ARTIGOS CIENTÍFICOS

UNA MIRADA AL TRABAJO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES EN EL DOMINIO DEL ANÁLISIS

UM OLHAR DO TRABALHO MATEMÁTICO DE ESTUDANTES NO DOMÍNIO DA ANÁLISE

A VIEW OF STUDENTS' MATHEMATICAL WORK IN THE DOMAIN OF ANALYSIS

Flores Salazar, Jesus Victoria; Vivas Pachas, Jorge Luis; Ticse Aucahuasi, Marco Antonio

Jesus Victoria Flores Salazar
jvflores@pucp.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Jorge Luis Vivas Pachas
jorge.vivas@pucp.edu.pe
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Perú

Marco Antonio Ticse Aucahuasi
markito2016@ufmg.br
Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática, Brasil
ISSN: 1980-3141
ISSN-e: 1980-3141
Periodicidad: Cuatrimestral
vol. 16, 2021
revistarematec@gmail.com

Recepción: 30 Junio 2021
Aprobación: 22 Octubre 2021
Publicación: 19 Noviembre 2021

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/574/5744690015/

DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p262-276.id485

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.

Resumen: El artículo presenta una mirada del trabajo matemático de estudiantes en el dominio del Análisis. Para ello, se presenta un recorte de la parte experimental de tres investigaciones que caracterizan el trabajo matemático de estudiantes cuando resuelven tareas en el dominio del análisis, en particular, al movilizar nociones de tasa de variación, interpretación geométrica de la derivada y función exponencial. En cada investigación, se analizaron la producción matemática de los estudiantes empleando aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) como referencial teórico. En base a lo presentado en el artículo, se señala la pertinencia que el ETM ha alcanzado en la comunidad científica de la Didáctica de la Matemática, pues es considerado una herramienta teórica potente para organizar aspectos epistemológicos y cognitivos identificados en la producción matemática de estudiantes a través de la activación de sus diferentes génesis y planos verticales al resolver una tarea en el dominio del análisis. Así mismo, se destaca el rol del artefacto simbólico y digital en la producción matemática.

Palabras clave: Trabajo matemático del estudiante, Dominio del Análisis, Artefacto.

Resumo: O artigo apresenta o trabalho matemático de estudantes no domínio da Análise. Para isso, se apresenta um recorte da parte experimental de três pesquisas que caracterizam o trabalho matemático dos estudantes na resolução de tarefas no domínio da Análise, em particular, na mobilização de noções de taxa de variação, interpretação geométrica da função derivada e exponencial. Em cada estudo, a produção matemática dos estudantes foi analisada utilizando aspectos do Espaço de Trabalho Matemático (MWS) como referencial teórico. Com base no apresentado no artigo, é ressaltada a relevância que o ETM tem alcançado na comunidade científica da Didática da Matemática, uma vez que é considerada uma ferramenta teórica potente para organizar aspectos epistemológicos e cognitivos identificados na produção matemática dos estudantes por meio da ativação de suas diferentes gêneses e planos verticais na resolução de uma tarefa no domínio da Análise. Igualmente, o papel dos artefatos simbólicos e digitais na produção matemática é destacado.

Palavras-chave: Trabalho matemático do estudante, Domínio da análise, Artefato.

Abstract: The article presents a view of the mathematical work of students in the domain of Analysis. For this purpose, we present a selection of the experimental part of three investigations that characterize the mathematical work of students when solving tasks in the domain of Analysis, in particular, when mobilizing notions of rate of variation, geometric interpretation of the derivative and exponential function. In each research, students' mathematical production was analysed using aspects of the Mathematical Workspace (MWS) as a theoretical framework. Based on that presented in this paper, the relevance that the MWS has achieved in the scientific community of Didactics of Mathematics is pointed out, since it is considered a very powerful theoretical tool to organize epistemological and cognitive aspects identified in the mathematical production of students through the activation of its different genesis and vertical planes when solving a task in the domain of Analysis. As well, the role of the symbolic and digital artifact in mathematical production is stressed.

Keywords: Student mathematical work, Analysis domain, Artifact.

INTRODUCCIÓN

Como es de interés en la presente investigación presentar el trabajo matemático de estudiantes en el dominio del análisis, se debe tomar en cuenta que especialmente en el nivel secundario, se hace referencia al dominio del análisis como Precálculo o Cálculo. Cabe resaltar que los esfuerzos por diferenciar Cálculo y Análisis no son actuales, por ejemplo, Klein (1908) no hace la diferencia entre Cálculo infinitesimal y Análisis, tampoco en obras como la de Bourbaki (1969) o Lakatos (1978) se hacen diferencias explícitas. Sin embargo, los tres se refieren a estos términos como Cálculo, Cálculo infinitesimal y Análisis.

