Artículos de Investigación

Principio de palomar

Palomar's Principle in the mathematical problem solving

García Marimón, Orlando Enrique; Ríos Pinto, Paulo

Orlando Enrique García Marimón
orlando.egarcia@up.ac.pa
Universidad de Panamá, México
Paulo Ríos Pinto
Universidad de Panamá, México

Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
ISSN-e: 2007-6363
Periodicidad: Semestral
vol. 7, núm. 13, 80-83, 2019
sitioweb@uaeh.edu.mx

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/595/5952976008/

Resumen: Este trabajo emplea el Principio de Palomar como ayuda en la resolución de problemas matemáticos, el cual es una regla o herramienta poderosa para el proceso de enseñanza aprendizaje de la ciencia. Se presentan datos relevantes del principio creado por Dirichlet y se hace una prueba semiformal en que está basada esta regla usando la idea de palomas y palomares. Además, se muestran problemas matemáticos como el del triángulo equilátero, el de los números consecutivos y dado seis números empleando el Principio de Palomar, rescatando que estos son expuestos en olimpiadas matemáticas.

Palabras clave: Principio, palomas, palomar, resolución de problemas.

Abstract: This work uses the Palomar´s principle as an aid in mathematical problem-solving, which is a powerful rule or tool for the teaching-learning process of science. Relevant data of the principle created by Dirichlet are presented and a semiformal test is made on which this rule is based using the idea of pigeons and nests. In addition, mathematical problems are shown such as the equilateral triangle, consecutive numbers and six numbers using the Palomar Principle, rescuing that these are exposed in mathematical Olympiads.

Keywords: Principle, pigeons, nests, problem-solving.

1. Introducción

Una característica de los procesos de instrucción basados en la resolución de problemas es que promueven la búsqueda de diferentes rutas de solución, dentro de las cuales se puede emplear el principio de Dirichlet o el principio de palomar. En Matemática hay muchas reglas que se pueden utilizarse en el aula de clases para fortalecer la resolución de problemas (RP) matemáticos, RP es un tema fundamental que se propone en los Estándares y Principios para la escuela en la educación matemática en la NCTM (National Council of Teacher of Mathematics) ya que favorece el desarrollo del razonamiento matemático. Se puede destacar que el principio de palomar es una herramienta matemática que tiene aplicaciones en diversos campos como combinatoria, teoría de números, geometría entre otras; el cual posibilita una argumentación en mutua interconexión con esos contenidos facilitando su compresión (NCTM, 2000).

Podemos agregar que la educación matemática tiene como eje primordial llevar a cabo acciones intencionadas que permitan a los docentes provocar aprendizaje en sus estudiantes describiéndolo como tareas matemáticas (Lupiañez, 2014) y el principio de palomar puede ser empleado para el desarrollo de muchas tareas escolares con alta demanda cognitiva en especial en la matemática.

Por otro lado, se presentan aspectos históricos del autor del principio (en qué año nace y datos interesantes del mismo) como algunos progresos matemáticos encontrados gracias al uso del principio de palomar. Se puede resaltar que muchos de los problemas presentados han sido elaborados para pruebas de olimpiadas matemáticas y en sus desarrollos es utilizado este principio para la resolución de ellos.

2. La Resolución como tema escolar

La resolución de problemas es un tema en la educación matemática que siempre ha llamado la atención desde la época clásica en Grecia y que actualmente la NCTM sostiene que debe ser usada en las aulas, ya que el docente debe promover el desarrollo de destrezas por medio de estrategia sencillas y fáciles de amoldar a sus alumnos.

La acción del profesor no es sólo resolver problemas en sus clases sino también proponer situaciones problemáticas bajo la forma de un contenido concreto, seleccionado y organizado para favorecer aprendizajes… (Ballesteros, 2010) y esta acción (RP) está dispuesta en muchas de las estructuras organizacionales educativas.

La NCTM (2000) como organismo educativo contempla en las normativas para el currículo escolar la incorporación de esta técnica en las aulas, la cual fomenta el desarrollo del pensamiento matemático. El principio de palomar puede ser una herramienta poderosa para la resolución de problemas que posibilite el desarrollo esperado de un razonamiento matemático bien estructurado en los alumnos, solo se necesita entender la forma de usarlo.

3. El Principio de Palomar

¿Qué es el Principio de Palomar?, revisando la literatura digital (Weisstein, 1999-2018) se encuentra una similitud en sus enunciados que de manera sencilla involucra palomas con palomares. A simple vista podría ser una pregunta fácil de responder, pero a medida que involucra más concepciones matemáticas el grado de dificultad aumenta al aplicar dicho principio.

