

Sobre la convergencia de los conjuntos de alcanzabilidad de un sistema lineal de segundo orden

On the convergence of the attainability sets of a second order linear system

Temoltzi- Ávila, R.; Zhermolenko, V. N.

R. Temoltzi- Ávila

temoltzi@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

V. N. Zhermolenko

zhermol@yandex.ru

Universidad Estatal Rusa, México

Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

ISSN-e: 2007-6363

Periodicidad: Semestral

vol. 8, núm. 16, 30-36, 2021

sitioweb@uaeh.edu.mx

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/595/5953116007/>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Resumen: Se determina la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad $(\cdot, \cdot)$ de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con una perturbación externa. Se muestra que al considerar el límite $T \rightarrow \infty$,

la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad convergen a un único ciclo límite γ que se obtiene cuando se considera la peor perturbación externa. Los resultados se ilustran de forma numérica.

Palabras clave: Perturbaciones externas, sistemas lineales, conjunto de alcanzabilidad, ciclo límite máximo.

Abstract: The boundary of the attainability sets $(\cdot, \cdot)$ of a second order linear differential equation with an external perturbation is determined. It is shown that when the limit $T \rightarrow \infty$, is considered, the boundary of the attainability sets converge to the only limit cycle γ that is obtained when the worst external perturbation is considered. The results are illustrated numerically.

Keywords: External perturbations, linear systems, attainability set, maximum limit cycle.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema de interés en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales que admiten una perturbación externa con recursos acotados, consiste en determinar, o en el mejor de los casos, en estimar los conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$. Estos conjuntos describen la región en el espacio de estados a la cual las soluciones pueden acceder en un instante $T > 0$ considerando las diferentes acciones de las perturbaciones admisibles. Algunas propiedades conocidas de tales conjuntos en el caso de sistemas lineales se pueden consultar en (Lee and Markus, 1967; Boyd et al., 1994). Uno de los métodos que con mayor frecuencia se emplean en la estimación de los conjuntos de alcanzabilidad, consiste en el empleo de aproximaciones mediante elipsoides, ver Kurzhanski and Valyi (1999). En este contexto, el problema sobre la búsqueda de la mejor estimación es ampliamente estudiado en la literatura, ver por ejemplo los trabajos (Sabin and Summers, 1990; Shen and Zhong, 2011; Pitarch et al., 2015). El problema sobre la búsqueda de estimaciones numéricas de los conjuntos de alcanzabilidad de sistemas no lineales se puede consultar en (Kumkov and Zharinov, 2004; Vinnikov, 2015). En el caso particular de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y una perturbación externa:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\mu\dot{y}_1 + \omega^2 y_1 &= u(t), \quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \\ u(t) &\in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}, \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $0 \leq \mu < \omega$, $\delta > 0$ y $\mathcal{KC}(\mathbb{R})$ denota el conjunto de funciones continuas a trozos definidas en $\mathbb{R}$, en Chernousko (1988) se analiza la aproximación de la frontera de sus conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$ para cada instante $T > 0$ usando el método de elipsoides. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y una perturbación externa equivalente a (1):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= By + cu(t), \quad y(0) = 0, \\ u(t) &\in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}, \end{aligned} \quad (2)$$

Donde $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ representa su solución, τ de nota el símbolo de transposición, y

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es conocido en la literatura que los conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$ de (2) son conjuntos acotados, simétricos y conexos para cada $T > 0$, y que cuando $T \rightarrow \infty$, la frontera del conjunto $D(T)$ tiende a una única trayectoria cerrada $C^\#$; en tal caso, dicha trayectoria corresponde a un ciclo límite que es orbital y asintóticamente estable que se obtiene de (2) bajo la acción de la peor perturbación externa $u^\#(t) = \delta \operatorname{sign} y_2(t)$, ver (Zhermolenko, 1980; Aleksandrov et al., 2007; Zhermolenko, 2007, 2012).

2. FRONTERA DE LOS CONJUNTOS DE ALCANZABILIDAD

Siguiendo el desarrollo que se presenta en (Formals'kii, 1974; Blagodatskikh, 2001; Bugrov and Formals'kii, 2017), se considera de forma alternativa el problema de hallar la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad $D_z(T)$ para el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a (2):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bu(t), \quad z(0) = 0, \\ u(t) &\in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}. \end{aligned} \quad (3)$$

el cual se obtiene de considerar la transformación lineal no singular $y = Cz$, con

$$C = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \omega & -\mu \\ 0 & \omega \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\mu & \omega \\ \omega & -\mu \end{bmatrix}, \quad b = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix}$$

y donde $\theta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$. Se sigue como consecuencia que para cada instante $T > 0$:

$$\partial D(T) = \{Cz \in \mathbb{R}^2 : z \in \partial D_z(T)\}. \quad (4)$$

Se conoce de (Formals'kii, 1974; Bugrov and Formals'kii, 2017) que los conjuntos $D_z(T)$ dependen del instante $T > 0$ considerado, que estos poseen dos puntos esquina, y que la frontera de $D(\infty)$ no existe si $\mu = 0$.