Para situarnos en el contexto latinoamericano y específicamente en el peruano, en el Currículo Nacional para la Educación Básica - CNEB (PERÚ, 2016), se observa que algunos contenidos de Precálculo, son enseñados en los colegios públicos de nivel secundaria como, por ejemplo, los contenidos de función lineal, función cuadrática y función exponencial. Sin embargo, en colegios privados peruanos con programa de Bachillerato Internacional, los estudios matemáticos de nivel medio –dirigidos a estudiantes con cierto dominio de la matemática fundamental, o con habilidades y dominio de la matemática– y los estudios matemática nivel superior –dirigidos a estudiantes con dominio de las matemáticas y ampliación de las matemáticas nivel superior– se enseñan temas de Precálculo como funciones lineales, funciones cuadráticas, funciones exponenciales, función inversa, función exponencial, función logarítmica, función racional y función polinómica. Así como también, temas de cálculo diferencial como, cálculo de límites y derivadas, aplicación de derivadas y problemas de optimización, entre otros. Precisamente en el programa de Bachillerato Internacional se evidencia con mayor nitidez la vinculación con los temas de Cálculo que posteriormente son enseñados en carreras de ciencias como ingeniería o matemática de nivel superior.

Por otro lado, con respecto a investigaciones que se realizan utilizando la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en el dominio del análisis, estas incluyen también algunos proyectos internacionales que se vienen desarrollando desde 2018 hasta la actualidad entre la Pontificia Universidad Católica del Perú y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile y el Laboratorio de Didáctica André Revuz - Universidad de Paris, Francia. Los proyectos mencionados tienen como uno de sus propósitos desarrollar dispositivos para la enseñanza del Precálculo y Cálculo, tanto en nivel secundario como superior, en los que el uso de la tecnología digital juega un papel trascendental (SALAZAR; CARRILLO 2019, SALAZAR; ALMONACID 2020; TICSE; SALAZAR; MONTOYA-DELGADILLO 2020).

En cuanto a la tecnología digital, se puede mencionar que el enfoque semiótico-instrumental (ARZARELLO, 2006) y los conceptos de razonamiento figurativo y figuro-discursivo (RICHARD, 2004) permitieron evidenciar el impacto de la utilización de la tecnología digital, especialmente en la lógica de la prueba en matemática. Por otro lado, las investigaciones de Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) y Kuzniak, Nechache y Salazar (2020) muestran que el uso de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en tareas matemáticas en el dominio del análisis y en otros dominios es fundamental. De hecho, en estos estudios, una tarea se da en un dominio inicial, por ejemplo, en Geometría, pero luego se desarrolla en otro dominio como el del análisis promovido mediante el uso de tecnología digital, en el cual la tarea propuesta puede ser resuelta. Entonces es natural preguntarse por las características de los Espacios de Trabajo Matemático, asociados a diferentes artefactos digitales (software) que dan acceso a diferentes soluciones de tareas o problemas.

También, por ejemplo, la investigación de Minh y Lagrange (2016) realiza un análisis crítico de una sesión de clase que implica un problema de optimización geométrica clásica. Los investigadores abordan el tema mediante el desarrollo de diferentes ETM-funcionales en el que la idea de función varía de una dependencia entre objetos geométricos a una dependencia entre cálculos que va más allá de una expresión funcional algebraica.

Asimismo, Pluvinage, Carrión Miranda y Adjiage (2016) en su estudio amplían los ETM personales de los estudiantes relacionados con las funciones. Para ello, al utilizar el artefacto digital GeoGebra dieron a los estudiantes la oportunidad de desarrollar varias vistas de asíntotas y rectas tangentes, jugando con una oposición instrumental entre perspectivas macroscópicas y microscópicas, disponibles en el software. En la misma línea de pensamiento, Santos Trigo, Moreno Armella y Camacho Machín (2016) investigan en relación a la resolución de problemas con el uso de tecnología digital y con el soporte del ETM analizan la posible coordinación entre los planos epistemológico y cognitivo para subrayar la importancia de ofrecer un ambiente de aprendizaje donde los fundamentos epistemológicos/disciplinarios pueden articularse de manera explícita con los sistemas cognitivos de los sujetos.

Por otro lado, Páez y Pluvinage (2018) estudian cómo el control del zoom del artefacto digital GeoGebra favorece la visualización y la activación de los planos verticales en estudiantes de Ingeniería. También, López (2018) investiga el trabajo matemático de estudiantes y la activación de planos verticales a partir de una tarea sobre funciones en la que utilizan un applet de GeoGebra como artefacto digital.