Si tengo n + 1 palomas y tengo n nidos (palomares), al menos hay un nido que lo ocupa más de una paloma.

Esta implicación es fácil de contestar, si todas las palomas están en el mismo nido entonces la afirmación es verdadera. Sin embargo, en el peor de los casos si hay una paloma en cada nido entonces como sobra una paloma se colocaría en cualquier nido y con eso la afirmación presentada sería válida.

El principio de Palomar fue creado por Peter Dirichlet. Dirichlet fue un matemático alemán que nació el 13 de febrero de 1805, dentro de sus datos personales trabajó como profesor en la Universidad de Breslau, Berlin y Gotinga, y usó esta regla para demostrar un resultado importante para la aproximación de numero irracional (Ibañez, 2015). Además, su principio dio gran aporte a las matemáticas aplicadas y la teoría de números, el mismo también es conocido como el principio de distribución de Dirichlet o principio de la caja de Dirichlet. Gracias al principio se le atribuye el desarrollo de la función con correspondencia uno a uno y otras generalizaciones como el caso de la teoría de Ramsey.

Sin embargo, revisando nuevamente las bondades del principio estudiado; recordemos que los estándares de la NCTM (2000) proponen en los alumnos el desarrollo de destrezas que permitan el análisis de estrategias formuladas en el aula de clases para el desarrollo de su pensamiento matemático y el principio de palomar es una regla que puede promover ese desarrollo.

Por ejemplo, un caso muy sencillo presentado en una clase sería ¿cuántas medias como máximo tendría que sacar de una gaveta en un lugar oscuro para tener dos del mismo color sabiendo que solo hay negras y azules?

Aquí solo hay la posibilidad de tener dos cajones (palomares) para colocar las medias (palomas) negras y otro para las azules. Lo máximo serian tres medias, ya que con esta idea del principio de palomar logramos colocar en el peor de los casos dos del mismo color al tercer intento, aunque se podría sacar dos no hay seguridad alguna que ambas sean del mismo color. Con este tipo de análisis fomentamos el desarrollo de un pensamiento mejor estructurado, de manera que los alumnos construyan todas las posibles soluciones.

4. Problemas que usan el Principio de Palomar

Mostremos el desarrollo de un problema geométrico (Grimaldi, 1998). Probar que, si se escogen cinco puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1 unidad, debe haber dos de ellos a distancia menor o igual que ½. Construyamos un triángulo como se muestra en la Figura 1.

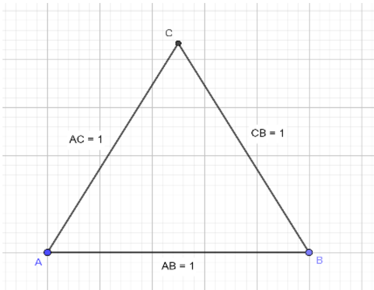

FIGURA 1

Dividamos el triángulo original uniendo los puntos medios de sus lados en cuatro triángulos de lado ½ unidad todos equiláteros (no es complicado verificar que estos 4 triángulos son equiláteros usando los criterios de congruencia). Alguno de ellos debe contener dos o más de los cinco puntos que se pueden hacer de forma arbitraria antes de dividir el triángulo original en 4 triángulos de esta forma práctica y sencilla logramos solucionar el problema ya que los puntos dentro de un triángulo tendrán una distancia menor a ½ tal y como se muestra en la Figura 2 con una construcción realizada con la ayuda de un software matemático. ¿De qué otra manera podrías encontrar una solución y cuánto tiempo te tomaría?

Para enfocar este problema desde la perspectiva del principio de palomar debemos establecer como los palomares a los cuatro triángulos formados a partir de los puntos medios del triángulo equilátero original y definir como las palomas a los 5 puntos interiores al triángulo original siendo cada punto una paloma. Tendremos así 5 palomas y 4 palomares; pensando en el peor caso de que en cada triángulo se encuentre 1 punto, entonces en alguno de los palomares debe estar el quinto punto.

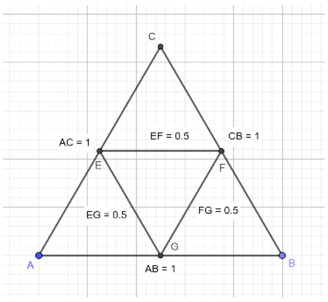

FIGURA 2

Podemos observar la fortaleza que presenta este principio para el desarrollo de un pensamiento geométrico usando paquetes como el Geogebra y como menciona Losada (2007) que se observa en el software un cuidadoso interés por las representaciones que ayuden a la comprensión de los conceptos básicos (en la figura 2 se representan los palomares y las palomas respectivamente por puntos y triángulos). Es importante establecer que los alumnos no confundan las palomas de los palomares (cajas) ya que podría cometerse errores al aplicar el principio de Dirichlet.