Es claro de (4) que estas propiedades son tambien validas para los conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$ de (2). De lo anterior, se supone en lo sucesivo que los parámetros de (2) satisfacen la desigualdad $0 < \mu < \omega$. Por otra parte, de la misma referencia que se ha citado, se sabe que la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D_z(T)$ de (3) definida en un instante $T > 0$, consiste de los puntos $z(T)$ que tienen la propiedad de que la distancia $\rho(\eta)$ del origen de coordenadas a la recta tangente soporte $\Pi(\eta)$ del conjunto $\partial D_z(T)$ en el punto $z(T)$, satisface

$$\rho(\eta) = \frac{\delta}{\omega} \int_0^T \text{sign}[\eta(\theta) e^{A\tau} b] e^{A\tau} b d\tau, \quad \theta \in [\theta, \bar{\theta}],$$

Donde $\eta(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, $\theta \in [\theta, \bar{\theta}]$, ver la Figura 1. Aquí $[\theta, \bar{\theta}]$ se elige de tal manera que η es una función periódica. Se sigue que la perturbación externa que da solución al problema de optimización anterior es $u^\#(T-\tau) = \delta \text{sign}[\eta(\theta) e^{A\tau} b]$. Por consiguiente, los puntos $z(T)$ que pertenecen a la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D_z(T)$, se pueden describir de forma paramétrica por la función vectorial

$$h(\theta) = \delta \int_0^T \text{sign}[\eta(\theta) e^{A\tau} b] e^{A\tau} b d\tau, \quad \theta \in [\theta, \bar{\theta}], \quad (5)$$

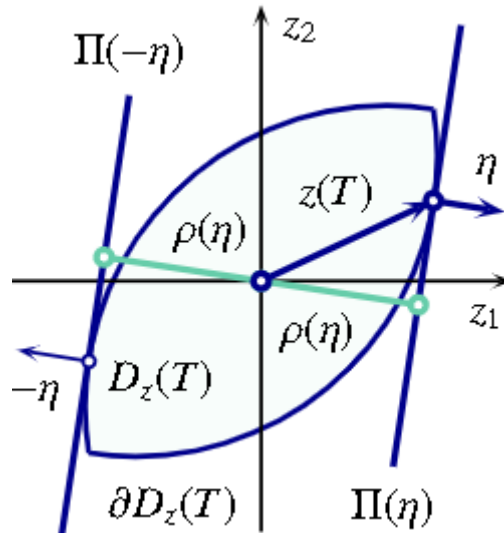


FIGURA 1:
Esquema de construcción del conjunto de accesibilidad $D_z(T)$.

Luego, de acuerdo con la definición de la matriz exponencial de A en (3),

$$e^{A\tau} = e^{\omega\tau} \begin{bmatrix} \cos(\theta\tau) & \sin(\theta\tau) \\ -\sin(\theta\tau) & \cos(\theta\tau) \end{bmatrix}$$

se puede verificar que

$$\text{sign}[\eta(\theta) e^{A\tau} b] = \text{sign}[\cos(\theta\tau + \theta - m)]$$

Donde

$$m = \arctan\left(\frac{\theta}{\omega}\right).$$

y, por consiguiente, la frontera del conjunto $D_z(T)$ se describe por la función $h : [\theta, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$h(\theta) = \delta \int_0^T \text{sign}[\cos(\theta\tau + \theta - m)] e^{A\tau} b d\tau, \quad \theta \in [\theta, \bar{\theta}]. \quad (6)$$

Se observa de (6), que h es una función continua en el intervalos $[\theta, \bar{\theta}]$ y diferenciable a trozos en el mismo intervalo. Los puntos en los cuales h no es diferenciable, son los puntos $\theta \in [\theta, \bar{\theta}]$ en los cuales el integrando no está definido, es decir, en los puntos (θ, τ) del conjunto $\Omega_T := [\theta, \bar{\theta}] \times [0, T]$ que pertenecen al conjunto de rectas

$$\ell_k : \theta\tau + \theta - m = \frac{1}{2}(2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por tanto, para analizar de forma explícita la frontera de los conjuntos $\text{Da}(T)$, es necesario determinar aquellos puntos en los cuales h no es diferenciable. Como caso particular, se elige el conjunto de rectas ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 , definidas en Ω_T , y se consideran instantes $T > 0$ que satisfacen las desigualdades $(\nu-1)\pi \leq \theta T \leq \nu\pi$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$. De esta manera, se define la sucesión de intervalos:

$$J_\nu = \left[\frac{(\nu-1)\pi}{T}, \frac{\nu\pi}{T} \right], \quad \nu \in \mathbb{N}$$

en los cuales se analiza la función (6) cuando $T \in J_\nu$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$.