ASPECTOS DE LA TEORÍA ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO-ETM

Señalamos que, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran que el trabajo matemático que realiza el estudiante le permite la construcción de su propio conocimiento sobre la matemática. Sin embargo, afirman que este proceso es gradual, interactivo y complejo; también sostienen que la evolución de los conocimientos matemáticos dependerá de las tareas propuestas y de las actividades que el estudiante realice para resolverlas. En relación con las nociones básicas del ETM, la investigación de Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier (2015) presenta las nociones de paradigma, dominio, trabajo matemático y tarea. Explicitando que paradigma es el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico; dominio matemático es determinado según la naturaleza de los objetos estudiados y de los paradigmas que lo caracterizan, por ejemplo, dominio de geometría, álgebra, aritmética, análisis, etc.; trabajo matemático consiste en resolver problemas matemáticos, identificar problemas y organizar contenidos dentro de un dominio específico.

También, indican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. La génesis semiótica es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación. La génesis instrumental permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático y; la génesis discursiva utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental.

Además, Kuzniak y Richard (2014) identificaron tres planos verticales en el ETM (ver Figura 1) cada uno de los cuales está definido por la interacción de dos génesis: semiótica e instrumental [Sem-Ins]; instrumental y discursiva [Ins-Dis] y, semiótica y discursiva [Sem-Dis].

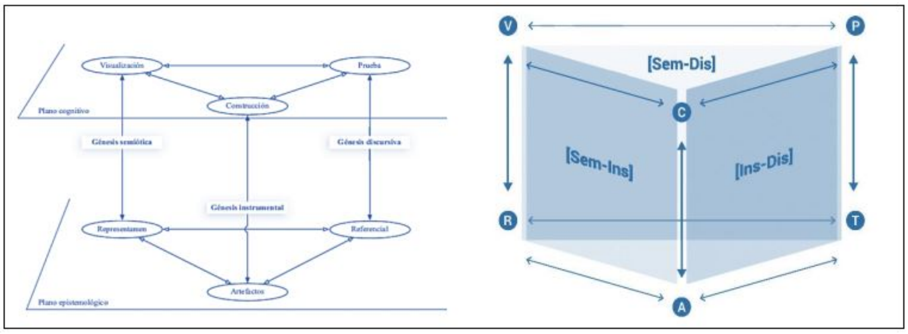


FIGURA 1
Modelo ETM
Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p. 21) y Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p.726)

Con relación a los planos: [Sem-Ins] asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental. Existen dos formas de trabajo, una orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) y la otra hacia la interpretación de los datos brindados por los artefactos; [Ins-Dis] asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental y, [Sem-Dis] asociado a las génesis semiótica y discursiva, en el cual se distinguen los razonamientos argumentativos. Por otro lado, el trabajo matemático es caracterizado por sus respectivos paradigmas.

En ese sentido, Montoya y Vivier (2016) definen los tres paradigmas del dominio del Análisis: Análisis Aritmético-Geométrico (AG), que permite interpretaciones y suposiciones implícitas sobre la base de la Geometría o el mundo real; Análisis Calculatorio (AC), en el cual las reglas del Cálculo son algo explicitas, pero no resulta necesario reflexionar sobre su naturaleza y; Análisis Real o infinitesimal (AR), que involucran aproximación y vecindad, incluso topológico.

TRABAJO MATEMÁTICO Y SU ANÁLISIS

Para evidenciar el trabajo matemático de estudiantes se presentan tres tareas en el dominio del análisis con sus respectivas producciones esperadas. Estas tres tareas corresponden a parte de investigaciones realizadas por Ticse (2021), Vivas (2021) y Chacón (2021).

En primer lugar, se presenta un recorte de la parte experimental correspondiente a la investigación de Ticse (2021) que estudia el trabajo matemático de las producciones de estudiantes de educación secundaria (16-17 años) al resolver la tarea llamada carrera de sacos (Figura 2) relacionada con la tasa de variación como velocidad (media e instantánea).

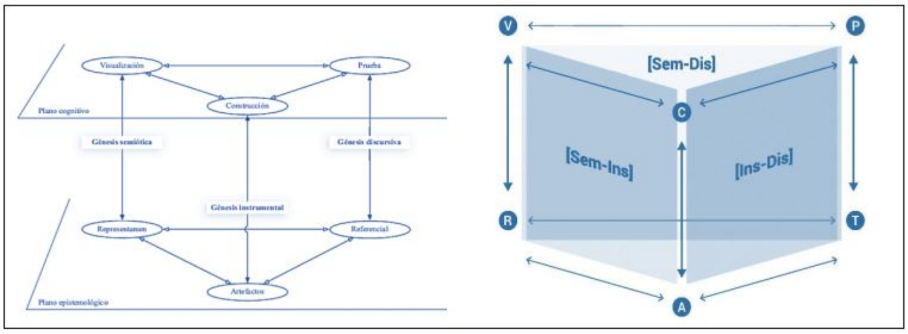


FIGURA 2
Tarea “carrera de sacos”
Fuente: Ticse (2021, p. 49)

La tarea tiene los ítems 1 y 2. El ítem 1, cumple la función de guía y tiene por finalidad que los estudiantes grafiquen en el applet del GeoGebra “Parte2_GrupoN.ggb” la recta secante y su pendiente en un par de puntos de la curva #(#) relacionada al deslizador #

Por su parte, el ítem 2 tiene por finalidad que los estudiantes determinen la velocidad media a partir de la manipulación de herramientas del GeoGebra o bajo el uso de la *fórmula de la velocidad media*. En términos del ETM, se espera la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

La génesis semiótica se podría activar cuando los estudiantes visualicen e interpreten la pendiente de la recta secante a la curva, la cual está graficada en la tarea 1 (ver Figura 3) como una representación de la velocidad media. Luego, a partir del proceso de visualización, se considera a la pendiente de la recta secante ## , desde el ETM, como artefacto simbólico.

