\cdot)$ son continuamente diferenciales y acotadas. En la literatura sobre modelos convexos, la mayoría de los autores sólo consideran variables de ponderación medibles y por tanto $\varphi(x_k) - \varphi(\hat{x}_k) = 0$ (Guerra et al., 2012). Al considerar variables de ponderación no disponibles, la expresión $\varphi(x_k) - \varphi(\hat{x}_k)$ es tratada por medio de cotas Lipschitz (Bergsten and Driankov, 2002), o como una perturbación a través de enfoques de control H^∞ (Ichalal et al., 2008), o como una incertidumbre vía enfoques para sistemas inciertos (Chadli and Karimi, 2012); otros utilizan el teorema diferencial de valor medio (Guerra et al., 2018) o transformaciones para extender el vector de estado (Ichalal et al., 2018). Sin embargo, los primeros enfoques no son realistas al no incluir variables no medibles, los segundos son aproximaciones conservativas del problema mientras que los últimos incrementan la complejidad computacional y son válidos para casos particulares; ninguno de ellos estudia observadores para sistemas de la forma (1).

En este trabajo, se retoman los desarrollos propuestos por Quintana et al. (2020) y se aplican a sistemas de la forma (1) para expresar el sistema del error como $E(y_k)e_k + 1 = (f(\cdot) - L(\cdot))e_k$; entonces la variación de la función Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema sea puede escribir como $\Delta V(e) = e^T T_k Q(\cdot) e_k$, por tanto se garantice que $\Delta V(e) < 0$ si $Q(\cdot) < 0$, esto último de manera sistemática a través de modelos convexos y desigualdades matriciales lineales. Entonces, con lo anterior en mente, se adopta la siguiente estructura de observador:

$$E(y_k) \hat{x}_{k+1} = A(\hat{x}_k, y_k) \hat{x}_k + B(y_k) u_k + L(\hat{x}_k, y_k) (y_k - \hat{y}_k)$$

(3)

donde $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ es el estado del observador, $\hat{y}_k = C(\hat{x}_k, y_k)$ es la salida del observador y $L(\hat{x}_k, y_k) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ es una ganancia de observador no lineal que será diseñada tal que el error de observación e_k tienda a cero a medida que k tiende a infinito. Note que la ganancia del observador no lineal depende de todas las señales disponibles, por esto la distinción en la matriz $A(\hat{x}_k, y_k)$. La dinámica del error es:

$$E(y_k) e_{k+1} = (\bar{A}(x_k, \hat{x}_k) - L(\hat{x}_k, y_k) \bar{C}(x_k, \hat{x}_k)) e_k \quad (4)$$

donde $\#A(x_k, \hat{x}_k) e_k = A(x_k) x_k - A(\hat{x}_k, y_k) \hat{x}_k$, $\#C(x_k, \hat{x}_k) e_k = C(x_k) x_k - C(\hat{x}_k, y_k) \hat{x}_k$ tienen entradas acotadas en $\Omega_x \times \Omega_{\hat{x}}$. En (Quintana et al., 2020), se demuestra que (4) siempre se puede obtener por medio de operaciones algebraicas. Por ejemplo, asuma que se tiene una diferencia de polinomios $p(x) - p(\hat{x})$, con $p(x) = x_1 x_2$, entonces $p(x) - p(\hat{x}) = x_1 x_2 - \hat{x}_1 \hat{x}_2 = 0,5(x_2 + \hat{x}_2)(x_1 - \hat{x}_1) + 0,5(x_1 + \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2) = 0,5(x_2 + \hat{x}_2)e_1 + 0,5(x_1 + \hat{x}_1)e_2$.

Una vez que se tiene el sistema del error (4), este se expresa en forma convexa a través de la metodología del sector no lineal presentada en la siguiente sección.

2.1. Modelado Convexo

Note que $E(y_k)$, $\#A(x_k, \hat{x}_k)$, y $\#C(x_k, \hat{x}_k)$ contienen términos no constantes que dependen de x_k , \hat{x}_k y y_k ; claramente no todas las variables de estado están disponibles; por lo tanto, una reescritura convexa que sea útil debe tener esto en cuenta. El enfoque del sector no lineal (Ohtake et al., 2001) permite expresar términos no constantes y acotados $z(\cdot) \in [z^0, z^1]$ como sumas convexas de sus límites, es decir, $z(\cdot) = w_0(z) z^0 + w_1(z) z^1$, donde z^0 y z^1 son el mínimo y el máximo de $z(\cdot)$ en un conjunto compacto Ω_x ; las funciones $w_0 = (z^1 - z(\cdot)) / (z^1 - z^0)$ y $w_1 = 1 - w_0$ cumplen con la propiedad de suma convexa en Ω_x , es decir, $w_0(z) + w_1(z) = 1$ y $w_{0,1} \in [0, 1]$. Los siguientes pasos extienden esta metodología a nuestro caso:

Paso 1: Identificar todos los términos no constantes en $E(y_k)$, $\#A(x_k, \hat{x}_k)$ y $\#C(x_k, \hat{x}_k)$ que dependan exclusivamente de las variables disponibles para formar un vector de ponderación $z(\hat{x}_k, y_k) \in \mathbb{R}^s$, el resto de términos deben agruparse en otro vector $\xi(x_k, \hat{x}_k, y_k) \in \mathbb{R}^\sigma$.