Queremos hacer la observación que, aunque las construcciones anteriores (Figura 1 y 2) se han realizado con el uso de un software también se pueden hacer por medio de regla y compas de manera que se puede igual promover el desarrollo de las mismas destrezas.

Desarrollemos ahora un problema aritmético, sean cuatro números naturales todos mayores que 3, siempre habrá al menos dos de ellos cuya diferencia sea un múltiplo de 3.

Dividir los cuatros números naturales entre tres, cada uno tendrá uno de estos posibles restos r1, r2, r3, r4 # {0,1,2}. Como hay cuatro números con sus respectivos restos (palomas) y tres posibles restos (palomares), por el principio del palomar seguro que al menos dos de los cuatros números dados tienen el mismo resto común cuando se dividen entre 3.

La expresión de esos dos números será 3k+r y 3t+r , siendo r el resto común y k, t # N. Si restamos esos dos números nos quedará 3(k - t) que es un múltiplo de tres.

¿Será que en el caso de cinco números distintos mayores que cinco, siempre hay dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo de cuatro?... Este resultado es fácilmente generalizable con la estrategia utilizada con anterioridad a la siguiente proposición, lo cual potencia un desarrollo más elaborado y esperado a fomentar en los alumnos un pensamiento algebraico.

Desarrollemos el caso general del problema anterior. Dados n+1 número naturales cualesquiera, siempre habrá dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo n.

Imaginemos que son n+1 números y que existen 2 de ellos que su diferencia es múltiplo de n. Iniciamos dividiendo los n+1 números entre n, al dividir los n+1 números entre n se obtienen los siguientes posibles restos: 0, 1, 2, 3, ... , n - 1 . Bien al ser n+1 números y n posibles restos al menos dos números tendrían el mismo resto y estos números los podríamos escribir de la siguiente manera: uno de los números podría ser nk+r y un segundo número podría ser nt+r. Como intentamos demostrar que de los n+1 números, siempre existen dos cuya diferencia es múltiplo de n. Realizamos la diferencia de los dos números que comparten el mismo resto teniendo:

Imaginemos que son n+1 números y que existen 2 de ellos que su diferencia es múltiplo de n. Iniciamos dividiendo los n+1 números entre n, al dividir los n+1 números entre n se obtienen los siguientes posibles restos: 0, 1, 2, 3, ... , n - 1 . Bien al ser n+1 números y n posibles restos al menos dos números tendrían el mismo resto y estos números los podríamos escribir de la siguiente manera: uno de los números podría ser nk+r y un segundo número podría ser nt+r. Como intentamos demostrar que de los n+1 números, siempre existen dos cuya diferencia es múltiplo de n. Realizamos la diferencia de los dos números que comparten el mismo resto teniendo:

(nk+r)-(nt+r)=nk-nt=n(k - t)

n(k - t) independientemente del resultado de k - t sigue siendo múltiplo de n. Y de esta manera encontraríamos los dos números que su diferencia es múltiplo de n. Desde el punto de vista del principio palomar, tendríamos que la cantidad de palomares son la cantidad de restos posibles en una división entre n entonces es n palomares y hay n+1 palomas que indican la cantidad de números dados. Lo que indica que hay mas palomas que palomares, por lo cual, dos de estos números tienen el mismo resto y al realizar la sustracción de estos nos daría un múltiplo de n.

Un último problema de olimpiada. Dado seis números distintos cualesquiera del 1 al 10, demostrar que va a haber dos de ellos que sumen 11.

En este caso hay seis palomas que serán los seis números y hay cinco palomares que son las posibilidades de obtener una suma de 11 con dos números del 1 al 10: {1,10}, {2,9}, {3,8}, {4,7}, {5,6}. Lo ilustramos con la Figura 3

