

## Estabilización práctica de un helicóptero de 3-GDL empleando una ley de control con retardo

Barrera-González, I.; Villafuerte-Segura, R.; Ochoa-Ortega, G.

**I. Barrera-González**

Instituto Tecnológico del Occidente del Estado de Hidalgo, México

**R. Villafuerte-Segura**

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

**G. Ochoa-Ortega**

Universidad Politécnica del Valle de México, México

**Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI**

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

ISSN-e: 2007-6363

Periodicidad: Semestral

vol. 8, núm. 16, 98-106, 2021

sitioweb@uaeh.edu.mx

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/595/5953116011/>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

**Resumen:** Comúnmente, en el diseño y sintonización de leyes de control para aplicaciones fuera del ámbito académico, se suelen emplear criterios relacionados con la teoría de Lyapunov. Sin embargo, en algunas ocasiones este tipo de criterios no son los más convenientes, debido principalmente a la existencia de algunas dinámicas no modeladas de los sistemas bajo estudio. En este artículo se presenta un análisis riguroso para determinar la estabilización práctica de una clase de sistemas no lineales con dinámicas inciertas empleando funcionales de Lyapunov-Krasovskii que incluyen términos exponenciales. Derivado de este análisis, se establecen condiciones suficientes de estabilidad práctica dadas por desigualdades lineales matriciales (LMIs, por sus siglas en inglés), las cuales se emplean para el diseño y sintonización de leyes de control que cuentan con una acción retardada y una acción integral, con las cuales, se busca la atenuación del ruido y la reducción del error en estado estacionario. Para ilustrar la efectividad y aplicabilidad de los resultados obtenidos, se presentan simulaciones y experimentos sobre un helicóptero de tres grados de libertad (3-GDL).

**Palabras clave:** Estabilidad práctica, sistemas con retardos, desigualdades lineales matriciales, helicóptero 3-GDL.

**Abstract:** Commonly, in the design and tuning of control laws for applications outside the academic field, the conventional criteria is related with the Lyapunov theory. However, sometimes these approaches are not the most convenient, mainly due to the existence of unmodeled dynamics and its influence on the stability of the system. In this article an analysis is presented to determine the practical stabilization of a class of nonlinear systems with uncertain dynamics using Lyapunov-Krasovskii functionals with exponential terms. Derived from this analysis, sufficient conditions of practical stability are determined using linear matrix inequalities (LMIs), which are used for the design and tuning of control laws with delayed and integral actions. The inclusion of these actions aim to attenuate the presence of noise and to reduce the steady-state error. To show the effectiveness and applicability of the theoretical results, simulations and experiments on a helicopter of three degrees of freedom (3-DOF) are presented.

**Keywords:** Practical stabilization, time delay systems, linear matrix inequality, 3-DOF helicopter..

## 1. INTRODUCCIÓN

En el marco de la teoría de control, algunos de los temas de mayor relevancia para la comunidad científica son los relacionados con el análisis de estabilidad y estabilización de sistemas, donde, la teoría de Lyapunov juega un papel fundamental, ya que es empleada para la obtención de propiedades tanto cuantitativas como cualitativas de sistemas lineales y no lineales. Sin embargo, la presencia de ciertas dinámicas difíciles de modelar, como perturbaciones, cambios de carga, variación en los parámetros, errores de medición, presencia de ruido, incertidumbres, entre otras, pueden ocasionar que conceptos tradicionales de estabilidad y estabilización no suelen ser satisfechos por sistemas reales (plataformas experimentales). Esto debido principalmente a que los conceptos tradicionales pueden ser muy demandantes y/o poco adecuados para aplicaciones prácticas. Por ejemplo, el concepto clásico de Lyapunov aplicado a un vehículos aéreos no tripulado (VANT), demandaría a las trayectorias del sistema a permanecer “lo suficientemente cercanas” (vecindad arbitraria  $\epsilon > 0$ ) al punto de operación antes de declararlo estable, sin embargo en la práctica es casi seguro y muy aceptado por la comunidad científica, observar que las trayectorias del VANT “solo se encuentren cercanas” al punto de operación para decir que es estable, esto sin duda incumple con el concepto clásico y estricto de estabilidad. En otras palabras, en aplicaciones experimentales las trayectorias no suelen satisfacer estrictamente los conceptos teóricos de estabilidad o estabilización clásica, pero el desempeño de sus dinámicas suele considerarse como aceptable o adecuado, siempre y cuando no se aleje “demasiado” del punto de consigna. Por lo anteriormente expuesto, parece razonable emplear conceptos alternos de estabilidad que correlacionen más apropiadamente la teoría y la práctica. Uno de estos conceptos es el concepto conocido como estabilidad práctica introducido en (La Salle, 1976), este concepto es más relajado que el concepto clásico de Lyapunov, ya que propone declarar a un sistema  $\mu$ -prácticamente estable si sus trayectorias se encuentran dentro de una vecindad fija  $\mu > 0$  del punto de operación, a partir de un tiempo fijo  $T > 0$ . Posteriormente, en (Lakshmikantham et al., 1990) se realiza un estudio detallado de este concepto.

Por otro lado, el modelado matemático de sistemas dinámicos se propone por lo general, suponiendo que el estado depende únicamente del estado actual y por lo tanto son descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, existen sistemas en los cuales esta suposición no es suficiente, ya que la evolución de sus dinámicas, además de depender del estado actual, dependen de información pasada. Esta clase de sistemas son descritos por ecuaciones diferenciales funcionales y son comúnmente llamados sistemas con retardo. Estos sistemas aparecen en distintas áreas de las ciencias como la biología, economía, sistemas mecánicos, flujo vehicular, entre otros. Para más detalles ver (Sipahi et al., 2011).

Si bien el concepto de estabilidad práctica fue inicialmente propuesto para sistemas libres de retardo, este se ha extendido a sistemas con retardos. Entre las contribuciones más importantes se pueden mencionar los resultados propuestos en (Nenadic et al., 1997). Aquí, se realiza un análisis basado en la matriz fundamental para sistemas con un retardo. Posteriormente, en (Debeljkovic et al., 2000) se estudia una clase de sistemas lineales no autónomos. Mientras que en (Guang-Di and Guang-Da, 2001), se emplean funcionales de Lyapunov-Krasovskii para estudiar una clase de sistemas con retardo de tipo neutral. En (Villafuerte et al., 2011), se introduce la definición de estabilidad práctica para una clase general de sistemas con retardo y se establecen condiciones suficientes de estabilidad práctica empleando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii, las cuales, están dadas por condiciones de factibilidad de un conjunto de LMIs, derivadas de funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

Desafortunadamente, este concepto ha sido poco atendido por la comunidad científica. Es por esto que en el presente trabajo se presenta un análisis en el marco temporal empleando funcionales de Lyapunov-Krasovskii, que incluyen términos exponenciales, con las cuales se busca la estabilización práctica de una clase de sistemas no lineales con retardos. Este análisis permite obtener condiciones suficientes, vía desigualdades lineales matriciales, para el diseño y la sintonización de leyes de control que incluyen un término retardado y una acción integral, (Boyd et al., 1994), las cuales tienen como objetivo la atenuación de ruido (Mondie

et al., 2011) y la reducción del error en estado estacionario (Åström and Hägglund, 2009), mientras que los términos exponenciales en la funcional garantizan una cota de decaimiento de la respuesta del sistema en lazo cerrado (Mondie and Kharitonov, 2005). Para ilustrar la efectividad y el campo de aplicación de los resultados teóricos propuestos, se presenta la simulación numérica de vuelo de un modelo matemático de un helicóptero de 3-GDL ante perturbaciones aéreas (Tischler and Remple, 2006) y la posterior implementación en un prototipo experimental desarrollado por Quanser, (QUANSER, 2020).