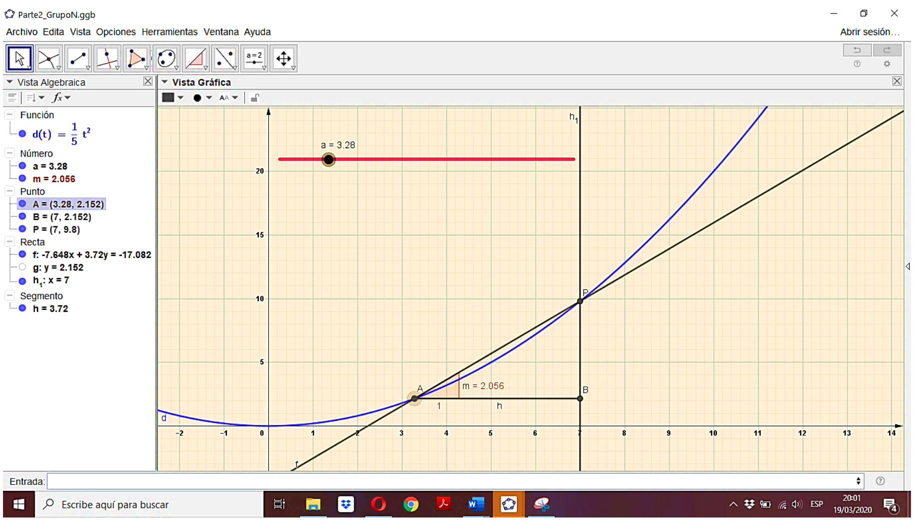


FIGURA 3
Applet en GeoGebra de la tarea
Fuente: Ticse (2021, p.73)

En cuanto a la génesis instrumental, esta se activa cuando el artefacto: *fórmula de la velocidad media*, sufre una instrumentalización que guía a los estudiantes a observar y explorar procedimientos (experimentación) hacia la solución de la tarea. De esta manera, se espera que los estudiantes realicen operaciones en el registro algebraico, a partir de tal artefacto. Asimismo, se activa el plano vertical [Sem-Ins].

PDF generado a partir de XML-JATS4R

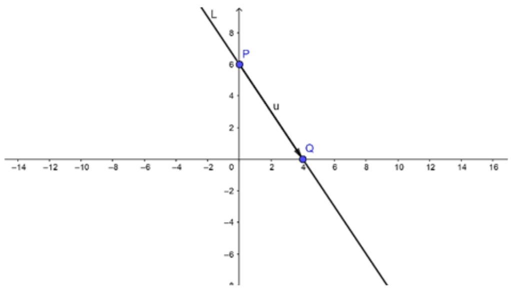
$$v_1 = \frac{d_{\text{final}} - d_{\text{final}}}{t_{\text{final}} - d_{\text{final}}} = \frac{9{,}8\text{-}5}{7\text{-}5} = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}\ 4m\Big/s$$
$$v_2 = \frac{d_{\text{final}} - d_{\text{final}}}{t_{\text{final}} - d_{\text{final}}} = \frac{20{,}9{,}8}{10\text{-}7} = \frac{10{,}2}{3} = 3{,}\ 4m\Big/s$$

Además, se piensa que al interpretar la velocidad media como la pendiente de la recta secante y/o la razón de dos magnitudes variacionales, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG). Asimismo, caso queden definidas explícitamente las reglas del Cálculo para hallar tal velocidad, en consecuencia, el paradigma Análisis Calculatorio (AC) es privilegiado.

En segundo lugar, se presenta un recorte de la parte experimental correspondiente al trabajo de Chacón (2021) que tiene como finalidad introducir la interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de ingeniería para que se apropien de la interpretación geométrica de la derivada con ayuda del software GeoGebra. La Figura 4 presenta la tarea propuesta.

Siga las indicaciones y abra el archivo P2 de GeoGebra. Luego, responda las siguientes preguntas:

a) Como se observa puede manipularse lo puntos P y Q sobre la recta, y su ecuación varia. ¿A qué se debe eso?
b) Trata de eliminar “y” de la ecuación, fijarse con mover P y Q ¿Te basta con mover uno? Si necesitas precisión puede utilizar el teclado e ingresar su información.



c) Coloca los puntos en forma vertical ¿Qué podrías afirmar sobre su pendiente?