2.1. Construcción inicial

Se supone como primer caso particular que $T \in J_1$. Entonces se puede verificar que en Ω_T se hallan definidas las rectas ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 . Por consiguiente, se divide la región rectangular Ω_T de tal manera que $\Omega_T = \Omega_1 \# \dots \# \Omega_4$, donde $\Omega_k = [\theta_{k-1}, \theta_k] \times [0, T]$, y

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0, & \theta_1 &= \pi/(2T), \\ \theta_2 &= \pi/T, & \theta_3 &= 3\pi/(2T), \\ \theta_4 &= 2\pi/T. \end{aligned}$$

son las abscisas de los puntos de intersección de las rectas ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 con las rectas $\tau=0$ y $\tau=\pi$ en el sistema de coordenadas $O\theta\tau$. Se observa que los intervalos $[\theta_0, \theta_1]$ y $[\theta_2, \theta_3]$ se reducen a los puntos θ_0 y θ_2 cuando se toma el siguiente límite lateral $\lim_{T \rightarrow \pi^-}$. Considerando los valores del integrando de la función (6) en cada región Ω_k , se obtiene la representación de h :

$$h(\theta) = \begin{cases} \int_0^{\tau_1} \dots \dots \dots \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dots \dots \dots \\ \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dots \dots \dots \\ \int_{\tau_3}^{\tau_4} \dots \dots \dots \end{cases}$$

donde $\tau_1 = (m + 32\pi - \theta)/\theta$ y $\tau_2 = (m + 52\pi - \theta)/\theta$ describen las ordenadas de los puntos (θ, τ_1) y (θ, τ_2) en Ω_T que pertenecen a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 . Después de efectuar la integral anterior, se obtiene

$$h(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (7)$$

donde las componentes h_1 y h_2 son funciones que se definen por tramos, y que se representan por:

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= \begin{cases} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases} \\ h_2(\theta) &= \begin{cases} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Con

$$f_1(t) := e^{-\mu t} \cos(\vartheta t), \quad f_2(t) = e^{-\mu t} \sin(\vartheta t)$$

Y

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mu\vartheta}{2\theta}\right).$$

Se observa que la función (7) satisface las siguientes igualdades: $p_0^-(T) = h(\theta_0) = h(\theta_4)$ y $p_0^+(T) = h(\theta_2)$ para cada $T \in J_1$, donde $p_0^\pm: J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se definen por

$$p_0^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} 1 - f_1(T) \\ f_2(T) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Lo anterior muestra que $[\theta_0, \theta_4] = [\theta_0, \theta_4]$ define uno de los posibles intervalos donde la función h es periódica. Se observa además que la imagen del intervalo $[\theta_0, \theta_4]$ bajo la función h , describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas Oz_1z_2 que es diferenciable a trozos, y que la imagen de los intervalos $[\theta_0, \theta_1]$ y $[\theta_2, \theta_3]$ bajo h , en los cuales h es constante, son puntos de la forma $p_{\pm 0}(T)$ para cada $T \in J_1$. Resulta que los puntos en los cuales h no es diferenciable, son precisamente los puntos de la forma $p_{\pm 0}(T)$ para cada $T \in J_1$. Por otra parte, de la definición de las componentes h_1 y h_2 en (7), se sigue que si se eligen instantes $T_1, T_2 > 0$ tal que $0 < \theta(T_1) < \theta(T_2) < \pi$, entonces $\partial D_z(T_1) \cap \partial D_z(T_2) = \emptyset$ y que $D_z(T_1) \cap D_z(T_2) = \emptyset$. Finalmente, las funciones $p_{\pm 0}$ satisfacen los siguientes límites laterales: $\alpha_0 = p_{\pm 0}(0+) = (0, 0)$, y

$$p_{\pm 0}(\frac{\pi}{\vartheta}) = p_{\pm 0}^*(1 + K^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se concluye que para cada $T \in J_1$, la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$ de (2) se describen por la función vectorial $\hat{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\hat{h}(\theta) = Ch(\theta), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4].$$

Es claro también que la imagen de $[\theta_0, \theta_4]$ bajo $\hat{h}$, describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas Oy_1y_2 que es diferenciable a trozos, que la imagen de los intervalos $[\theta_0, \theta_1]$ y $[\theta_2, \theta_3]$ bajo $\hat{h}$, en los cuales $\hat{h}$ es una función constante, son puntos de la forma $C p_{\pm 0}(T)$ para cada $T \in J_1$, y que los puntos en los cuales la función $\hat{h}$ no es diferenciable, son precisamente los puntos de la forma $C p_{\pm 0}(T)$ para cada $T \in J_1$. Además, si se eligen instantes $T_1, T_2 > 0$ que satisfacen la desigualdad $0 < \theta(T_1) < \theta(T_2) < \pi$, entonces los correspondientes conjuntos $\partial D(T_1)$ y $\partial D(T_2)$ son disjuntos, lo cual se sigue de la relación (4).