El presente documento se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 se presentan algunos conceptos básicos relacionados con la estabilidad práctica de sistemas con retardos, los cuales son necesarios para el desarrollo de la investigación propuesta. En la Sección 3 se dan los resultados principales para el diseño y sintonización de una ley de control con acciones retardada e integral. La implementación de los resultados teóricos propuestos son dados en la Sección 4. Aquí, se presentan simulaciones de un modelo matemático no lineal de un helicóptero de 3-GDL con perturbaciones de barrido de frecuencia automático, además de ratificar los resultados en una plataforma experimental. Por último, en la Sección 5 se dan las conclusiones y observaciones de los resultados teóricos y las implementaciones presentadas en la presente investigación.

## 2. RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se introducirán los conceptos básicos relacionados con la estabilidad práctica.

Considere un sistema con retardo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta) \quad \theta \in [-h, 0],\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $f: [-h, \infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función suave que satisface la condición de Lichitz respecto a su segundo argumento,  $x(t, \varphi) \in \mathbb{R}^n$  es la solución del sistema con una función inicial  $\varphi$ ,  $x_t(\varphi)$  es el estado del sistema definido como el segmento:  $\{x(t + \theta, \varphi) \mid \theta \in [-h, 0], \mathbb{R}^n\}$  y  $\varphi$  es una función continua en el espacio de Banach  $C := C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  con norma  $\|\varphi\|_C := \max_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana. La estabilidad del sistema (1) típicamente es determinada empleando el siguiente concepto clásico de Lyapunov.

**Definición 1.** Gu et al. (2003) La solución trivial del sistema (1) se dice estable en el sentido de Lyapunov, si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta := \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\|\varphi\|_C < \delta$  implica  $\|x(t, \varphi)\| < \epsilon$

Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, este concepto suele ser demandante para aplicaciones prácticas. Ya que en este caso la vecindad de convergencia de las trayectorias es arbitraria (para todo  $\epsilon > 0$ ). Esta condición puede ser relajada si se pide la convergencia solo para algún  $\mu > 0$ , como se muestra a continuación.

**Definición 2.** (Villafuerte et al., 2011) La solución trivial del sistema (1) se dice  $\mu$ -prácticamente estable, si para algún  $\mu > 0$ , existe  $T = T(\mu, \varphi)$  tal que  $\|x(t, \varphi)\| \leq \mu$  para  $t \geq T$ .

Este concepto de estabilidad práctica, también suele denominarse como última cotado (ultimate boundedness) Corless and Leitmann (1981).

**Lema 1.** (Villafuerte et al., 2011) Dado un sistema con retardo de la forma (1). Entonces, si existe una funcional  $v(t, x_t)$  definida como  $v: \mathbb{R}^+ \times C \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\alpha_1 \|x(t)\|^2 \leq v(t, x_t) \leq \alpha_2 \|x_t\|_h^2,\tag{2}$$

y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\frac{d}{dt}v(t, x_t) \leq -2\sigma v(t, x_t) + \kappa \sqrt{v(t, x_t)}, \quad (3)$$

para constantes positivas  $\alpha_1, \alpha_2, \sigma$  y  $\kappa$ ; entonces la solución del sistema satisface, para una condición inicial  $\varphi$ , satisface

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h + \frac{\kappa}{2\sigma \sqrt{\alpha_1}} (1 - e^{-\sigma t}). \quad (4)$$

por lo cual el sistema (1) es  $\mu$ -prácticamente estable, con

$$\mu > \frac{1}{2\sigma \sqrt{\alpha_1}}$$

y

$$T = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\varphi\|_h \leq \frac{\kappa}{2\sigma \sqrt{\alpha_2}}; \\ \frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{2\sigma \sqrt{\alpha_2} \|\varphi\|_h - \kappa}{2\sigma \sqrt{\alpha_1} \mu - \kappa} \right), & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5)$$

## 2.1. Estabilidad Práctica de Sistemas con un Retardo

En esta sección se obtienen condiciones suficientes de estabilidad práctica para sistemas lineales con un solo retardo.

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \eta(t), \quad (6)$$

donde  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $h \geq 0$  es el retardo,  $\eta(t) \in \mathbb{R}^n$  es una perturbación externa que satisface  $\|\eta(t)\| \leq \gamma$ ,  $t \geq 0$  y se considera que la función inicial es  $\varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ .

Teorema 1. (Villafuerte et al., 2011) Suponga que existe  $\sigma > 0$  y las matrices definidas positivas  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces si la desigualdad

$$\mathcal{M}(Q_0, Q_1) + 2\sigma \mathcal{N}(Q_0) < 0. \quad (7)$$

se mantiene, entonces se dice que el sistema (6) es  $\mu$ -prácticamente estable con

$$\mu > \frac{\gamma \lambda_{\max}(Q_0^{-1})}{\sigma \lambda_{\min}(Q_0^{-1})}, \quad (8)$$

y

$$T = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\varphi\|_h \leq \frac{\gamma \lambda_{\max}(P)}{\sigma \sqrt{\lambda_{\min}(P)[\lambda_{\max}(P) + h \lambda_{\max}(Q)]}}; \\ \frac{1}{\sigma} \ln(\Phi), & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (9)$$

Donde  $\lambda_{\max}(P) \in \mathbb{R}^+$  y  $\lambda_{\min}(P) \in \mathbb{R}^+$  son los valores propios máximo y mínimo de la matriz P, respectivamente,  $\Phi = \frac{\sigma \sqrt{\lambda_{\min}(P)[\lambda_{\max}(P) + h \lambda_{\max}(Q)]}}{\sigma \sqrt{\lambda_{\min}(P)[\lambda_{\max}(P) + h \lambda_{\max}(Q)]} - \gamma \lambda_{\max}(P)}$ .