FIGURA 4
Tarea propuesta e imagen en GeoGebra
Fuente: Chacón (2021, p. 56)

Chacón (2021) afirma que se espera del ítem a) que el estudiante active su referencial teórico sobre las representaciones de la recta y la relación con la pendiente. Lo que podría permitirle para observar los cambios en la ecuación. Entonces, desde el ETM esta tarea permitiría activar la génesis semiótica, tomando como representamen la pendiente de la recta, que le permitirá visualizar la recta en su representación gráfica con la finalidad de que sea transformada a su representación algebraica.

Además, la investigadora considera que la ecuación de recta en su forma más básica, #: # = ## + #. Según la información, la recta pasa por los puntos #(0,6) y #(4,0) y para determinar su ecuación (de la recta #) es necesario determinar su pendiente e identificar el punto de intersección con el eje de las ordenadas. Se sabe que la pendiente # está definida por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. En el caso particular de # la ecuación de su pendiente es # = -3/2 y # = 6, por lo tanto, la representación algebraica de la recta dada es: $L: y = -\frac{3}{2}x + 6$. Con ello, según la investigadora, es posible que el estudiante afirme:

- Si # y # se “mueven” sobre la misma recta # no cambia en la ecuación lapendiente ni el punto de intersección “b”.

- Si # y # se “mueven” fuera de la recta dada y forman nuevas rectas, la inclinaciónde las rectas varían entonces las pendientes varían.

Desde el ETM, esto evidencia que se podría activar la génesis instrumental al manipular, en GeoGebra, la representación de la recta. Además, se puede afirmar que la activación de una génesis discursiva basada en el nuevo referencial y la prueba, al explorar la representación gráfica del artefacto digital GeoGebra. Por ello, es posible mostrar la activación plana [Sem-Ins] y el plano [Ins-Discusivo]. Cabe señalar que el trabajo matemático en juego se caracteriza en el paradigma del Análisis Geométrico (AG) y del Análisis Calculatorio (AC).

Por otro lado, en dicha investigación Chacón (2021) señala que el ítem b) tiene por finalidad activar una génesis considerando al mouse; en el sentido del ETM, como artefacto que permita la manipulación de la representación de la recta, desplazándola en diferentes direcciones alrededor de un punto con lo que podrá construir infinitas rectas diferentes, con una ecuación diferente. Estas acciones, según la investigadora, podrían permitir activar la génesis semiótica al visualizar las diferentes direcciones que puede tomar la recta. Además, con la activación del referencial teórico, el plano epistemológico, una recta horizontal con una sola variable (#) tendría la ecuación #: # = # con # = 0. Por ello se espera que se pueda afirmar que sólo es necesario mover un punto, con lo cual se activaría la génesis discursiva al tener que explicitar sus conjeturas. De tal manera que la investigadora afirma que se podría evidenciar la activación del [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis]. Este trabajo matemático se caracteriza en el paradigma del Análisis Geométrico (AG).

En el último ítem de la tarea mencionada (Figura 4), la autora espera que el estudiante active tanto la génesis instrumental como la génesis semiótica tomando de representamen la pendiente de la recta, la cual se definirá con ayuda de su referencial como # : # = #; este trabajo matemático está en el marco del paradigma del análisis Geométrico.

Cabe señalar que en la pregunta anterior ya se observa a la pendiente, entonces para afirmar que no está definida realiza un proceso de prueba en base a su referencial teórico sobre la pendiente de una recta y se prueba de la siguiente manera: Se sabe que el valor de la pendiente se puede determinar haciendo uso de la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, en ese sentido se activará una génesis instrumental en el estudiante al utilizar la formula como artefacto para realizar la prueba y con ello esta prueba permitirá afirmar y fundamentar sobre la pendiente haciendo uso del discurso matemático, lo que evidencia la activación de la génesis discursiva.

Con relación a la tercera tarea que se presenta en este articulo (ver Figura 5), es un recorte de la parte experimental correspondiente al trabajo de Vivas (2021), que tiene por finalidad representar gráficamente una función exponencial a partir de su representación algebraica. Esta tarea ase realizó con estudiantes (16 y 18 años) de primer ciclo de carreras de humanidades.

Pregunta 1

Esboce la representación gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. Indique su rango, su asíntota e sus interceptos con los ejes coordenados.

FIGURA 5
Tarea propuesta sobre función exponencial
Fuente: Vivas (2021, p. 41)

A partir de la identificación de la regla de correspondencia de #, se espera que reconozcan la representación algebraica de una función exponencial de la forma #(#) = # · ## + #. Es decir, que los estudiantes activen como referencial la regla de correspondencia de # para impulsar la activación de la génesis semiótica. Además, que reconozcan y grafiquen la recta horizontal que representa la asíntota de la gráfica de # a partir de la identificación del valor del parámetro que aparece dentro de su regla de correspondencia (#(#) = $(\frac{1}{2})^{\#}$ + 1).