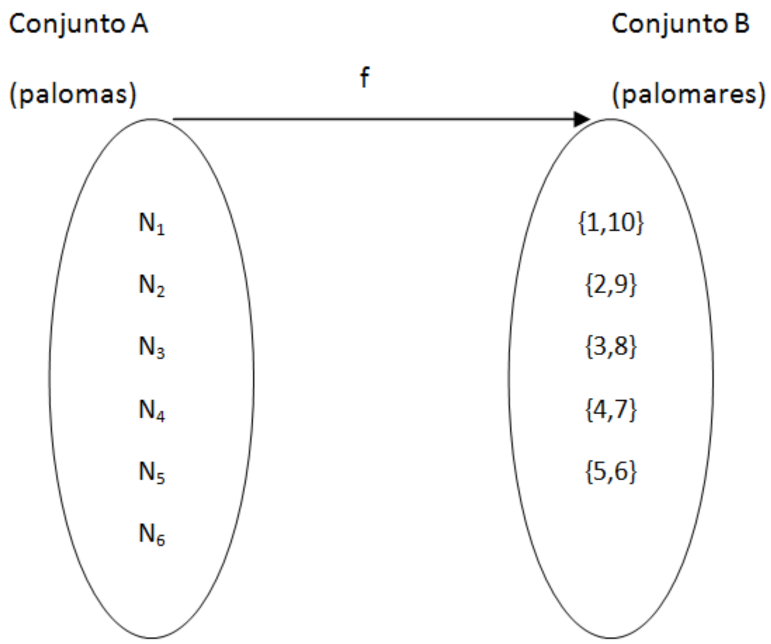

FIGURA 3
Los 6 números y las 5 sumas de 11

Por el principio del palomar, al menos dos de esos 6 números irán a parar al mismo palomar y tendríamos los dos números que suman 11. Le invitamos a darle valores a los números n1, n2,...,n6 y comprobar que al menos dos de los números que usted elija irán a dar en alguno de los 5 palomares propuesto en la figura 3

Estos tipos de problemas nos llevan a la idea de formular como maestros tareas en el aula de clases con los alumnos que implementen la resolución de problemas usando la herramienta del Principio de palomar. En efecto, Santos Trigo (1992) sostiene que los maestros son agentes importantes para la ejecución de actividades de aprendizaje. Todo esto fomentaría el pensar matemáticamente en la escuela en el caso de proponer otras formas de desarrollar las respuestas de nuestros alumnos.

5. A modo de cierre

l principio de Dirichlet (principio de palomar) es una regla sencilla de usar para los maestros; en nuestros desarrollos se observa que partimos de lo sencillo, de caso particulares finitos a casos generales. Tomando el bosquejo de n palomares (cajas) y m palomas (objetos) con m>n, se pueden abordar problemas matemáticos desarrollándolos de manera tan fácil teniendo en cuenta solo la concepción de distribuir objetos en cajas.

Es necesario conocer estrategias para abordar en la resolución de problemas y el Principio de Palomar es una de las muchas reglas que las matemáticas poseen, la cual puede servir a los alumnos que constantemente se enfrentan a problemas matemáticos. Más allá de las formalidades de la resolución de problemas por inducción matemática, reducción al absurdo, contraejemplo entre otras, aquí tiene una forma amigable de resolver problemas en la escuela.

Esperamos que el presente trabajo haya permitido conocer sobre principio de Dirichlet en la resolución de problemas matemáticos. Consideramos que este principio sirve de "puente" en la resolución de problemas matemáticos para todos aquellos alumnos que al enfrentarse a un problema matemático se llenan primero de bloqueos mentales como sentimientos de frustración. Por el contrario, vean los problemas como algo divertido, como un juego de estrategia en el cual se cuenta con una gama de herramientas matemáticas como la expuesta en este trabajo.

Finalmente, vemos prudente incluir principios como este en los cursos de matemáticas para el desarrollo de situaciones problemas que generen la modificación de las formas de pensar en los alumnos.

Referencias

Ballesteros, J. G. (2010). Aplicación de la estrategia de resolución de problemas en la enseñanza de Física, Química y Matemáticas en la USTA. En Revista Hallazgos. 7(14), 129-148

Ibáñez, R. (2015). El principio del palomar, una potente herramienta matemática (parte 1), Cuaderno de Cultura Científica.11 de febrero de 2015. Recuperado de https://culturacientifica.com/2015/02/11/el-principio-del-palomar-una-potente-herramienta-matematica-parte-1/

Grimaldi, R. (1998). Matemáticas Discreta y Combinatoria. Una Introducción con aplicaciones. México :Addison-Wesley Iberoamericana

Losada, R. (2007). Geogebra: la eficiencia de la intuición. La gaceta de RSME, 10.1, 223-239

Lupiáñez, J. L. (2014). Tareas que promueven el desarrollo de la competencia matemática. Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad (8 de marzo de 2014). Bogotá.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics. NCTM: Reston, VA.

Santos Trigo, L.M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. Revista Educación Matemática, 4, 2.

Weisstein, E. (1999-2018). Dirichlet's Box Principle. MathWorld. Wolfram Research, Inc. http://mathworld.wolfram.com/DirichletsBoxPrinciple.html