Las matrices  $M(P, Q)$  y  $N(P)$  se definen de la siguiente forma

$$M(P, Q) = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T P + Q & PA_1 \\ A_1^T P & -e^{-2\sigma h} Q \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$N(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Además, la solución del sistema (6) satisface

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P) + h \lambda_{\max}(Q)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h + \frac{\gamma \lambda_{\max}(P)}{\sigma \lambda_{\min}(P)} (1 - e^{-\sigma t}). \quad (12)$$

### 3. DISEÑO Y SINTONIZACIÓN DE LA LEY DE CONTROL

En esta sección se presentan los resultados principales del trabajo, en donde se propone el diseño y la sintonización de una ley de control retardada con acción integral para reducir el ruido de la medición, el error en estado estacionario y estabilizar prácticamente el sistema con una cota de decaimiento asegurada. Estos resultados son una reformulación del Corolario 3 presentado en (Villafuerte et al., 2011) y utilizando una ley de control con acciones retarda e integral.

Considere un sistema no lineal, invariante en el tiempo y libre de retardos de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \eta(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{13}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salida. Demás,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Proposición 1. Suponga que existen matrices positivas definidas  $Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ , matrices  $Y_0, Y_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ , un retardo  $h > 0$  y una constante  $\sigma > 0$ , tales que la siguiente desigualdad lineal matricial es satisfecha

$$\mathcal{M}(Q_0, Q_1) + 2\sigma \mathcal{N}(Q_0) < 0.\tag{14}$$

Entonces la ley de control retardada con acción integral de salida dada por

$$\begin{aligned}u(t) &= K_p x(t) + K_i \int_0^t y(\theta) d\theta + K_{p_h} x(t-h) + K_{i_h} \int_0^t y(\theta-h) d\theta \\ &= Y_0 Q_0^{-1} z(t) + Y_1 Q_0^{-1} z(t-h),\end{aligned}\tag{15}$$

estabiliza  $\mu$ -prácticamente al sistema (13) con

$$\mu > \frac{\gamma \lambda_{\max}(Q_0^{-1})}{\sigma \lambda_{\min}(Q_0^{-1})},\tag{16}$$

$$T = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\varphi\|_h \leq c_1 \\ \frac{1}{\sigma} \ln(c_2), & \text{en otro caso.} \end{cases}\tag{17}$$

Aquí,  $z(t) = [x(t), \int_0^t y(\theta)d\theta]^T \in \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $z(t-h) = [x(t-h), \int_0^t y(\theta-h)d\theta]^T \in \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $Y_0 Q_0^{-1} = [K_p, K_i] \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $Y_1 Q_0^{-1} = [K_{p_h}, K_{i_h}] \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ;

$$\mathcal{M}(Q_0, Q_1) = \begin{bmatrix} \hat{A}Q_0 + \hat{B}Y_0 + Q_0\hat{A}^T + Y_0^T\hat{B}^T + Q_1 & \hat{B}Y_1 \\ Y_1^T\hat{B}^T & -e^{-2\sigma h}Q_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}(Q_0) = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0^{n \times p} \\ C & 0^{p \times p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0^{p \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m},$$

$$\hat{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ 0^p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p)}. \text{ Además,}$$

$$c_1 = \frac{\gamma \lambda_{\max}(Q_0^{-1})}{\sigma \sqrt{\lambda_{\min}(Q_0^{-1})[\lambda_{\max}(Q_0^{-1}) + h\lambda_{\max}(Q_0^{-1}Q_1Q_0^{-1})]}}$$

$$c_2 = \frac{\alpha_1 \sigma \|\varphi\|_h - \gamma \lambda_{\max}(Q_0^{-1})}{\sigma \mu \lambda_{\min}(Q_0^{-1}) - \gamma \lambda_{\max}(Q_0^{-1})},$$

$$\text{y } \alpha_1 = \sqrt{\lambda_{\min}(Q_0^{-1})[\lambda_{\max}(Q_0^{-1}) + h\lambda_{\max}(Q_0^{-1}Q_1Q_0^{-1})]}.$$

Más aun, la solución  $x(t, \varphi)$  del sistema (13) satisface

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(Q_0^{-1}) + h\lambda_{\max}(Q_0^{-1}Q_1Q_0^{-1})}}{\sqrt{\lambda_{\min}(Q_0^{-1})}} e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h$$

$$+ \frac{\gamma \lambda_{\max}(Q_0^{-1})}{\sigma \lambda_{\min}(Q_0^{-1})} (1 - e^{-\sigma t}), \quad \forall t \geq 0.$$

(18)

Demostración 1. Considere la ley de control dada en (15),

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p x(t) + K_i \int_0^t y(\theta) d\theta + K_{p_h} x(t-h) + K_{i_h} \int_0^t y(\theta-h) d\theta \\ &= K_{pi} z(t) + K_{pi_h} z(t-h), \end{aligned}$$

$$\text{donde } K_{pi} = [K_p, K_i], \quad K_{pi_h} = [K_{p_h}, K_{i_h}], \quad z(t) = [x(t), \int_0^t y(\theta) d\theta]^T, \text{ observe que}$$

$$\begin{aligned} z(t-h) &= [x(t-h), \int_{-h}^{t-h} y(\theta) d\theta]^T \\ &= [x(t-h), \int_0^t y(\theta-h) d\theta]^T. \end{aligned}$$

Así, la representación del espacio de estado extendido,  $z(t)$  y  $z(t-h)$ , del sistema (13) en lazo cerrado con la ley de control (15), toma la forma

$$\dot{z}(t) = (\hat{A} + \hat{B}K_{pi})z(t) + \hat{B}K_{pi_h}z(t-h) + \hat{\eta}(t), \quad (19)$$

donde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0^{n \times p} \\ C & 0^{p \times p} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0^{p \times m} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ 0^{p \times 1} \end{bmatrix},$$

$$K_{pi} = [K_p \quad K_i] \quad \text{y} \quad K_{pi_h} = [K_{p_h} \quad K_{i_h}].$$

Seguendo el Teorema 1 que establece que si existen matrices definidas positivas  $P, Q \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ , un retardo  $h > 0$  y una constante  $\sigma > 0$  tal que

$$M(P, Q) + 2\sigma N(P) < 0, \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} M(P, Q) &= \begin{bmatrix} P(\hat{A} + \hat{B}K_{pi}) + (\hat{A} + \hat{B}K_{pi})^T P + Q & P\hat{B}K_{pi_h} \\ K_{pi_h}^T \hat{B}^T P & -e^{-2\sigma h} Q \end{bmatrix}, \\ N(P) &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces se asegura que el sistema (19) es  $\mu$ -prácticamente estable. Por otro lado, para obtener la sintonización de las ganancias del controlador propuesto, se pre-multiplica y pos-multiplica por la matriz  $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  la desigualdad lineal matricial (20), donde, definiendo  $Q_0 = P^{-1}$ ,  $Q_1 = P^{-1}QP^{-1}$ ,  $Y_0 = K_{pi}P^{-1}$  y  $Y_1 = K_{pi_h}P^{-1}$ , se obtiene

$$\mathcal{M}(Q_0, Q_1) + 2\sigma \mathcal{N}(Q_0) < 0,$$

con

$$\mathcal{M}(Q_0, Q_1) = \begin{bmatrix} P^{-1}(\hat{A} + \hat{B}Y_0) + (\hat{A} + \hat{B}Y_0)^T P^{-1} + Q_0 & P^{-1}\hat{B}Y_1 \\ Y_1^T \hat{B}^T P^{-1} & -Q_1 \end{bmatrix}$$