Paso 2: Construir para cada $z_i(\hat{x}_k, y_k)$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ y $\xi_j(x_k, \hat{x}_k, y_k)$, $j \in \{1, 2, \dots, \sigma\}$ un par de funciones de la siguiente manera:

$$w_0^i(\hat{x}_k, y_k) = \frac{z_i^1 - z_i(\hat{x}_k, y_k)}{z_i^1 - z_i^0}, w_1^i(\hat{x}_k, y_k) = 1 - w_0^i(\hat{x}_k, y_k)$$

$$\omega_0^j(x_k, \hat{x}_k, y_k) = \frac{\xi_j^1 - \xi_j(x_k, \hat{x}_k, y_k)}{\xi_j^1 - \xi_j^0}, \omega_1^j(x_k, \hat{x}_k, y_k) = 1 - \omega_0^j(x_k, \hat{x}_k, y_k)$$

Estas funciones cumplen con la propiedad de suma convexa en $\Omega_x \times \Omega_{\hat{x}}$.

Paso 3: Definir las funciones de ponderación:

$$w_i(z) = \prod_{j=1}^s w_{ij}^j(z_j), \omega_j(\xi) = \prod_{j=1}^\sigma \omega_{ij}^j(\xi_j)$$

con $i \in \{1, 2, \dots, r\}, j \in \{1, 2, \dots, \rho\}, i_j \in \{0, 1\}, r=2^s, \rho=2^r$. Estas funciones también cumplen la propiedad de suma convexa en $\Omega_x \times \Omega_{x^*}$.

Paso 4: Calcular los modelos vértice $E_i = E(y_k)|_{w_i=1}, \#A_{ij} = \#A(x_k, \hat{x}_k)|_{w_i w_j=1}, \#C_{ij} = \#C(x_k, \hat{x}_k)|_{w_i w_j=1}, i \in \{1, 2, \dots, r\}, j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$.

Finalmente, una representación convexa exacta de (4) es:

$$\sum_{i=1}^r w_i(z_j) E_i e_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\rho} w_i(z_k) \omega_j(\xi_k) \left(\bar{A}_{ij} - L(\hat{x}_k, y_k) \bar{C}_{ij} \right) e_k \quad (5)$$

La ganancia del observador no lineal $L(\hat{x}_k, y_k)$ se definirá a más adelante.

Notación: Para las expresiones convexas se utilizará la siguiente notación abreviada: sumas convexas simples $\Upsilon_{w(z_k)} = \sum_{i=1}^r w_i(z_k) \Upsilon_i$ y su inversa $\Upsilon^{-1} w(z_k) = (\sum_{i=1}^r w_i(z_k) \Upsilon_i)^{-1}$, con funciones de ponderación adelantadas $\Upsilon_{w(z_{k+1})} = \sum_{i=1}^r w_i(z_{k+1}) \Upsilon_i$ o dependiendo de variables no disponibles $\Upsilon_{\omega(\zeta_k)} = \sum_{j=1}^{\rho} \omega_j(\zeta_k) \Upsilon_j$, y así sucesivamente. Además, $A > 0$ (< 0) significa que $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ es definida positiva (negativa). Se usará un asterisco (#) en las expresiones matriciales para denotar el elemento simétrico; para expresiones en línea denotará la transpuesta de los términos en su lado izquierdo. Por lo tanto, el sistema (4) se puede escribir como:

$$E_{w(z_k)} e_{k+1} = \left(A_{w(z_k)} - L(\hat{x}_k, y_k) C_{w(z_k)} \right) e_k$$

Los siguientes resultados son útiles para encontrar las condiciones LMI para el diseño de $L(\hat{x}_k, y_k)$. El primero se refiere aun esquema de relajación de sumas convexas tomado de (Tuan et al., 2001); el segundo permite evitar el cálculo de $E^{-1}(y_k)$ agregando variables extras (Estrada-Manzo et al., 2016).

Lema 1. (Tuan et al., 2001) Sean $\Upsilon^{jm}_{il} = (\Upsilon^{im}_{il})^T, (i, l, m) \in \{1, 2, \dots, r\}^3, j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$ matrices de dimensiones adecuadas: entonces $\Upsilon_{w(z_k)w(z_k)w(z_{k+1})\omega(\zeta_k)} < 0$ se cumple si

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^{jm} + \Upsilon_{il}^{jm} + \Upsilon_{li}^{jm} < 0 \quad (6)$$

para todo $(i, l, m) \in \{1, 2, \dots, r\}^3, j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$.