De acuerdo con Vivas (2021), se espera que los estudiantes activen la génesis semiótica y realicen un proceso de visualización, cuando reconozcan la ecuación de la recta horizontal que representa su asíntota (#: # = 1) y que a partir de la identificación del parámetro que aparece dentro de su regla de correspondencia (#(#) = $(\frac{1}{2})^{\#}$ + 1), reconozcan que # es estrictamente decreciente. En términos de ETM, se espera que activen la génesis semiótica cuando tomen como representamen el valor de la base y realicen un proceso de visualización al reconocer la monotonía de #. En seguida, se espera que los estudiantes elaboren una tabla que contenga algunos valores para #. Esto evidenciará la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto simbólico la regla de correspondencia de #, por consiguiente, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

También, a partir de la representación tabular de #, es posible que representen gráficamente los puntos obtenidos, lo que activaría la génesis instrumental. Igualmente, podrían graficar una curva que contenga todos los puntos de paso (ver Figura 6).

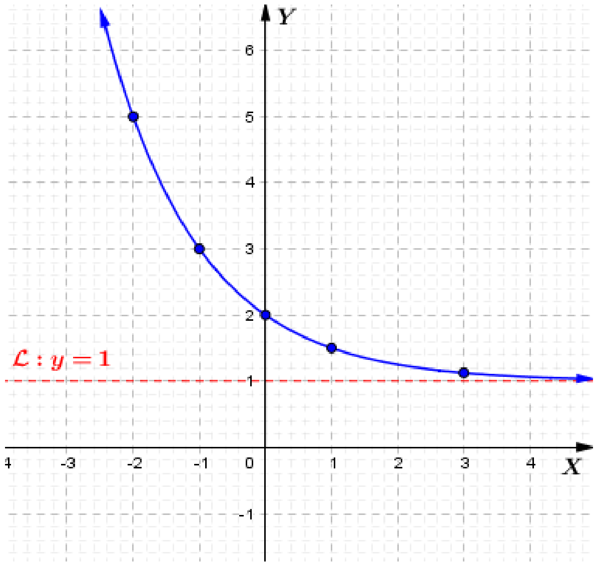


FIGURA 6
Representación gráfica - función exponencial
Fuente: Vivas (2020 p. 47)

En términos del ETM, se espera que activen la génesis discursiva debido a que el referencial es el dominio de # (###(#) = #). También se piensa que los estudiantes activarán la génesis semiótica cuando tomen como referencial la regla de correspondencia de # o su representación gráfica para determinar que la ecuación de su asíntota es # = 1.

Además, a partir de su representación gráfica, se piensa que los estudiantes determinarán el intervalo]1; +∞[que representa el rango de #. En términos del ETM, se espera que se activa la génesis semiótica al tomar como representamen a la representación gráfica de # su asíntota para realizar un proceso de visualización que les permitan reconocer los valores que toman las imágenes de # y, en consecuencia, el rango de #.

Con relación a los interceptos, Vivas (2021), espera que los estudiantes determinen que # no tiene intercepto con el eje de abscisas a partir de su representación gráfica y su asíntota. Es decir, que realicen la activación de la génesis discursiva al tomar como referencial la ecuación de la asíntota # = 1 y el rango]1; +∞[para realizar un proceso de prueba permitiéndoles que realicen la justificación.

Así mismo, para hallar el intercepto de # con el eje de ordenadas, los estudiantes podrían determinarlo al evaluar # en # = 0, en caso no lo hayan realizado para obtener su representación tabular. Es decir, se espera la activación del plano vertical [Ins-Dis] debido a que, por una parte, tomarían como artefacto la representación algebraica de # para realizar un proceso de construcción al evaluarla en # = 0 y al mismo tiempo esta representación algebraica sería tomada como referencial para realizar una prueba que permita obtener el intercepto con el eje de ordenadas (cuando # = 0).

En esta tarea en específico, que se realizó en un ambiente de lápiz y papel, se analiza la producción de un estudiante al que llamaremos Guido, quien desarrolla la tarea de forma individual en un tiempo aproximado de 40 minutos.

Para el análisis del trabajo matemático de Guido se utiliza el análisis descendente del método del ETM,

> El análisis descendente consiste en dividir la actividad de una persona durante la realización de una tarea en una serie de acciones matemáticas. Estas acciones se analizan en detalle utilizando herramientas de la teoría de los ETM y se describen utilizando los diferentes componentes del diagrama de los ETM. Estas acciones y su interpretación en la teoría de ETM se resumen en una tabla de doble entrada que permite seguir paso a paso en el tiempo la realización de la tarea y la circulación del trabajo matemático a través de los diferentes planes del ETM. (KUZNIAK; NECHACHE, 2018, p.08).