Además, la ley de control  $u(t)$  puede expresarse como

$$u(t) = Y_0 Q_0^{-1} z(t) + Y_1 Q_0^{-1} z(t-h).$$

Finalmente, las expresiones (16), (17) y (18) se determinan a partir de (8), (9) y (12) respectivamente.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN DE RESULTADOS

En la presente sección se presentan: el modelo matemático del sistema, los detalles técnicos tanto del hardware y software empleados y por último se presentan los resultados obtenidos de la implementación en simulación y en la plataforma experimental.

##### 4.1. Modelo Matemático de un helicóptero 3-GDL

El banco experimental consiste en un helicóptero 3-GDL de la marca Quanser, el cual representa una plataforma similar a un helicóptero con rotores en configuración tándem, cuyo diagrama de cuerpo libre es mostrado en la Figura 1.

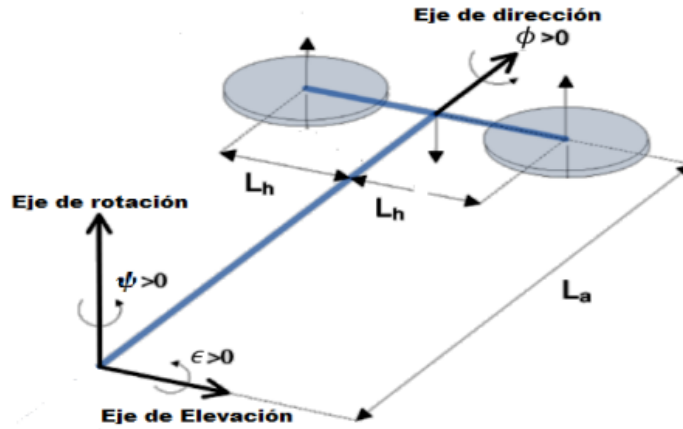


FIGURA 1:  
Diagrama de cuerpo libre del helicóptero de 3-GDL.

El modelo dinámico del helicóptero de 3-GDL se toma de (Apkarian, 2006), donde se sigue el formalismo de EulerLagrange. El modelo matemático del sistema se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} J_\epsilon \ddot{\epsilon}(t) &= K_f L_a (V_f(t) + V_t(t)) - T_g, \\ J_\phi \ddot{\phi}(t) &= K_f L_h (V_f(t) - V_t(t)), \\ J_\psi \ddot{\psi}(t) &= K_p L_a \sin(\phi(t)), \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\epsilon(t)$  representa el Angulo de elevación,  $\phi(t)$  el Angulo de dirección y  $\psi(t)$  es el Angulo de rotación. El momento de inercia del sistema respecto al eje de elevación se define como  $J_\epsilon$ , mientras que  $J_\phi$  es el momento de inercia respecto al eje de dirección.  $J_\psi$  representa el momento de inercia respecto al eje de rotación. Los voltajes aplicados en el motor frontal y posterior se denotan como  $V_f(t)$  y  $V_t(t)$ , respectivamente. La constante de fuerza de la combinación motor-propela queda definida por  $K_f$ , mientras que  $K_p$  es la constante de proporcionalidad de la fuerza gravitacional. La distancia entre el eje de elevación

al cuerpo del helicóptero y la distancia entre el eje de dirección hacia cada motor se describen por  $L_a$  y  $L_h$ , respectivamente. Finalmente  $T_g$  representa el par gravitacional efectivo.

Ahora, definiendo el vector de estado del helicóptero como

$$x(t) = [\epsilon(t), \phi(t), \psi(t), \dot{\epsilon}(t), \dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t)]^T, \quad (22)$$

y la entrada

$$u_H(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T, \quad (23)$$

con

$$u_1(t) = V_f(t), \quad (24)$$

$$u_2(t) = V_t(t), \quad (25)$$

el sistema (21) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_5(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_6(t) \\ \dot{x}_4(t) &= a(u_1(t) + u_2(t)) + b \\ \dot{x}_5(t) &= c(u_1(t) - u_2(t)) \\ \dot{x}_6(t) &= d \sin(x_2(t)). \end{aligned} \quad (26)$$

Aquí  $a = \frac{k_f L_h}{J_x}$ ,  $b = -\frac{T_g}{J_x}$ ,  $c = \frac{k_t L_h}{J_y}$  y  $d = -\frac{k_t L_h}{J_z}$ . Ahora, linealizando el sistema (26) alrededor del punto de equilibrio  $x(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ , se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $y(t)$  representa la salida del sistema y las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  están dadas por

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & a \\ c & -c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Ahora, considere el sistema lineal (27) más una perturbación, de tal manera que el sistema se representa ahora como

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \eta(t), \\
 y(t) &= Cx(t),
 \end{aligned} \tag{29}$$

donde A, B y C están dadas por (28) y  $\eta(t)$  es una perturbación que afecta a las velocidades angulares del helicóptero y está definida como

$$\eta(t) = [0 \ 0 \ 0 \ \eta_1(t) \ \eta_2(t) \ \eta_3(t)]^T.$$

La perturbación se considera como el modelo de un barrido de frecuencia automático el cual es un método efectivo para simulaciones de vuelo ante perturbaciones (Tischler and Remple, 2006) y está definido como

$$\eta_j(t) = G_j \sin(\theta_j(t)), \quad j = 1, 2, 3,$$

donde G representa la amplitud del barrido, y se considera como el 10 % de los límites máximos de deflexión del vehículo aéreo. Además,  $\theta(t)$  se define de la siguiente manera

$$\theta_j(t) = \int_0^t \omega_j(\tau) d\tau.$$

Aquí, Trec representa el tiempo de simulación y  $\omega(t)$  la frecuencia de progresión, la cual está dada por

$$\omega(t) = \omega_{\min} + Q_{\omega}(\omega_{\max} - \omega_{\min}),$$

$\omega_{\min}$  es el límite para frecuencias bajas,  $\omega_{\max}$  el límite para frecuencias altas y  $Q_{\omega}$  se expresa como

$$Q_{\omega} = q_1 [e^{q_2(t/T_{\text{rec}})} - 1],$$

donde  $q_1 = 4.0$  y  $q_2 = 0.0187$  son valores viables para una gran variedad de aplicaciones como pruebas de control de vuelo, identificación de la respuesta dinámica de rotores en túneles de viento, por nombrar algunos (Tischler and Remple, 2006).