Lema 2. (Oliveira and Skelton, 2001) Sean $x \in \mathbb{R}^n, Q=Q^T \in \mathbb{R}^n \times n, yB \in \mathbb{R}^m \times n, \text{rank}(B) < n$; entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

•

- $\chi^T Q \chi < 0, \forall B \chi = 0, \chi \neq 0.$
- $\exists Z \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + ZB + B^T Z^T < 0.$

A continuación, se ilustrará que (1) facilita el diseño del observador (Estrada-Manzo et al., 2014, 2016).

3. CONDICIONES LMI PARA EL DISEÑO DEL OBSERVADOR

Observador En esta sección se obtienen condiciones LMI para calcular $L(\hat{x}_k, y_k)$. Los desarrollos consideran una función candidata convexa de Lyapunov² similar a (Estrada-Manzo et al., 2014):

$$V(e) = e^T \sum_{i=1}^r w_i(z_k) P_i e_k \quad (7)$$

con $P_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, r\}$; su variación en el tiempo es:

$$\nabla V(e) = e_{k+1}^T P_{w(z_{k+1})} e_{k+1} - e_k^T P_{w(z_k)} e_k$$

que puede expresarse como (sin sustituir la dinámica del error de estimación (4)):

$$\Delta V(e) = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_{w(z_k)} & 0 \\ 0 & P_{w(z_{k+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Note que la función de Lyapunov (7) es convexa y sólo depende de las variables disponibles.

Teorema 1. El origen $e_k=0$ del sistema del error (4) es asintóticamente estable si existen matrices $P_l = P_l^T > 0, N_l$, y G_l tales que las LMIs en (6) se cumplan con

$$\gamma_{il}^{jm} = \begin{bmatrix} -P_l & (*) \\ G_l \bar{A}_{ij} - N_l \bar{C}_{ij} - G_l E_i - E_i^T G_l^T + P_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

para todo $(i, l, m) \in \{1, 2, \dots, r\}^3, j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$. La ganancia no lineal del observador es $L(\hat{x}_k, y_k) = G_{w(z_k)}^{-1} N_{w(z_k)}$. Además, cualquier trayectoria e_k que comience en el nivel más grande de Lyapunov dentro de $\{e: V(e_k) \leq c\} \# \Omega_x \times \Omega_y, c > 0$, tiende a cero a medida que k tiende a infinito.

Demostración 1. Recuerde que el sistema del error (4) puede expresarse de forma exacta y convexa (5); por lo tanto, y considerando Lema 2 y (8), tenemos que $\Delta V(e) < 0$ se cumple bajo la restricción (tomado del error del sistema (4) en su forma convexa)

$$\begin{bmatrix} A_{w(z_k)} \bar{\omega}(\xi_k) - L(\hat{x}_k, y_k) C_{w(z_k)} \bar{\omega}(\xi_k) - E_{w(z_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = 0$$

si lo siguiente se cumple

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{w(z_k)} \bar{\omega}(\xi_k) - L(\hat{x}_k, y_k) C_{w(z_k)} \bar{\omega}(\xi_k) - E_{w(z_k)} \end{bmatrix} + (*) + \begin{bmatrix} -P_{w(z_k)} & 0 \\ 0 & P_{w(z_{k+1})} \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

Por lo tanto, seleccionando $Z_1=0$ y $Z_2=G_{w(z_k)}$ junto con $L(\hat{x}_k, y_k) = G_{w(z_k)}^{-1} N_{w(z_k)}$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -P_{w(z_k)} & (*) \\ \gamma^{(1,2)} & -G_{w(z_k)} E_{w(z_k)} + (*) + P_{w(z_{k+1})} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

con $\Upsilon^{(2,1)} = G_{w(zk)} \# A_{w(zk)\omega(\zeta k)} - N_{w(zk)} \# C_{w(zk)\omega(\zeta k)}$. Por medio del lema de relajación 1, se llega al resultado deseado.

La velocidad de convergencia del observador (3) se puede aumentar si se cumple la siguiente condición $\Delta V(e_k) \leq (\alpha^2 - 1)V(e_k)$, $0 < \alpha \leq 1$ que se puede escribir fácilmente como LMI, es decir, resolver las LMIs (6) con

$$\Upsilon_{il}^{jm} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 P_l & (*) \\ G_l \bar{A}_{ij} - N_l \bar{C}_{ij} & -G_l E_i - E_i^T G_l^T + P_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

Note que la mayoría de los trabajos anteriores no considera funciones de ponderación no medibles (Guerra et al., 2012; Estrada-Manzo et al., 2014, 2016) ni sistemas descriptores de la forma (1) (Guerra et al., 2012; Xie et al., 2015).

En este trabajo, se utiliza una función de Lyapunov convexa como la utilizada en (Guerra and Vermeiren, 2004); si las condiciones de LMI en el Teorema 1 resultan ser demasiadas, se puede reducir su complejidad al “eliminar” algunas funciones de ponderación, ya sea de la función de Lyapunov o de las ganancias del observador (Estrada-Manzo et al., 2016).