Los autores señalan que la acción matemática es objetivada y tomada del discurso escrito (producción escrita) u oral (entrevista, etc.) y que un episodio está constituido por una serie de acciones matemáticas que el estudiante realiza para llevar a cabo una tarea.

En el análisis del trabajo matemático del estudiante, se identificaron ocho acciones agrupadas en cinco episodios (ver tabla 1).

TABLA 1
Episodios y acciones matemáticas

Episodio	Detalle del episodio	Nro. acciones
1	Representación tabular de	1
2	Representación gráfica de	3
3	Justificación de la asíntota de	1
4	Justificación del rango de	1
5	Justificación de los interceptos de	2

Fuente: Adaptado de Vivas (2021, p. 51)

Cada episodio es representado en una tabla que contiene dos columnas. La primera columna muestra las acciones matemáticas y la segunda, corresponde a la interpretación de cada una de estas acciones en términos del ETM. Para este artículo, se presenta el análisis del episodio 2, llamado “representación gráfica de #”, como muestra la figura 7.

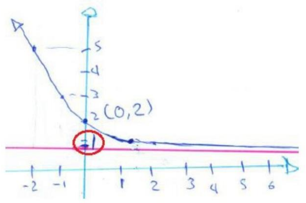
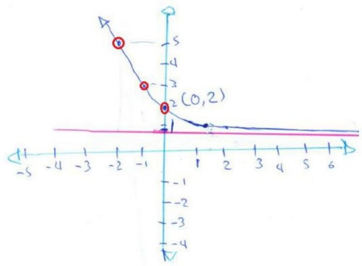
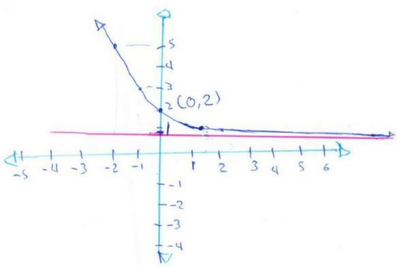
Acciones matemáticas	Interpretación
Acción 2. Representa gráficamente la asíntota de f. 	El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al representar gráficamente la asíntota de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.
Acción 3. Representa gráficamente los puntos de paso de f. 	Cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$ obtenida de la representación tabular de f es utilizada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificarlo como un punto de paso la representación gráfica de f. Se confirma la activación de la ***génesis semiótica***.
Acción 4. Realiza el esbozo de una curva que constituye la representación gráfica de f. 	Las características de f (dominio, comportamiento asintótico y puntos de paso) son empleadas como ***referencial*** y se realiza una ***prueba*** de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que cumpla con estas condiciones y en consecuencia sea la representación gráfica de f. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.

FIGURA 7
Episodio 2 con acciones de la 2 a la 4
Fuente: Adaptado de Vivas (2021, p. 63-64)

En la identificación de las acciones matemáticas, Vivas (2021), afirma que el estudiante no determinó explícitamente la monotonía de la función . Sin embargo, la representación gráfica que realizó es adecuada porque hizo uso de la regla de correspondencia de para identificar su comportamiento asintótico y por otro lado le permitió elaborar la construcción de algunos puntos de paso, tomando en consideración su dominio, para esbozar una curva que cumpla con ambas condiciones.

Asimismo, señala que se puede afirmar que la producción realizada por Guido, que se expresa en las acciones matemáticas identificadas, describe un trabajo matemático que se posiciona en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) porque realiza interpretaciones y suposiciones implícitas obtenidas a partir de la regla de correspondencia de #.

REFLEXIONES FINALES

A partir de la interpretación de las acciones matemáticas que podrían realizar los estudiantes en las tres tareas presentadas, se reconoce la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Cabe destacar que tanto la génesis semiótica y discursiva se activan con mayor frecuencia. Asimismo, a partir de la activación de las génesis se identifica la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo, así como también el plano Instrumental-Discursivo. Con relación al trabajo matemático en el dominio del análisis, en las tareas presentadas se privilegian los paradigmas Análisis Aritmético-Geométrico (AG) y Análisis Calculatorio (AC).

Los análisis de las producciones matemáticas de los estudiantes que son analizadas bajo la lupa del ETM confirman la pertinencia de este marco como herramienta teórica para caracterizar dicha producción cuando se resuelven tareas. Pues su desarrollo facilita una organización que considera simultáneamente tanto aspectos epistemológicos como aspectos cognitivos del trabajo matemático.

Por otro lado, es importante destacar el rol de la tecnología digital, específicamente de los artefactos (deslizador, vista gráfica del GeoGebra, entre otros). Sin embargo, la manipulación de tales artefactos debe ser observada y controlada para evitar perder el objetivo de la tarea. Sobre esto último, la implementación y capacitación de una tecnología digital por parte de estudiantes y profesores es fundamental y de interés en la comunidad de la didáctica matemática.