## 4.2. Descripción de la plataforma experimental

La plataforma experimental bajo consideración, consiste en un helicóptero de 3-GDL de la marca Quanser la cual se muestra en la Figura 2 y sus parámetros están dados en la Tabla 1.

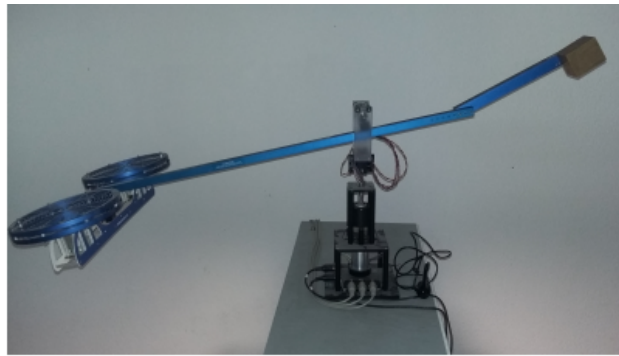


FIGURA 2  
Helicóptero 3-GDL

TABLA 1  
Parámetros físicos del helicóptero de 3-GDL

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
$J_e$	Momento de inercia respecto al eje de elevación	0.9140	$kg\ m^2$
$J_\phi$	Momento de inercia respecto al eje de dirección	0.0364	$kg\ m^2$
$J_\psi$	Momento de inercia respecto al eje de rotación	0.9505	$kg\ m^2$
$K_f$	Constante de fuerza de la combinación motor-propela	0.1118	$N/V$
$K_p$	Constante de proporcionalidad de la fuerza gravitacional	1.7822	$N$
$L_\psi$	Distancia entre el eje de rotación al cuerpo del helicóptero	0.6600	$m$
$L_\phi$	Distancia entre el eje direccional hacia cada motor	0.1780	$m$
$T_g$	Par gravitacional efectivo	0.5881	$Nm$

### 4.3. Especificaciones técnicas de la plataforma experimental

#### 4.3.1. Actuadores

El helicóptero de 3-GDL cuenta con dos actuadores que son motores de corriente directa (CD): el motor frontal y el motor trasero los cuales son de la marca Pittman Modelo 9234. El motor tiene una resistencia eléctrica de  $0.83\ \Omega$  y una constante de corriente-par de  $0.0182\ \frac{Nm}{A}$ . El voltaje nominal es de 12 V pero su voltaje pico puede llegar hasta 22 V sin que llegue a dañar al dispositivo (Pittman, 2002).

#### 4.3.2. Encoders

El banco experimental cuenta con tres encoders (codificador rotatorio): el encoder que mide el ángulo de dirección  $\phi$  respecto al cuerpo del helicóptero, el encoder que mide el ángulo de elevación  $\epsilon$  y por último el encoder que mide el ángulo de rotación  $\psi$ . En modo cuadratura los encoders de dirección y elevación tienen una resolución de 4096 pulsos por revolución y el encoder del ángulo de rotación tiene una resolución de 8192 pulsos por revolución. Por lo tanto, la resolución de posición efectiva es de 0.0879 grados con respecto al eje de dirección y elevación y 0.0439 grados con respecto al eje de rotación (Apkarian, 2006).

#### 4.3.3. Tarjeta de adquisición de datos

El cRIO-9024 es un controlador embebido en tiempo real, encargado de monitorear y controlar el helicóptero 3-GDL cuenta con un CPU de 800 MHz y está estructurado con memoria RAM de 512 MB. Este controlador consta de una variedad de puertos de conectividad incluyendo dos Ethernet, uno USB y

uno serial. Se encuentra combinado con dos módulos de entradas y salidas (E/S) Q1–cRIO los cuales se encargan de adquirir la señal de los tres encoders y de generar la señal de salida analógica para controlar los dos actuadores (NI, 2015).

#### 4.4. Simulación

Las siguientes simulaciones fueron realizadas empleando el software Matlab-Simulink (MATLAB, 2010). Siguiendo los resultados de la Proposición 1 y utilizando el sistema (29) se realiza el cambio de las matrices  $A \rightarrow \hat{A}$ ,  $B \rightarrow \hat{B}$  y  $\eta \rightarrow \hat{\eta}$  dando por resultado

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & a \\ c & -c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\eta}(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \eta_1(t) \quad \eta_2(t) \quad \eta_3(t) \quad 0 \quad 0]^T, \quad (30)$$

posteriormente y mediante el toolbox Yalmip se comprueba que la LMI (14) es factible para valores  $\sigma = 0.30$ ,  $h = 0.01$  y definiendo  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ , con  $G_j = 0.003$ ,  $T_{recj} = 500$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\omega_{\min} = 0.3 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{\max} = 12 \text{ rad/s}$  se tiene que  $\|\hat{\eta}\| < 0.003$ . Así, la solución del sistema es  $\mu$ –prácticamente estable con  $\mu = 0.49$  y  $T = 31.11$ . Además, de que las ganancias de control  $K_0 = Y_0 Q_0^{-1}$  y  $K_1 = Y_1 Q_0^{-1}$  tienen los valores de

\*\*\*\*\*

En la Figura 3 se presenta la estabilización de la posición sin ninguna perturbación de los ángulos de elevación  $\epsilon$ ,  $\phi$  y  $\psi$  para una posición deseada  $[\epsilon_d, \phi_d, \psi_d] = [0, 0, 0]$ .

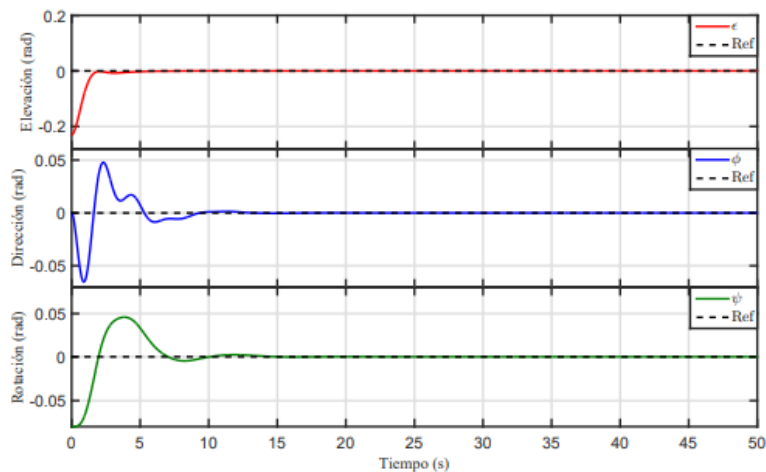


FIGURA 3

Grafica de estabilización de la posición del helicóptero 3-GDL

En la Figura 4 se muestra a las velocidades angulares del helicóptero de 3-GDL y posteriormente en la Figura 5 se muestra las señales de control  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  que estabilizan al helicóptero.