4. APLICACIÓN AL PÉNDULO DE FURUTA

El sistema mecatrónico a considerar es el péndulo de Furuta (Furuta et al., 1992), también conocido como péndulo invertido rotatorio; un esquema del mismo se muestra en la figura 1. Las ecuaciones dinámicas se obtendrán utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange $D(q) \# \ddot{q} + C_o(q, \# \dot{q}) \# \dot{q} + G(q) = \tau$, donde q es el vector de coordenadas generalizadas, $D(q)$ es la matriz de inercia, $C_o(q, \# \dot{q})$ es la matriz de Coriolis, $G(q)$ es el vector de gravedad y τ es el vector de torque generalizado. A partir del esquema, tenemos que el brazo del motor tiene una longitud de L_r , un momento de inercia de J_r , y su ángulo, θ , aumenta positivamente cuando gira en sentido antihorario. Al final del brazo giratorio está la barra de péndulo, que tiene una longitud total de L_p y la longitud hasta el centro de masa es $L_p/2$, el momento de inercia en su centro de masa es J_p . El ángulo del péndulo invertido, α , es cero cuando está perfectamente vertical y aumenta positivamente cuando se gira en sentido antihorario.

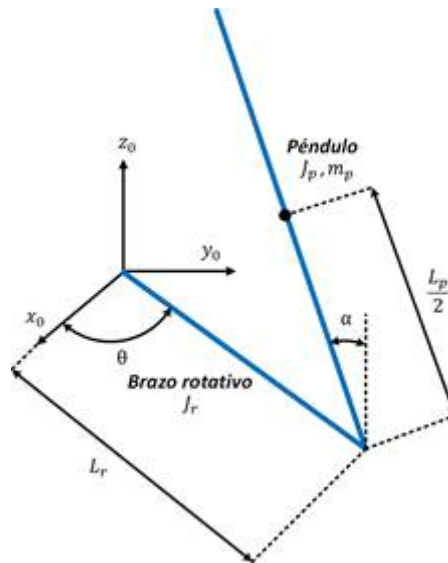


FIGURA 1
 Figura 1: Diagrama del p #endulo de Furuta.

Entonces, las ecuaciones dinámicas en la forma Euler-Lagrange son

$$\begin{bmatrix} \frac{m_p L_p^2 \sin^2 \alpha + (J_r + m_p L_r^2)}{4} & \frac{-m_p L_p L_r \cos \alpha}{2} \\ \frac{-m_p L_p L_r \cos \alpha}{2} & \frac{4J_p + m_p L_p^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-m_p L_p \sin \alpha}{2\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{m_p L_p^2 \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha}{2} & \frac{m_p L_p L_r \dot{\alpha} \sin \alpha}{2} \\ \frac{-m_p L_p^2 \dot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$D(\alpha)$ $G(\alpha)$ $C_o(\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta})$

Se asume que se conocen las posiciones α y θ . Por lo tanto, con la elección de las variables de estado $x_1 = \theta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \dot{\theta}$, y $x_4 = \dot{\alpha}$; los valores de los parámetros son tomados de (Arce et al., 2016): $T_1 = J_r + m_p L_r^2 = 0,0363$, $T_2 = m_p L_p^2 / 4 = 0,0306$, $T_3 = J_p = 0,356$, $T_4 = -m_p L_p L_r / 2 = 0,0260$, $T_5 = m_p L_p / 2 = 0,3829$, $g = 9,8$, se tiene un modelo tipo descriptor en tiempo continuo

$$E(y) \dot{x}(t) = \widetilde{A}(x) x(t) + \widetilde{B} u(t), y(t) = C x(t)$$

cuyas matrices son

$$E(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 + T_2 \sin^2 x_2 & T_4 \cos x_2 \\ 0 & 0 & T_4 \cos x_2 & T_3 + T_4 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\widetilde{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (T_4 x_4 x_2 - 2T_2 x_3 \cos x_2) \sin x_2 \\ 0 & \frac{T_3 g \sin x_2}{x_2} & T_2 x_3 \sin x_2 \cos x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se utilizará la aproximación de Euler para discretizar el sistema: $\#x = (x_{k+1} - x_k) / T_s$ con $T_s = 0,01$ segundos; entonces tenemos:

CONCLUSIÓN

$$E(y_k)x_{k+1} = \underbrace{\left(T_s \tilde{A}(x_k) + E(y_k)\right)}_{A(x_k)} x_k + \underbrace{T_s \tilde{B}}_B u_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (13)$$

con $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_s & 0 \end{bmatrix}^T$ y

$$A(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T_s \\ 0 & 0 & T_1 + T_2 \sin^2 x_2 & T_4 \cos x_2 + T_s T_4 x_4 \sin x_2 - 2T_s T_2 x_3 \sin x_2 \cos x_2 \\ 0 & \frac{T_s T_5 g \sin x_2}{x_2} & T_s T_2 x_3 \cos x_2 \sin x_2 + T_4 \cos x_2 & T_3 + T_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