2.2. Construcción general

Se extiende la construcción del conjunto de alcanzabilidad de (3), suponiendo ahora que el instante $T > 0$ que define el conjunto alcanzable $D_z(T)$ es tal que $T \in J_{n+1}$ para algún número natural $n \geq 1$. En esta situación, se observa que en el conjunto Ω_T se hallan definidas las rectas $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n+3}$, lo cual permite representar la región rectangular Ω_T en el sistema de coordenadas $O\theta\tau$, de manera que $\Omega_T = \Omega_1 \# \dots \# \Omega_4$, donde $\Omega_k = [\theta_k - 1, \theta_k] \times [0, T]$, y

$$\begin{aligned} A_0 &= \theta_0 + 1, & A_1 &= \theta_1 + 1, & A_2 &= \theta_2 + 1, \\ A_3 &= \theta_3 + 1, & A_4 &= \theta_4 + 1, & A_5 &= \theta_5 + 1, \\ A_6 &= \theta_6 + 1, & A_7 &= \theta_7 + 1, & A_8 &= \theta_8 + 1, \end{aligned}$$

son las abscisas de los puntos de intersección del conjunto de rectas $\ell_0, \ell_2, \dots, \ell_{n+3}$ con las rectas horizontales $\tau = 0$ y $\tau = (n+1)\pi$. Sobre cada una de las rectas $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n+2}$ definida en Ω_T , se eligen puntos de la forma (θ, τ_j) , y se consideran las ordenadas de estos puntos para definir los instantes:

$$\tau_j = \frac{m + j(2j+1)\pi - \theta}{\vartheta}, \quad j = 1, \dots, n+2.$$

Estos instantes satisfacen las desigualdades

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \dots < T.$$

Luego, tomando en consideración el integrando de la función (6) en cada conjunto Ω_k , la función $h: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que describe la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad $D_z(T)$ tiene la representación a trozos

$$h(\theta) = \begin{cases} h_1(\theta) & \theta \in [\theta_0, \theta_1] \\ h_2(\theta) & \theta \in [\theta_2, \theta_3] \\ h_3(\theta) & \theta \in [\theta_4, \theta_5] \end{cases}$$

donde los correspondientes intervalos de integración se definen a partir de la definición de los instantes τ_j :

$$\begin{aligned} A_0 &= \theta_0, & A_1 &= \theta_1, & A_2 &= \theta_2, \\ A_3 &= \theta_3, & A_4 &= \theta_4, & A_5 &= \theta_5, \\ A_6 &= \theta_6, & A_7 &= \theta_7, & A_8 &= \theta_8, \end{aligned}$$

Después de efectuar las integrales correspondientes y realizar las simplificaciones de las expresiones obtenidas, se obtiene La siguiente representación paramétrica de (6):

$$h(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4],$$

(9)

donde las componentes h_1 y h_2 son funciones escalares definidas por tramos en el intervalo $[\theta_0, \theta_4]$ que se representan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{\delta}{\vartheta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} + (-1)^{n+1} f_n(t) \right], \\ h_2(t) &= \frac{\delta}{\vartheta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} + (-1)^n f_n(t) \right]. \end{aligned}$$

Se observa que la función (9) se reduce a la expresión (7) cuando $n=0$.

Los parámetros θ_0, θ_2 y θ_4 permiten verificar que la función definida en (9) satisface: $p_{-n}(T) = h(\theta_0) = h(\theta_4)$ y $p_{+n}(T) = h(\theta_2)$, donde las funciones $p_{\pm n}: J_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ se definen por

$$p_{\pm n}(T) = \frac{\delta}{\vartheta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} + (-1)^{n+1} f_n(T) \right],$$

mientras que los parámetros θ_1 y θ_3 se sigue que: $q_{+n}(T) = h(\theta_1)$ y $q_{-n}(T) = h(\theta_3)$, donde $q_{\pm n}: J_n + 1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son funciones que se definen por

$$q_{\pm n}(T) = \frac{\delta}{\vartheta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} + (-1)^n f_n(T) \right].$$