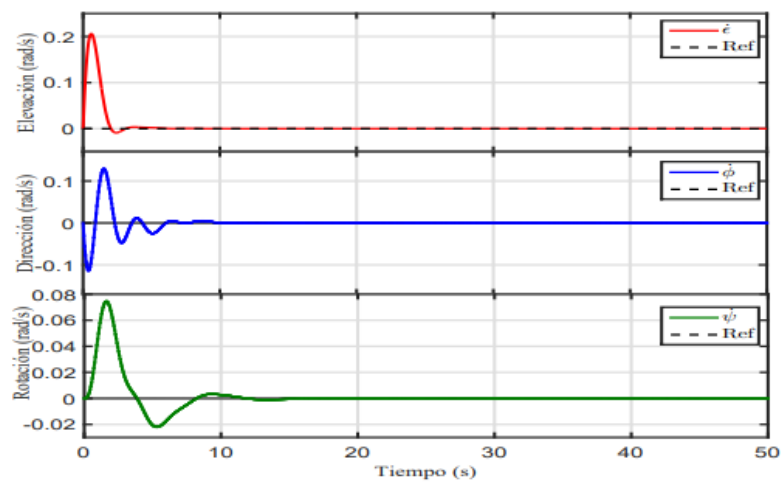


FIGURA 4  
Grafica de estabilización de la velocidad del helicóptero 3-GDL.

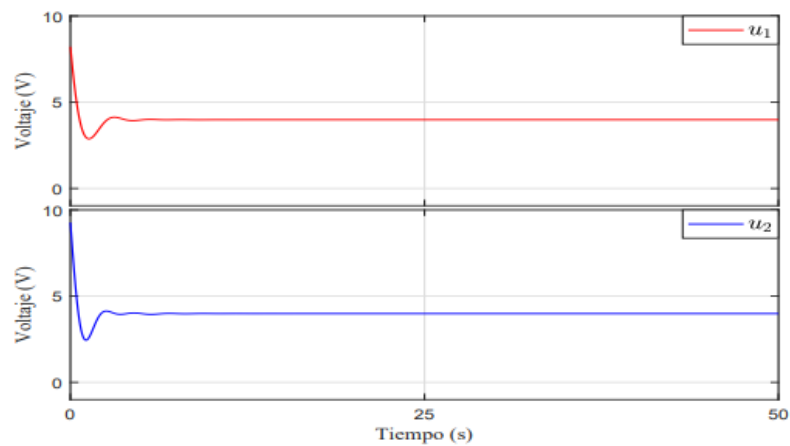


FIGURA 5  
Señal de control  $u_1$  y  $u_2$ .

En la Figura 6 se presenta la estabilización práctica de la posición de los ángulos de elevación  $\epsilon$ ,  $\phi$  y  $\psi$  para una posición deseada  $[\epsilon_d, \phi_d, \psi_d] = [0, 0, 0]$  en donde la perturbación es aplicada durante los intervalos  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $t_3 \leq t \leq t_4$  y  $t_5 \geq t$ .

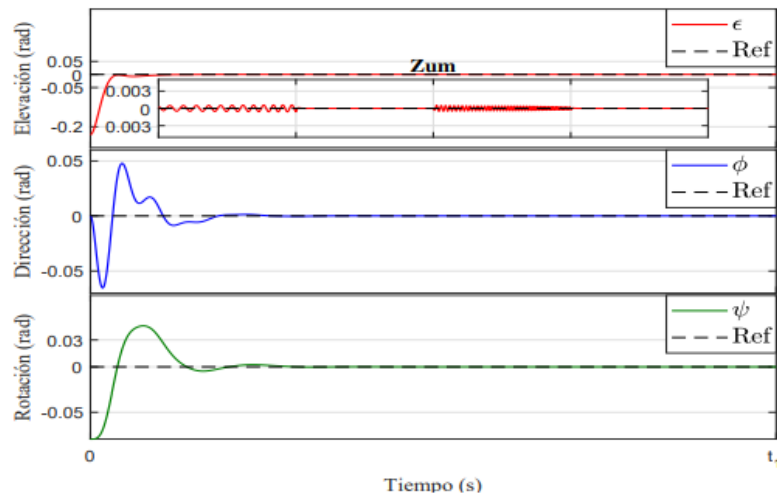


FIGURA 6

Grafica de estabilización práctica de la posición del helicóptero 3-GDL.

En la Figura 7 se muestra a las velocidades angulares del vehículo aéreo y posteriormente en la Figura 8 se muestran las señal de control  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  que estabilizan prácticamente al helicóptero.

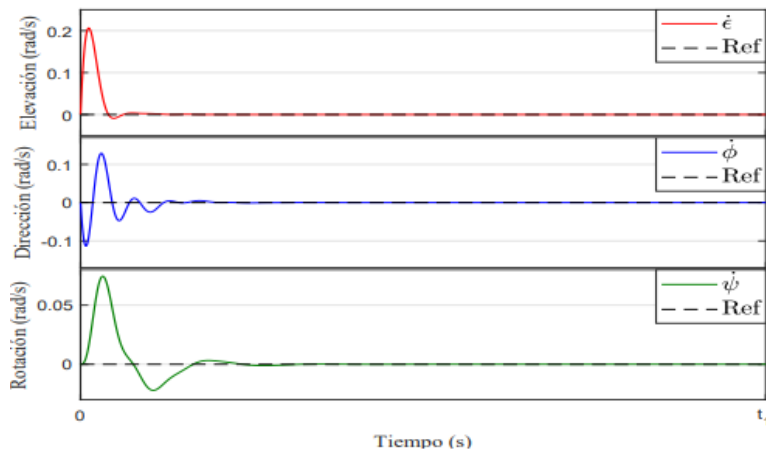


FIGURA 7

Grafica de estabilización práctica de la velocidad del helicóptero 3-GDL.

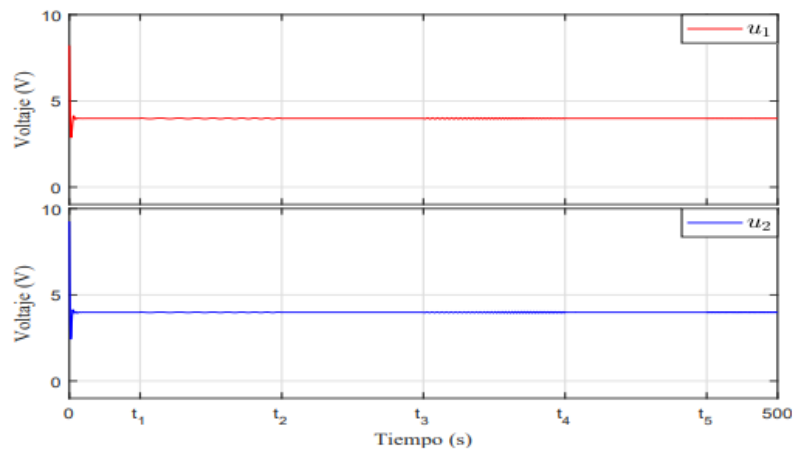


FIGURA 8  
Señal de control  $u_1$  y  $u_2$ .

