

Almeida, Manoel de Campos

 **Manoel de Campos Almeida**
manoel1748@gmail.com
Universidade Federal do Paraná, Brasil

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação
Matemática, Brasil
ISSN: 1980-3141
ISSN-e: 1980-3141
Periodicidade: Cuatrimestral
vol. 16, 2021
revistarematec@gmail.com

Recepção: 15 Dezembro 2020
Aprovação: 16 Janeiro 2021
Publicado: 02 Fevereiro 2021

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/574/5744690001/>

DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p01-15.id319>



Este trabalho está sob uma Licença Creative Commons Atribuição-
NãoComercial 4.0 Internacional.

Resumo: O escopo do presente trabalho é investigar as conexões interdisciplinares entre a Neurociência, a História da Matemática e a Música. Serão discutidos avanços da Neurociência, como a Lei de Weber-Fechner, sistemas de representação de valores numéricos, com ênfase no (ANS- Approximate Number System) e como as frações são representações inatas não simbólicas de magnitudes analógicas. Com base nesses avanços, serão analisadas quais escalas musicais, cujas frações intercalares a História da Matemática registra, melhor se adequem ao sistema ANS.

Palavras-chave: Neurociência, História da Matemática, Música, Conexões Interdisciplinares.

Abstract: The scope of this work is to investigate the interdisciplinary connections between Neuroscience, the History of Mathematics and Music. Advances in Neuroscience will be discussed, such as the Weber-Fechner Law, numerical value representation systems, with emphasis on the (ANS- Approximate Number System) and how fractions are innate non-symbolic representations of analog magnitudes. Based on these advances, we will analyze which musical scales, whose representative fractions the History of Mathematics records, best agree to the ANS system.

Keywords: Neuroscience, History of Mathematics, Music Interdisciplinary Connections.

Resumen: El alcance de este trabajo es investigar las conexiones interdisciplinarias entre la Neurociencia, la Historia de las Matemáticas y la Música. Se discutirán los avances en neurociencia, como la Ley de Weber-Fechner, los sistemas de representación de valores numéricos, con énfasis en el (ANS- Approximate Number System) y cómo las fracciones son representaciones innatas no simbólicas de magnitudes analógicas. A partir de estos avances se analizará qué escalas musicales, cuyas fracciones intermedias registra la Historia de las Matemáticas, se adaptan mejor al sistema ANS.

Palabras clave: Neurociencia, Historia de las Matemáticas, Música, Conexiones interdisciplinarias.

PREÂMBULO

Como a realidade é complexa, somente um tratamento sistêmico, holístico e histórico, nos permite vislumbrar a verdade. Para que possa sobressair, uma pesquisa de ponta no presente, imbuída no estado da arte atual da ciência, deve primar por um caráter interdisciplinar. Isso norteará o trajeto do presente estudo.

A excessiva compartimentalização vigente da ciência é recente na história da humanidade e não permite a visualização global de um objeto de pesquisa. Deve-se ver a floresta, além das árvores. Além disso, a ciência é histórica, produto paulatino de gerações de cientistas.

No presente estudo dedicar-nos-emos a analisar algumas interconexões entre a Neurociência, a Música e a História da Matemática. O ator principal da ciência é o pesquisador e ele é o elo comum entre essas disciplinas. O funcionamento do seu cérebro, contudo, somente hoje começa a ser elucidado, graças às modernas técnicas de neuroimagens (Almeida & Justino, 2020).

Cabe, preliminarmente, um esclarecimento sobre o que os gregos interpretavam por *multitude*. Boécio, em seu *De Institutione Arithmetica* (Masi, 1983), nos esclarece que há duas espécies de essências, que compõem todas as coisas. Uma é contínua, denominada *magnitude*, que caracteriza corpos contínuos, tais como uma pedra, uma árvore ou uma área ou volume. A outra é caracterizada por ser disjunta e é determinada por suas partes, reduzida a uma única reunião coletiva, tal como um rebanho, um coro, uma multidão, uma pilha de coisas, cujo nome próprio é *multitude*. Diríamos, hoje, que *magnitude* é um conjunto contínuo e que *multitude* é um conjunto discreto. *Multitudes* são contáveis, enquanto que *magnitudes* são medidas.