Se observa una vez más que las funciones $p_{\pm n}$ y $q_{\pm n}$ coinciden con las funciones $p_{\pm 0}$ que se definieron en (8) para $n=0$. Lo anterior muestra que uno de los intervalos donde la función h define una función periódica es precisamente el intervalo $[\theta_0, \theta_4]$. Se verifica además que la imagen del intervalo $[\theta_0, \theta_4]$ bajo la función h que se define en (9), describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas Oz_1z_2 que es diferenciable a trozos para cada $T \in J_{n+1}$, y que dicha función, es continua en $[\theta_0, \theta_4]$ y no diferenciable en los puntos de la forma $p_{\pm n}(T)$ y $q_{\pm n}(T)$ para cada $T \in J_{n+1}$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, de la definición de las componentes h_1 y h_2 en (9), se sigue que si $T_1, T_2 > 0$ son instantes tales que $n\pi \leq \theta T_1 < \theta T_2 \leq (n+1)\pi$, entonces resulta que $\partial D_z(T_1) \# \partial D_z(T_2) = \# \partial D_z(T_1) \# \partial D_z(T_2)$. Además, es claro que $D_z(T)$ es un conjunto acotado para todo $T \in J_{n+1}$. En consecuencia, si $\{T_k\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales no negativos tales que sus términos satisfacen la desigualdad $n\pi \leq \theta T_k \leq (n+1)\pi$, entonces la sucesión de conjuntos alcanzables $\{D_z(T_k)\}$ es una sucesión de conjuntos monótona creciente y acotada. Se observa también que las funciones $p_{\pm n}$ y $q_{\pm n}$ satisfacen los límites laterales

$$\pm \alpha_n = p_n^{\pm}(T^+) = q_n^{\pm}(T^+) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\pm \alpha_{n+1} = p_n^{\pm}(T^-) = q_n^{\mp}(T^-) = \pm \frac{\delta(1 + \Lambda^2)}{\vartheta} \sum_{k=0}^n \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Usando $T = (n+1)\pi/\theta$. Los resultados que se describen en las secciones 2.1 y 2.2 se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 1. Si en la ecuación diferencial (2) se eligen los parámetros $0 < \mu < \omega$, entonces la frontera del conjunto alcanzable $D(T)$ para $T > 0$, es un conjunto cerrado y acotado cuya frontera se describe por la trayectoria suave a trozos:

$$h(\theta) = Ch(\theta), \quad \theta \in \left[m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{3}{2}\pi \right],$$

Donde $h: [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{3}{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define en (9) y n denota la parte entera de $T: n = \llbracket T \rrbracket$. Además, las intersecciones del conjunto $\partial D(T)$ con el eje Oy_1 se dan en los puntos $\pm \hat{\alpha}_{n+1} = C\alpha_{n+1}$,

es decir,

$$\pm \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^n \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Comportamiento asintótico

En este apartado se determina la convergencia de la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$ de la ecuación diferencial (2) cuando $T \rightarrow \infty$. La posibilidad de considerar este límite se debe a la representación de las funciones $h : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p_m^+ : J_{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $q_m^+ : J_{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ para cada $T > 0$ y $m = 0, 1, \dots, n$, donde $n = \lfloor T \rfloor$, donde $n = \lfloor T \rfloor$

La definición de las funciones escalares h_1 y h_2 en (9) permite obtener un comportamiento asintótico de los conjuntos de alcanzabilidad $D_z(T)$ cuando $T \rightarrow \infty$ al considerar el límite $n \rightarrow \infty$ en la desigualdad $n\pi \leq \theta T \leq (n+1)\pi$. Este límite describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D_z(\infty)$ de la ecuación diferencial (3). Por tanto, tomando este límite, se obtiene que la función vectorial que describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D_z(\infty)$, es la función vectorial

$$h^*(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \cdot \frac{1}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} h_1^*(\theta) \\ h_2^*(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (12)$$

Donde

$$\begin{aligned} \delta &= \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \\ \vartheta &= \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la imagen del intervalo $[\theta_0, \theta_4]$ bajo la función h^* describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas Oz_1z_2 , y que la función h^* es continua en el intervalo $[\theta_0, \theta_4]$ y diferenciable a trozos en dicho intervalo. Más aun, se puede ver que $h^*(\theta_0) = -\alpha^* y h^*(\theta_2) = \alpha^*$, donde $\pm \alpha^*$ denotan las intersecciones de esta función vectorial con el eje Oz_1 , y cuyos valores se obtienen del límite de la sucesión de puntos $\{\pm \alpha_n\}$ definidos en (10) y (11), es decir,

$$\alpha_n = \frac{\delta_1}{\vartheta_1} \frac{1 + \Lambda^{2n}}{1 - \Lambda^{2n}}$$

de donde resulta

$$\pm \alpha^* = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \frac{1 + \Lambda^2}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

De la definición de la función (12) se puede concluir que el conjunto alcanzable $D_z(\infty)$ de la familia de ecuaciones diferenciales (3) es un conjunto cerrado y acotado en el sistema de coordenadas Oz_1z_2 . La mayor y menor distancia del origen de coordenadas de Oz_1z_2 a las rectas tangentes soporte $\Pi(\eta)$ y $\Pi(-\eta)$ del conjunto $\partial D_z(\infty)$, se obtiene a partir de las soluciones de la ecuación $\rho'(\theta) = 0$, $\theta \in [m\pi, m\pi + 2\pi]$, donde $\rho(\theta) = \eta(\theta) h^*(\theta)$ y $\eta(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$; es decir, a partir de las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \eta_1(\theta) \left(\frac{\delta_1}{\vartheta_1} \frac{1 + \Lambda^{2n}}{1 - \Lambda^{2n}} \right) - \frac{\delta_2}{\vartheta_2} \frac{\Lambda^{2n}}{1 - \Lambda^{2n}} &= 0 \\ \eta_2(\theta) \left(\frac{\delta_1}{\vartheta_1} \frac{1 + \Lambda^{2n}}{1 - \Lambda^{2n}} \right) - \frac{\delta_2}{\vartheta_2} \frac{\Lambda^{2n}}{1 - \Lambda^{2n}} &= 0 \end{aligned}$$

ver Formals'kii (1974).