#### 4.5. Plataforma Experimental

En la Figura 9 se presenta la estabilización sin perturbación de la posición de los ángulos de elevación  $\epsilon$ ,  $\phi$  y  $\psi$  para una posición deseada  $[\epsilon_d, \phi_d, \psi_d] = [0, 0, 0]$  en el helicóptero de manera experimental.

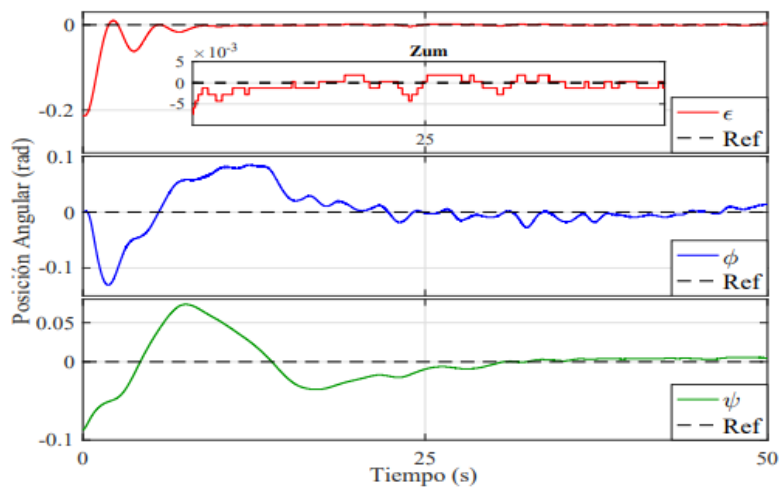


FIGURA 9  
Grafica de estabilización de la posición del helicóptero 3-GDL.

En la Figura 10 se muestra a las velocidades angulares del helicóptero y posteriormente en la Figura 11 se muestran las señales de control que estabilizan al sistema.



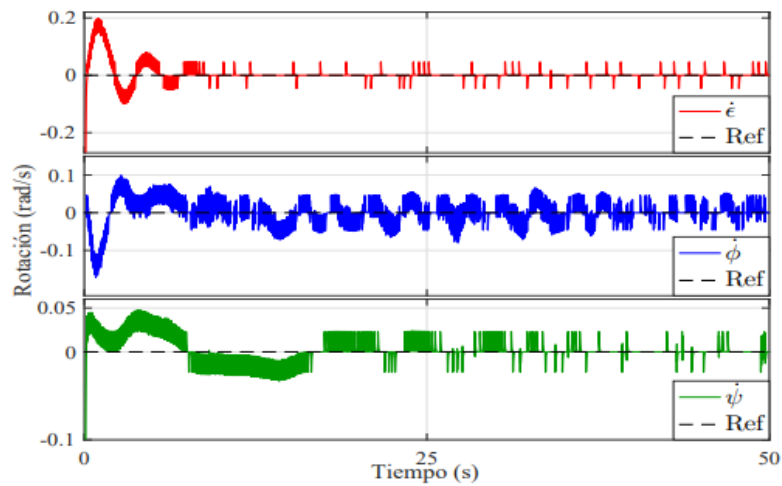


FIGURA 10  
Grafica de estabilización de la velocidad del helicóptero 3-GDL

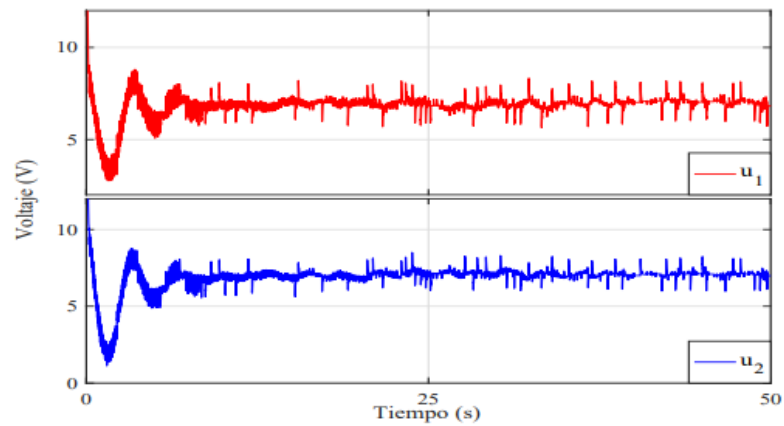


FIGURA 11:  
Señal de control  $u_1$  y  $u_2$ .

En la Figura 12 se presenta la estabilización con perturbación de la posición de los ángulos de elevación  $\epsilon$ ,  $\phi$  y  $\psi$  para una posición deseada  $[\epsilon_d, \phi_d, \psi_d] = [0, 0, 0]$  en el helicóptero de manera experimental en donde la perturbación es aplicada durante los intervalos  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $t_3 \leq t \leq t_4$  y  $t_5 \leq t$ , por medio de corrientes de aire suministradas por un ventilador.

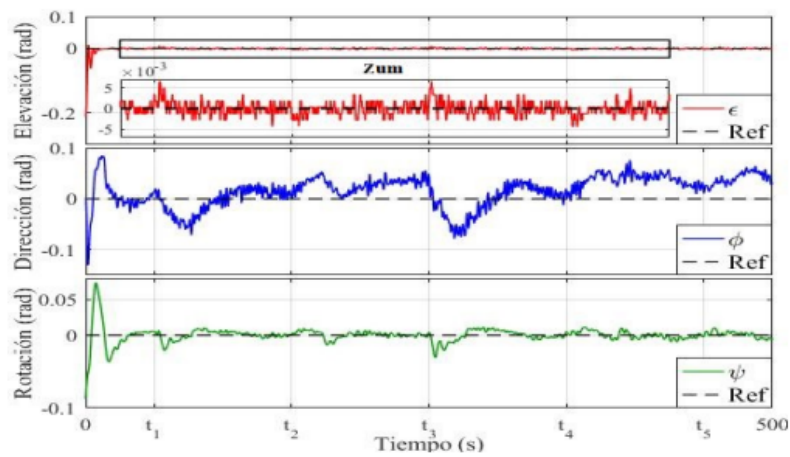


FIGURA 12

Grafica de estabilización práctica de la posición del helicóptero 3-GDL.

En la Figura 13 se muestra a las velocidades angulares y posteriormente en la Figura 14 se muestran las señales de control  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  que estabilizan prácticamente al sistema.