De este modo, siguiendo la metodología de (Quintana et al.,2020), la dinámica del error esta dada por,

$$E(y_k)e_{k+1} = A(x_k)x_k - A(\hat{x}_k, y_k)\hat{x}_k - L(\hat{x}_k, y_k)(y_k - \hat{y}_k);$$

al considerar las señales medidas y_k , se tiene lo siguiente

$$E(y_k)e_{k+1} = \begin{bmatrix} e_1 + T_s e_3 \\ e_2 + T_s e_4 \\ T_2 e_3 \sin^2 x_2 - 2T_s T_2 (x_3 x_4 - \hat{x}_3 \hat{x}_4) \sin x_2 \cos x_2 + T_4 e_4 \cos x_2 + T_4 T_s (x_4^2 - \hat{x}_4^2) \sin x_2 + T_1 e_3 \\ T_s T_2 (x_3^2 - \hat{x}_3^2) \cos x_2 \sin x_2 + T_4 e_3 \cos x_2 + (T_3 + T_4) e_4 \end{bmatrix} - L(\hat{x}_k, y_k) C e_k.$$

A través de manipulaciones algebraicas, se puede escribir lo siguiente

$$\begin{aligned}
 x_3^2 - \hat{x}_3^2 &= (x_3 + \hat{x}_3)(x_3 - \hat{x}_3) \\
 x_4^2 - \hat{x}_4^2 &= (x_4 + \hat{x}_4)(x_4 - \hat{x}_4) \\
 x_3x_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5(x_4 + \hat{x}_4) & 0,5(x_3 + \hat{x}_3) \end{bmatrix} e_k
 \end{aligned}$$

finalmente tenemos un sistema del error:

$$E(y_k)e_{k+1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T_s \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & T_3 + T_4 \end{bmatrix} - L(\hat{x}_k, y_k)\bar{C} \right) e_k. \quad (14)$$

(14)

con #C=Cy

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{33} &= T_1 + T_2 \sin^2 x_2 - T_s T_2 (x_4 + \hat{x}_4) \sin x_2 \cos x_2 \\
 \bar{A}_{34} &= T_4 \cos x_2 + T_s T_4 (x_4 + \hat{x}_4) \sin x_2 \\
 &\quad - T_s T_2 (x_3 + \hat{x}_3) \sin x_2 \cos x_2 \\
 \bar{A}_{43} &= T_4 \cos x_2 + T_s T_2 (x_3 + \hat{x}_3) \cos x_2 \sin x_2.
 \end{aligned}$$

Para escribir (14) en forma convexa (5), se consideran los con-juntos compactos $\Omega_x = \{|x_2| \leq \pi/4, |x_3| \leq 10, |x_4| \leq 3\}$ y $\Omega^x = \{|\hat{x}_3| \leq 10, |\hat{x}_4| \leq 3\}$. Por lo tanto los términos noconstantes se pueden acotar como $z_1 = \sin^2 x_2 \in [0, 0, 5]$, $z_2 = \cos x_2 \in [0, 7071, 1]$, $z_3 = \sin x_2 \in [-0,7071, 0,7070]$, $z_4 = \hat{x}_3 \in [-10, 10]$, $z_5 = \hat{x}_4 \in [-3, 3]$, $\zeta_1 = x_3 \in [-10, 10]$ y $\zeta_2 = x_4 \in [-3, 3]$. Entonces, las funciones convexas se construyen como en la sección 2.1. Algunos de los vértices son:

$$\begin{aligned}
 E_1 = \dots = E_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0363 & 0,0184 \\ 0 & 0 & 0,0184 & 0,3820 \end{bmatrix} \\
 E_9 = \dots = E_{16} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0363 & 0,0260 \\ 0 & 0 & 0,0260 & 0,3820 \end{bmatrix} \\
 E_{17} = \dots = E_{24} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0516 & 0,0184 \\ 0 & 0 & 0,0184 & 0,3820 \end{bmatrix} \\
 E_{25} = \dots = E_{32} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0516 & 0,0260 \\ 0 & 0 & 0,0260 & 0,3820 \end{bmatrix} \\
 \\
 A_{1,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0354 & 0,0164 \\ 0 & 0 & 0,0214 & 0,3820 \end{bmatrix} & A_{6,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0363 & 0,0214 \\ 0 & 0 & 0,0153 & 0,3820 \end{bmatrix} \\
 A_{10,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0376 & 0,0206 \\ 0 & 0 & 0,0303 & 0,3820 \end{bmatrix} & A_{32,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0503 & 0,0271 \\ 0 & 0 & 0,0260 & 0,3820 \end{bmatrix} \\
 A_{21,3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0525 & 0,0173 \\ 0 & 0 & 0,0184 & 0,3820 \end{bmatrix} & A_{31,4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,0516 & 0,0184 \\ 0 & 0 & 0,0184 & 0,3820 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Las condiciones LMI del Teorema 1, con una tasa de decaimiento $\alpha=0,75$ y estableciendo $P_{w(zk)}=P$, fueron implementadas en YALMIP (Lofberg, 2004) junto con el solver SeDuMi (Sturm, 1999) para MATLAB2019b. Las condiciones resultan factibles, algunas de las ganancias obtenidas son:

$$\begin{aligned}
 N_1 = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5858 & -0,0065 \\ 0,0074 & 0,8255 \\ -0,0057 & -0,0001 \\ -0,0001 & -0,0083 \end{bmatrix} & N_{11} = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5907 & -0,0144 \\ 0,0146 & 0,8255 \\ -0,0059 & 0,0001 \\ -0,0007 & -0,0083 \end{bmatrix} \\
 \check{v}_{24} = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5709 & -0,0049 \\ 0,0081 & 0,8268 \\ -0,0045 & -0,0002 \\ -0,0002 & -0,0083 \end{bmatrix} & N_{32} = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5700 & -0,0220 \\ 0,0250 & 0,8257 \\ -0,0046 & -0,0000 \\ -0,0002 & -0,0083 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_3 = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5781 & 0,0009 & -0,1527 & 0,0082 \\ 0,0015 & 0,8246 & 0,0092 & -0,0221 \\ -0,0154 & -0,0004 & 0,0121 & -0,0006 \\ -0,0009 & -0,0266 & -0,0005 & 0,0022 \end{bmatrix} \\
 G_7 = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5763 & -0,0060 & -0,1501 & 0,0067 \\ 0,0083 & 0,8252 & 0,0091 & -0,0220 \\ -0,0155 & -0,0004 & 0,0119 & -0,0004 \\ -0,0004 & -0,0266 & -0,0005 & 0,0022 \end{bmatrix} \\
 G_{15} = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5787 & -0,0230 & -0,1513 & 0,0095 \\ 0,0253 & 0,8246 & 0,0094 & -0,0222 \\ -0,0156 & -0,0002 & 0,0118 & -0,0006 \\ -0,0004 & -0,0266 & -0,0006 & 0,0022 \end{bmatrix} \\
 G_{28} = 1 \times 10^{-3} & \begin{bmatrix} 0,5778 & -0,0131 & -0,1152 & 0,0090 \\ 0,0152 & 0,8237 & 0,0072 & -0,0221 \\ -0,0157 & -0,0002 & 0,0091 & -0,0006 \\ -0,0009 & -0,0265 & -0,0006 & 0,0022 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 2 y 3 para las condiciones iniciales $x_k(0)=[0,0,08,0,0]^T$ y $\hat{x}_k(0)=0$; la entrada es $u_k=\sin(k)$; se puede ver que los estados x_3 y x_4 son estimados. En la Figura 4 se muestra la evolución de la función Lyapunov.

Note que los enfoques (Bergsten and Driankov, 2002; Ichalal et al., 2008; Guerra et al., 2018; Ichalal et al., 2018) no se pueden aplicar puesto que son para sistemas en tiempo continuo y en forma estándar; el trabajo de Estrada-Manzo et al. (2016) tampoco puede ser utilizado porque a pesar de considerar sistemas descriptores en tiempo discreto, sólo toma en cuenta funciones de ponderación medibles. Más aún, note que el sistema (13) también se puede escribir en forma estándar (2), sin embargo la dificultad para calcular un sistema del error habría incrementado así como la cantidad de términos no constantes.

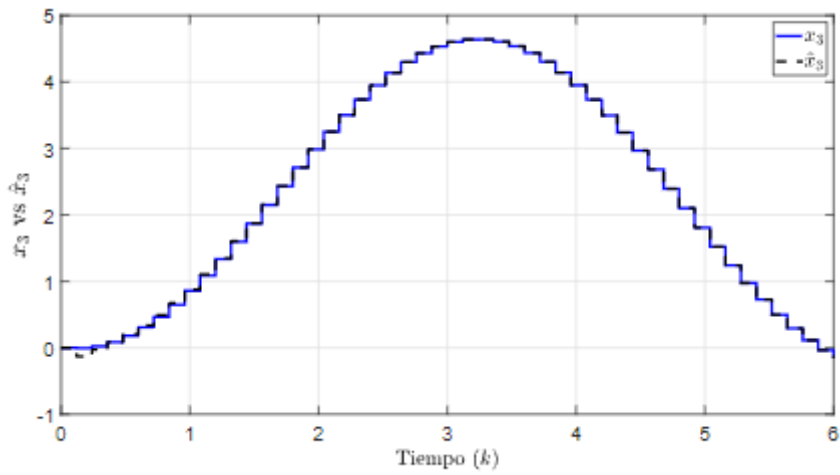


FIGURA 2:
 Figura 2: Resultados de simulación del estado x_3 y su estimación.