La observación anterior permite determinar propiedades análogas del conjunto alcanzable $D(\infty)$ de la familia de ecuaciones diferenciales (2). Los resultados se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 2. Si en la ecuación diferencial (2) se eligen los parámetros $0 < \mu < \omega$, entonces el conjunto de alcanzabilidad $D(\infty)$ es un conjunto cerrado y acotado, cuya frontera se describe por la trayectoria suave a trozos:

$$\hat{h}^*(\theta) = Ch^*(\theta), \quad \theta \in \left[m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi\right], \quad (14)$$

Donde $h^\# : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es definida en (12). La intersección del conjunto de alcanzabilidad con el eje Oy_1 se da en los puntos $\pm \hat{\alpha}^\# = \pm C\alpha^\#$, es decir,

$$\pm \hat{\alpha}^* = \pm \frac{\delta}{\omega^2} \frac{1 + \Lambda^2}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Es posible determinar la mayor y menor distancia del origen de coordenadas Oy_1y_2 a las rectas tangentes soporte de la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D(\infty)$ a partir de la solución de la ecuación $\hat{\rho}'(\theta) = 0$, $\theta \in [m + \pi/2, m + 5\pi/2]$, donde $\hat{\rho}(\theta) = \eta(\theta) \hat{h}^\#(\theta)$.

3. CICLO LIMITE MÁXIMO

La importancia e interpretación geométrica de los puntos $\pm \hat{\alpha}^\#$ definidos en (15), así como la trayectoria que describe la función vectorial $\hat{h}^\# : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que se define en (14), se debe a que dichos elementos forman parte de la solución del problema de desviación máxima de B. V. Bulgakov, cuya formulación se puede consultar en Elishakoff and Ohsaki (2010). En tal situación, la aplicación del problema de desviación máxima para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma (2), ha sido analizado exhaustivamente en la literatura, ver por ejemplo los trabajos (Zhermolenko, 1980; Aleksandrov et al., 2007; Zhermolenko, 2007; Aleksandrov et al., 2016). Los resultados se obtienen como un corolario.

Corolario 1. Bajo la composición de la función definida en (14) y las aplicaciones $m + 3\pi/2 - \theta \mapsto \theta$ y $m + 5\pi/2 - \theta \mapsto \theta$ cuando $\theta \in [0, \pi/\theta]$, se obtiene una trayectoria cerrada que describe un ciclo limite $C^\#$ de la ecuación diferencial (2) bajo la acción de la perturbación externa $u^\#(t) = \delta \operatorname{sign} y_2(t)$, y cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \hat{h}^\#}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \hat{h}^\#}{\partial \theta} \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \hat{h}^\#}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \hat{h}^\#}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Del corolario 1 se concluye que la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D(\infty)$ de (2), se obtiene como solución de la ecuación diferencial (2) cuando se considera la perturbación externa $u^\#(t) = \delta \operatorname{sign} y_2(t)$, es decir, se cumple: $D(\infty) = C^\#$. Se observa además que, a diferencia de los conjuntos $D(T)$ de (2)

para cada $T > 0$, el conjunto $D(\infty)$ no posee puntos esquina, ver Bugrov and Formal'skii (2017). En el contexto del problema de desviación máxima de Bulgakov, $\hat{\alpha}^\#$ es llamada desviación máxima de oscilación de la solución $y^\#(t) = (y_1^\#(t), y_2^\#(t))$ respecto al eje Oy_1 , $u^\#(t) = \delta \operatorname{sign} y_2(t)$ es llamada peor perturbación externa, y $C^\#$ es llamado ciclo limite máximo, ver (Zhermolenko, 1980, 2007; Aleksandrov et al., 2007). Se observa que los puntos $\pm \hat{\alpha}^\#$ definidos en (15) dependen linealmente del parámetro que describe los recursos disponibles del conjunto de perturbaciones externas U_δ ; es decir, admiten como factor el parámetro $\delta > 0$. Esta propiedad se observa también de la definición de los parámetros (13) y la definición de la función vectorial (12). Lo anterior significa que el diámetro del conjunto alcanzable $D(\infty)$ sobre el eje Oy_1 se puede ajustar si se consideran valores distintos del parámetro $\delta > 0$. Esta característica ha sido aprovechada para establecer un criterio de estabilidad robusta en Aleksandrov et al. (2016). En el siguiente ejemplo se ilustra los resultados obtenidos y se muestra un gráfico que se ha obtenido bajo la colección de macros PSTricks.