Finalmente, se señala la posición y relevancia que el ETM ha ganado en la comunidad científica de la Didáctica de la Matemática. Esto se evidencia en los trabajos de investigación que se están desarrollando en América latina y Europa al mostrar la posibilidad de considerar al ETM como una excelente herramienta teórica para analizar las producciones de las acciones matemáticas de estudiantes de diferentes niveles educativos en distintos dominios matemáticos.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, especialmente a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático - RIITMA; al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM - PUCP y a la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP por el apoyo brindado para desarrollar la presente investigación.

REFERENCIAS

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME**, v. 9, n. 1, p. 267-299. 2006. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2161607

BOURBAKI, N. **Elementos de história de las matemáticas**. Traducción española de Jesús Hernández. Madrid, España: Alianza Editorial, 1969.

CHACÓN, L. **Trabajo matemático de estudiantes de ingeniería en tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real.** 120 f. Dissertação (Mestrado) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de posgrado em Enseñanza de las Matemática, Lima, 2021. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.12404/19941

KLEIN, F. **Matemática elemental: Desde un punto de vista superior.** Traducción de Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática, 1908.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P.R. Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, v. 17 n. 4-I, p. 17-28, 2014. DOI : h ttps://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 721-7737, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

KUZNIAK, A. Y NECHACHE, A. Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. **Montoya (Presidencia), Espacio de Trabajo Matemático.** Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile. (DICIEMBRE DE 2018). Disponible en: https://cutt.ly/5kMtL4H

LAKATOS, I. **Matemáticas, ciencia y epistemología.** Traducido por Diego Ribes. Madrid: Alianza Editorial, 1978.

MINH, T. K., & LAGRANGE, J.-B. Connected functional work- ing spaces: a framework for the teaching and learning of func- tions at upper secondary level. **ZDM Mathematics Education**,v. 48, p. 793–807, 2016. DOI:10.1007/s11858-016-0774-z.

MONTOYA-DELGADILLO, E., & VIVIER, L. Mathematical Working Space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 739-754, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

LÓPEZ, S. La algebrización en un curso de curvas y superficies parametrizadas: una sesión de clase. En **I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier** (Eds.), Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático Pontificia Valparaíso, Chile. Universidad Católica de Valparaíso, 2018. Disponible en: https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

PÁEZ MURILLO, R., PLUVINAGE, F. Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, caso de las ramas infinitas de una función. En **I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier** (Eds.), Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático Pontificia Valparaíso, Chile. Universidad Católica de Valparaíso, 2018. Disponible en: https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

PERÚ. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Curricular Nacional de la Educación Básica.** Lima, Perú. 2016. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/

PLUVINAGE, F., CARRIÓN MIRANDA, V., & ADJIAGE, R. Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, p. 809-826, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0791-y

RICHARD, P. R. L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. **Educational Studies in Mathematics**, v. 57, p. 229-263, 2004. DOI: https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000049272.75852.c4

SALAZAR, J.V.F. y ALMONACID, A. I. Espacio de trabajo matemático: una tarea de modelización sobre función cuadrática. **Transformación**, v. 2, p. 222-234, 2020. Disponível em: https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/e3111/3090

SALAZAR, J. V. F., CARRILLO, F. Espacio de Trabajo Matemático Personal de profesores en relación a la función definida por tramos. **Uni-pluriversidad**, v. 19, n. 2, p. 144-160, 2019. DOI: https://doi:10.17533/udea.unipluri.19.2.08

SALAZAR, J.V.F.; NEIRA, V.; CARRILLO, F. I.; MONTOYA, E. Dominios de la Geometría y del Análisis y su articulación por medio de la modelización y la tecnología digital. En **XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-XV CIAEM.** Medellin. Universidad de Medellin, 2019. Disponible en: http://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

SANTOS TRIGO, M., MORENO ARMELLA, L., CAMACHO MACHÍN, M. Problem solving and the use of digital technologies within the mathematical working space framework. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 827–842, 2016. DOI: 10.1007/s11858-016-0757-0.

TICSE, M. A. **La tasa de variación de una función real de variable real: trabajo matemático de estudiantes de educación secundaria.** 125 f. Dissertação (Mestrado) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de posgrado em Enseñanza de las Matemática, Lima, 2021. Disponible en: http://hdl.handle.net/20.500.12404/17963

TICSE, M. A.; SALAZAR, J.V.F.; MONTOYA, E. La tasa de variación: una mirada desde el ETM personal de estudiantes de secundaria. In **X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas**. Lima, Fondo Editorial PUCP, 2020. Disponible en. http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/133928

VIVAS, J. L. **Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre sobre función exponencial.** 98 f. Dissertação (Mestrado) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de posgrado em Enseñanza de las Matemática, Lima, 2021. Disponible en: http://hdl.handle.net/20.500.12404/18104

Enlace alternativo

https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/74 (pdf)

PDF generado a partir de XML-JATS4R