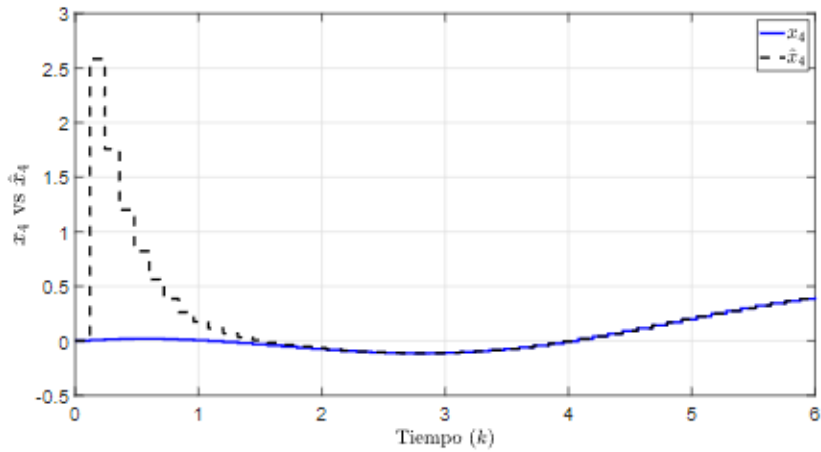


FIGURA 3:
 Figura 3: Resultados de simulación del estado x_4 y su estimación.

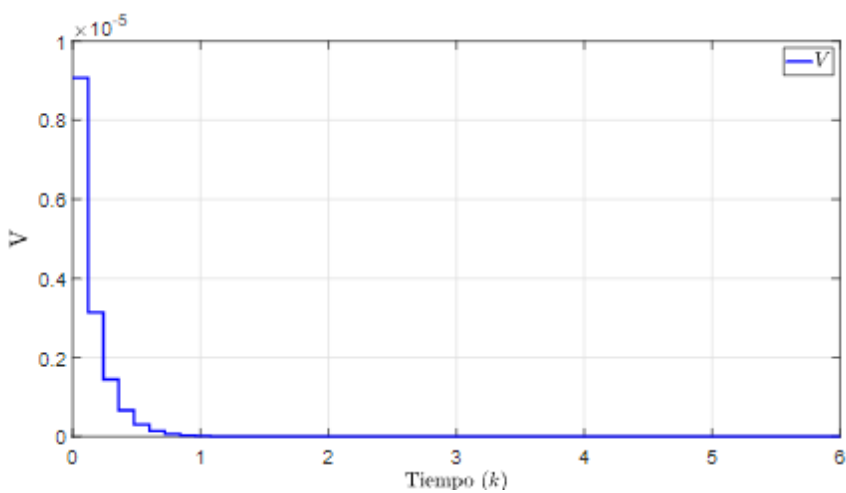


FIGURA 4:
 Figura 4: Función de Lyapunov.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se ha presentado una metodología novedosa para resolver el problema de observación de sistemas descriptores no lineal en tiempo discreto. La metodología comienza por factorizar la señal del error sin necesidad de utilizar estimaciones u cotas de Lipschitz. Una vez que se tiene un sistema del error adecuado, se reescribe en forma convexa y exacta separando las variables disponibles y no disponibles; así la ganancia del observador utiliza todas las señales disponibles. El observador diseñado por medio de las condiciones LMI encontradas, se han probado en el péndulo de Furuta. Como trabajo futuro se pretende utilizar el observador para la estimación de entradas desconocidas y la detección de fallas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo de CONACYT a través de la beca número 930683, al laboratorio LANAVEX de la Universidad Politécnica de Pachuca y al proyecto ITSON-PROFAPI CA-18

REFERENCIAS

- Arceo, J., Sánchez, M., Estrada-Manzo, V., and Bernal, M. (2018). Convex stability analysis of nonlinear singular systems via linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(4):1740–1745.
- Arceo, J. C., Vázquez, D., Estrada-Manzo, V., Márquez, R., and Bernal, M. (2016). Nonlinear convex control of the Furuta pendulum based on its descriptor model. In *2016 13th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–6. IEEE.
- Bergsten, P. and Driankov, D. (2002). Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 32(1):114–121.
- Bernal, M. and Guerra, T. M. (2010). Generalized non-quadratic stability of continuous-time Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(4):815–822.
- Besancón, G. (2003). High-gain observation with disturbance attenuation and application to robust fault detection. *Automatica*, 39(6):1095–1102.
- Boizot, N., Busvelle, E., and Gauthier, J.-P. (2010). An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46(9):1483–1488.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15. SIAM: Studies In Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
- Campos, V., Souza, F., Torres, L., and Palhares, R. (2013). New stability conditions based on piecewise fuzzy Lyapunov functions and tensor product transformations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(4):748–760.
- Chadli, M. and Karimi, H. R. (2012). Robust observer design for unknown inputs Takagi-Sugeno models. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 21(1):158–164.
- Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355–359.
- Dai, L. (1989). *Singular control systems*, volume 118. Springer.
- Di Franco, P., Scarciotti, G., and Astolfi, A. (2020). A globally stable algorithm for the integration of high-index differential-algebraic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(5):2107–2122.
- Ding, B. (2010). Homogeneous polynomially nonquadratic stabilization of discrete-time Takagi-Sugeno systems via nonparallel distributed compensation law. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 18(5):994–1000.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z., and Guerra, T. M. (2014). Discrete-time Takagi-Sugeno descriptor models: observer design. In *Proceedings of the IFAC 19th World Congress*, pages 7965–7969.

- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z., and Guerra, T. M. (2016). Generalized LMI observer design for discrete-time nonlinear descriptor models. *Neurocomputing*, 182:210–220.
- Frank, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: A survey and some new results. *Automatica*, 26(3):459–474.
- Furuta, K., Yamakita, M., and Kobayashi, S. (1992). Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 206(4):263–269.
- González, T., Bernal, M., Sala, A., and Aguiar, B. (2016). Cancellation-based nonquadratic controller design for nonlinear systems via Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(9):2628–2638.
- Guan, Y. and Saif, M. (1991). A novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):632–635.
- Guerra, T., Márquez, R., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2018). .. LMI-based observer design for nonlinear systems via Takagi–Sugeno models with unmeasured premise variables. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 26(3):1498–
- Guerra, T. M., Kerkeni, H., Lauber, J., and Vermeiren, L. (2012). An efficient Lyapunov function for discrete T-S models: Observer design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):187–192.
- Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5):823–829.
- Ichalal, D., Marx, B., Mammar, S., Maquin, D., and Ragot, J. (2018). How to cope with unmeasurable premise variables in Takagi–Sugeno observer design: dynamic extension approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67:430–435.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2008). Design of observers for Takagi–Sugeno systems with immeasurable premise variables: an L2 approach. In 17th IFAC World Congress, pages 2768–2773, Seoul, Korea.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2010). State estimation of Takagi–Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory & Applications*, 4(5):897–908.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, NJ, USA, 3 edition.
- Kruszewski, A., Wang, R., and Guerra, T. M. (2008). Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models: a new approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2):606–611.
- Lee, D. H. and Kim, D. W. (2014). Relaxed LMI conditions for local stability and local stabilization of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 44(3):394–405.
- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and De-Schutter, B. (2010). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi–Sugeno Fuzzy Models*. Springer-Verlag, Netherlands.
- Lewis, F., Dawson, D., and Abdallah, C. (2003). *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press.
- Lofberg, J. (2004). YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, pages 284–289.
- Lopez-Estrada, F.-R., Astorga-Zaragoza, C.-M., Theilliol, D., Ponsart, J. C., Valencia-Palomo, G., and Torres, L. (2017). Observer synthesis for a class of Takagi–Sugeno descriptor system with unmeasurable premise variable. application to fault diagnosis. *International Journal of Systems Science*, 48(16):3419–3430.
- Lor’ia, A., Panteley, E., and Zavala, A. (2009). Adaptive observers with persistence of excitation for synchronization of chaotic systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 56(12):2703–2716.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 16:596–602.
- Noh, D., Jo, N. H., and Seo, J. H. (2004). Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(10):1746–1753.
- Ogata, K. (2001). *Modern control engineering*. Prentice Hall PTR, NJ, USA.
- Oh, S. and Khalil, H. K. (1997). Nonlinear output-feedback tracking using high-gain observer and variable structure control. *Automatica*, 33(10):1845–1856.

- Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. In Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, volume 1, pages 127–132.
- Oliveira, M. and Skelton, R. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In Perspectives in robust control, volume 268 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 241–257. Springer-Verlag, Berlin.
- Quintana, D., Estrada-Manzo, V., and Bernal, M. (2020). An exact handling of the gradient for overcoming persistent problems in nonlinear observer design via convex optimization techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, (In press).
- Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):397–401.
- Sala, A., Pitarch, J. L., Bernal, M., Jaadari, A., and Guerra, T. M. (2011). Fuzzy polynomial observers. In Proceedings of the 18th IFAC World Congress, pages 12772–12776.
- Scherer, C. (2004). *Linear Matrix Inequalities in Control Theory*. Delf University, Delf, The Netherlands.
- Spurgeon, S. K. (2008). Sliding mode observers: a survey. *International Journal of Systems Science*, 39(8):751–764.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1):116–132.
- Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4):582–589.
- Tanaka, K. and Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, New York.
- Tuan, H., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2):324–332.
- Xie, X.-P., Yue, D., and Peng, C. (2015). Observer design of discrete-time T-S fuzzy systems via multi-instant augmented multi-indexed matrix approach. *Journal of the Franklin Institute*, 352(7):2899–2919