Ejemplo 1. Como caso particular para la ecuación diferencial (2) se supone que $\mu=0.2$, $\omega=1.0$ y $\delta=1.0$. Para estos valores se obtiene $\theta \approx 0.9797$, $m \approx 1.3694$ y $\Lambda \approx 0.7256$.

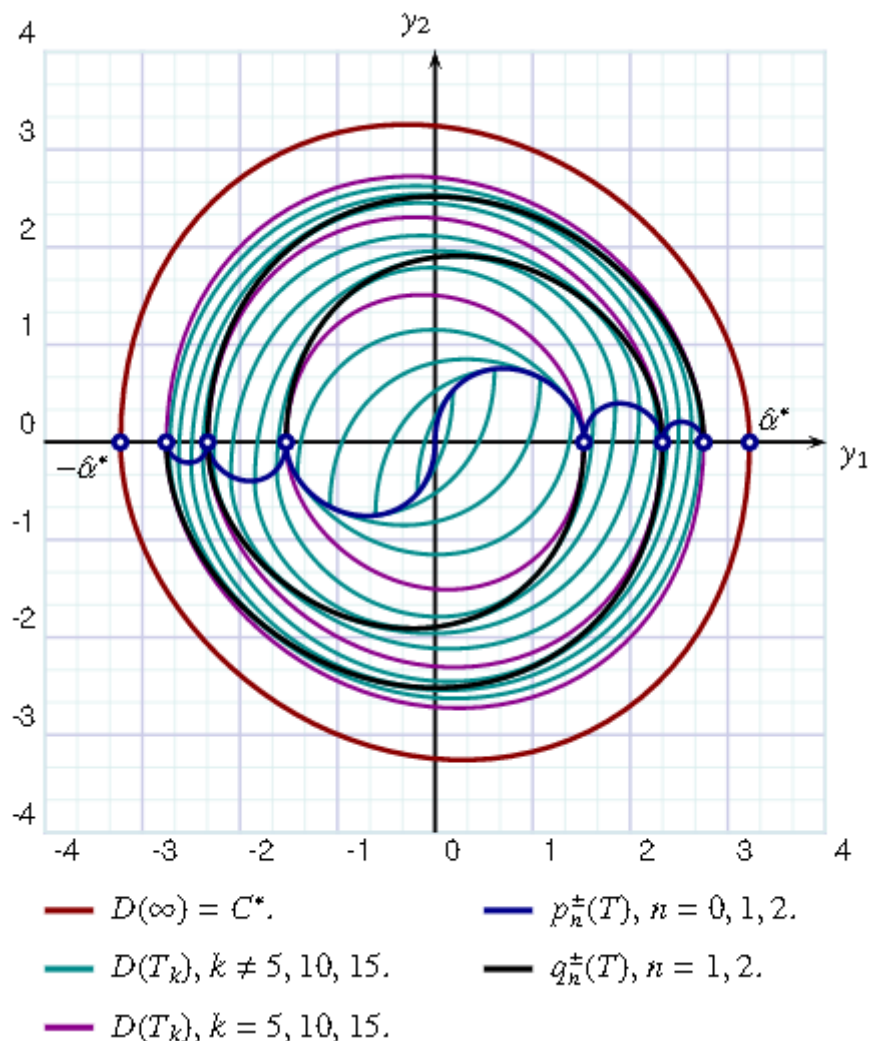


FIGURA 2:

: Conjunto de alcanzabilidad $D(\infty) = C^*$,
conjuntos de alcanzabilidad $D(T_k)$, y trayectorias $p_n^\pm$ y $q_n^\pm$ donde no son diferenciables las trayectorias que describen las fronteras de los conjuntos de alcanzabilidad $D(T_k)$ del Ejemplo 1.

En la Figura 2 se muestran diferentes conjuntos de alcanzabilidad $D(T_k)$ que se obtienen como imagen de la función $\hat{h}(\theta) = Ch(\theta)$, en los cuales se emplean los valores

$$T_{2jk} = \left(j + \frac{k}{3} \right) \frac{\pi}{\theta}, \quad j = 0, 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

es decir, $T_1 \approx 0.6412$, $T_2 \approx 1.2825$, ..., $T_{15} \approx 9.6191$. En la Figura 1 se muestran también las gráficas de las funciones $p_n^\pm$ y $q_n^\pm$ sobre las cuales la función h no es diferenciable, así como las funciones $p_n^\pm$ y $q_n^\pm$ para $n=1, 2$. De acuerdo con los resultados del corolario 1, se determina la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D(\infty) = C^*$, cuyas intersecciones con el eje Oy_1 se obtienen en los puntos $\pm \alpha^* = \pm C\alpha^*$, donde $\alpha^* \approx (3.2249, 0)$. Se verifica también que la menor y mayor distancia del origen de coordenadas de Oy_1y_2 a las rectas tangentes soporte de la frontera del conjunto de alcanzabilidad $D(\infty)$ se da en los valores $\theta_1 \approx 4.0292$, $\theta_2 \approx 5.3336$, $\theta_3 \approx 7.1708$ y $\theta_4 \approx 8.4752$, en los cuales se obtienen las distancias $\hat{\rho}(\theta_1) = \hat{\rho}(\theta_3) \approx 3.0760$ y que $\hat{\rho}(\theta_2) = \hat{\rho}(\theta_4) \approx 3.3057$.