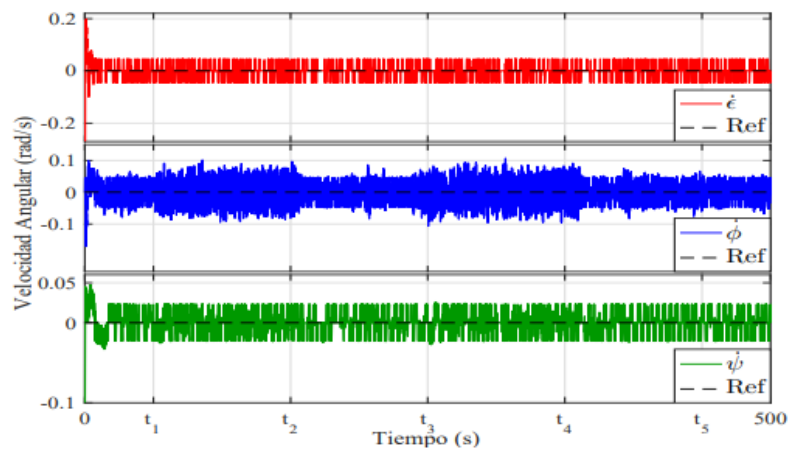


FIGURA 13

Grafica de estabilización práctica de la velocidad del helicóptero 3-GDL.

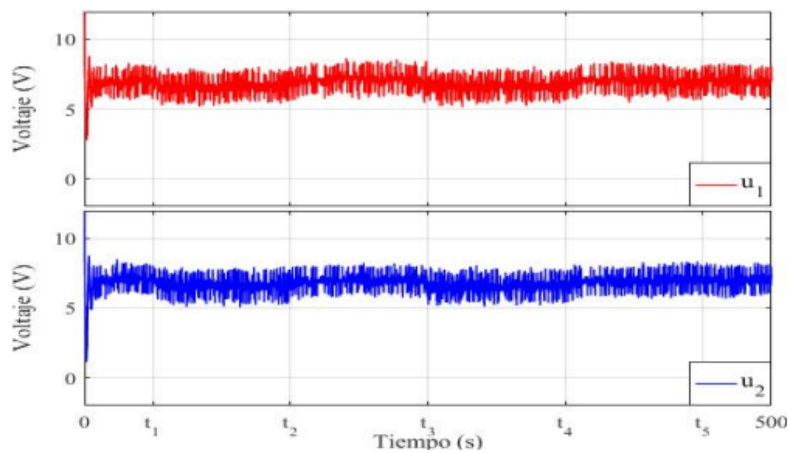


FIGURA 14

Señal de control  $u_1$  y  $u_2$ .

## 5. CONCLUSIONES

En este manuscrito se presenta un enfoque constructivo para la estabilización práctica de una clase de sistemas no lineales mediante el diseño y sintonización de una ley de control con acciones retardada e integral. La acción retardada atenúa el ruido inherente en las plataformas experimentales (Mondie et al., 2011), mientras que la acción integral reduce el error en estado estacionario. Como se puede corroborar en las secciones anteriores, la estabilidad práctica del helicóptero de 3-GDL se preserva ante perturbaciones de vuelo. Para representar las perturbaciones, en simulaciones se empleó la función de barrido de frecuencia automático propuesta en (Tischler and Remple, 2006), mientras que para la parte experimental, se sometió a la plataforma ante corrientes de viento suministradas por un ventilador. Como parte principal de la investigación se puede observar que, en términos prácticos, la plataforma experimental del helicóptero de 3-GDL, permanece dentro de una vecindad de las coordenadas de vuelo deseadas, es decir, se estabiliza prácticamente. Esto sin duda ocurre en la mayoría de las plataformas experimentales de este tipo, por lo que los conceptos y criterios convencionales de estabilidad en el sentido de Lyapunov no corresponden en el sentido teórico-práctico. Así, conceptos y criterios como el de estabilidad y estabilización práctica son una alternativa más adecuada para establecer una correspondencia teórica-práctica en prototipos físicos.

## REFERENCIAS

- Apkarian, J., 2006. 3-dof helicopter reference manual. Quanser Consulting Inc, Canada.
- Åström, K. J., Hägglund, T., 2009. Control PID avanzado. Pearson, Madrid
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear matrix inequalities in system and control theory. Vol. 15. Siam.
- Corless, M., Leitmann, G., 1981. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. IEEE Transactions on Automatic Control 26 (5), 1139–1144.
- Debeljkovic, D. L., Lazarevic, M., Koruga, D., Milinkovic, S., Jovanovic, M., 2000. Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval. In: American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000. Vol. 2. IEEE, pp. 1450–1451.
- Gu, K., Chen, J., Kharitonov, V. L., 2003. Stability of time-delay systems. Springer Science & Business Media.
- Guang-Di, H., Guang-Da, H., 2001. Stabilization of an uncertain large-scale time-dependent bilinear neutral differential system by memory feedback control. IMA Journal of Mathematical Control and Information 18 (1), 1–18.
- La Salle, J. P., 1976. The stability of dynamical systems. SIAM
- Lakshmikantham, V., Leela, S., Martynuk, A. A., 1990. Practical stability of nonlinear systems. World Scientific.
- MATLAB, 2010. version 7.10.0 (R2010a). The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts.
- Mondie, S., Kharitonov, V. L., 2005. Exponential estimates for retarded timedelay systems: An lmi approach. IEEE Transactions on Automatic Control 50 (2), 268–273.
- Mondie, S., Villafuerte, R., Garrido, R., 2011. Tuning and noise attenuation of a second order system using proportional retarded control. IFAC Proceedings Volumes 44 (1), 10337–10342.
- Nenadic, Z. L., Debeljkovic, D. L., Milinkovic, S., 1997. On practical stability of time delay systems. In: American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997. Vol. 5. IEEE, pp. 3235–3236.
- NI, 2015. NI cRIO-9024 Intelligent Real Time Embedded Controller for CompactRIO. <http://www.ni.com/pdf/manuals/375233f.pdf>.
- Pittman, 2002. Pittman LOGO COG DC Servo Motor Series 8000, 9000 and 14000. <http://hades.mech.northwestern.edu/images/3/3c/Pittman-ELCOMSL-4443S013.pdf>
- QUANSER, 2020. 3 DOF Helicopter. <https://www.quanser.com/products/3-dof-helicopter/#overview>.

- Sipahi, R., Niculescu, S.-I., Abdallah, C. T., Michiels, W., Gu, K., 2011. Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems Magazine* 31 (1), 38–65.
- Tischler, M. B., Remple, R. K., 2006. Aircraft and rotorcraft system identification. AIAA education series.
- Villafuerte, R., Mondié, S., Poznyak, A., 2011. Practical stability of time-delay systems: Lmi's approach. *European Journal of Control* 2 (17), 127–138.