4. CONCLUSIONES

Se ha determinado de forma explícita la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad $D(T)$ de la ecuación diferencial (2) definidos para cada instante $T > 0$. Se ha mostrado que la función vectorial que describe tales conjuntos, no es diferenciable sobre un conjunto de puntos que pertenecen a trayectorias definidas en el plano. Se ha analizado también el comportamiento de estos conjuntos cuando $T \rightarrow \infty$, en particular, se ha mostrado que la frontera del conjunto $D(\infty)$ coincide con el ciclo límite máximo $C^\#$ que se obtiene como solución del problema de desviación máxima de Bulgakov, de acuerdo con resultados conocidos en la literatura. Los resultados obtenidos se han ilustrado de forma numérica en un ejemplo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen las observaciones a este trabajo por parte de los revisores, las cuales ayudaron a enriquecerlo.

REFERENCIAS

- Aleksandrov, V. V., Aleksandrova, O. V., Konovalenko, I., Tikhonova, K. V., 2016. Perturbed stable systems on a plane. Part 1. Moscow University Mechanics Bulletin 71 (5), 108–113. DOI:10.3103/S0027133016050022
- Aleksandrov, V. V., Alexandrova, O. V., Prikhod'ko, I. P., Telmotzi Auila, R., 2007. Synthesis of selfoscillations. Moscow University Mechanics Bulletin 62 (3), 65–68. DOI:10.3103/S0027133007030016
- Blagodatskikh, V. I., 2001. Introducción al control óptimo: Teoría lineal.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, Philadelphia.
- Bugrov, D. I., Formals'kii, A. M., 2017. Time dependence of the attainability regions of third order systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 81, 106–113. DOI:10.1016/j.jappmathmech.2017.08.004
- Chernousko, F. L., 1988. Estimación de estados fase de sistemas dinámicos. Método de elipsoides. Nauka, Moscú, [En ruso].
- Elishakoff, I., Ohsaki, M., 2010. Optimization and antioptimization of structures under uncertainty. Imperial College Press, London.
- Formals'kii, A. M., 1974. Controlabilidad y estabilidad de sistemas con recursos de control acotados. Nauka, Moscú, [En ruso].
- Kumkov, S. S., Zharinov, A. N., 2004. Constructing attainability sets for nonlinear controlled systems in the plane. IFAC Proceedings Volumes 37 (17), 158–168, iFAC Workshop GSCP-04: Generalized solutions in control problems, Pereslavl Zalessky, Russia, September 21-29, 2004. DOI:10.1016/j.jmaa.2007.01.109
- Kurzhanski, A., Valyi, I., 1999. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, Boston.
- Lee, E. B., Markus, L., 1967. Foundations of optimal control theory. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Pitarch, J. L., Sala, A., Arino, C. V., 2015. Estabilidad de sistemas Takagi Sugeno bajo perturbaciones persistentes: estimación de conjuntos inescapables. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12, 457–466. DOI: 10.1016/j.riai.2015.09.007
- Sabin, G. C. W., Summers, D., 1990. Optimal technique for estimating the reachable set of a controlled n -dimensional linear system. International Journal of Systems Science 21 (4), 657–692. DOI:10.1080/00207729008910401
- Shen, C., Zhong, S., 2011. The ellipsoidal bound of reachable sets for linear neutral systems with disturbances. Journal of the Franklin Institute 348, 2570–2585. DOI:10.1016/j.jfranklin.2011.07.017

- Vinnikov, E. V., 2015. Construction of attainable sets and integral funnels of nonlinear controlled systems in the Matlab environment. *Computational Mathematics and Modeling* 26 (1), 107–119. DOI:10.1007/s10598-014-9259-5
- Zhermolenko, V. N., 1980. Sobre el problema de Bulgakov referente a la desviación máxima de un sistema oscilatorio de segundo orden. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1: Mat. Mekh.* 2, 87–91, [En ruso]. Zhermolenko, V. N., 2007. Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. *Journal of Computer and Systems Sciences International* 46, 407–411. DOI:10.1134/S1064230707030094
- Zhermolenko, V. N., 2012. On maximal deviation of linear system. *Automation and Remote Control* 73 (7), 1117–1125. DOI:10.1134/S0005117912070016