Inicialmente nos debruçaremos a estudar como o cérebro processa números e frações, elementos fundamentais da Matemática. Iniciaremos com os ensinamentos da Neurociência.

LEI DE WEBER-FECHNER

A lei de Weber estatui que a diferença perceptível entre o tamanho de dois estímulos depende mais da razão entre as suas duas magnitudes do que das suas diferenças absolutas.

Ernest Heinrich Weber (1795-1878) foi precursor em quantificar o modo de como um ser humano responde a um estímulo físico. É importante notar que essa Lei é válida para qualquer estímulo sensorial. A Lei que leva seu nome (Lei de Weber) estabelece que uma diferença noticiável entre dois estímulos é proporcional à magnitude dos estímulos. Gustav Theodor Fechner (1801-1887) aperfeiçoou a Lei de Weber, estabelecendo que a sensação subjetiva é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo.

Essa relação pode ser descrita pela equação diferencial $dp = k \frac{ds}{S}$, onde dp é o acréscimo diferencial na percepção, ds é o acréscimo diferencial no estímulo e S é o estímulo em um dado instante. A constante de proporcionalidade k deve ser determinada experimentalmente. Integrando essa equação, obtemos por solução $p = k \ln S + C$, onde $\ln$ denota o logaritmo neperiano (natural) de S e C é uma constante de integração.

Para encontrarmos o valor de C , coloquemos $p = 0$, isto é, consideremos no instante inicial a ausência de percepções, obtendo daí $C = -k \ln S_0$ valor este que substituído na solução obtida e empregando as propriedades dos logaritmos conduz à $p = k \ln \frac{S}{S_0}$, o que mostra que a relação entre estímulo e percepção é logarítmica.

Uma consequência da Lei de Weber-Fechner (WF) é que a habilidade para discriminar entre dois valores de estímulo depende mais na sua razão do que dos seus valores absolutos. Essa fração, conhecida como fração

de Weber, relaciona S , um estímulo em um instante considerado, com S_0 , um estímulo inicial. Portanto, a sensação subjetiva é proporcional à fração $\frac{S}{S_0}$, ou melhor, ao logaritmo dessa fração (ALMEIDA, 2017, 2019, 2020).

SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO DE VALORES NUMÉRICOS[2]

Presentemente teoriza-se que os animais podem possuir dois diferentes sistemas não verbais para representar valores numéricos. O primeiro sistema (*OFM - Object-File Model*) representa precisamente números pequenos (até 3 ou 4), sendo cada objeto a ser enumerado em um conjunto representado por um único símbolo. Numerosidades (ou o senso numérico) são explicadas por esse sistema. Numerosidades são multitudes contáveis, enquanto que geralmente é aceito como senso numérico animal são multitudes com até quatro elementos, objeto do OFM. Como a representação da quantidade é exata, animais empregando esse modelo não seguem a lei de Weber ou mostram efeitos de razão.

No segundo sistema, denominado de sistema de números aproximados (*ANS- Approximate Number System*), animais representam aproximadamente números maiores e também possivelmente números menores. Nesse sistema quantidades são representadas como magnitudes mentais, ou seja, não simbólicas, estando sujeitas a efeitos de razão; portanto, quantidades usando este sistema seguem a lei de Weber (Benson-Amram, 2017; Anobile, 2018; Almeida, 2020 a,b; et al.)

As frações podem ser representadas simbolicamente ou não-simbolicamente. As frações simbólicas podem ser representadas em duas formas: as frações comuns (da forma a/b , onde a e b são inteiros: $1/2$, $1/12$,...) e as frações decimais ($0,5$; $0,314$;...). Já as frações não simbólicas representam proporções entre magnitudes (p.ex.: comparação entre dois segmentos; duas áreas, etc.).

ORIGENS HISTÓRICAS DAS FRAÇÕES

Cabe relembrar que o uso das frações decimais somente se tornou habitual tardiamente na História da Matemática. Apenas após a publicação da obra “La Disme” (1585), de Simon Stevin (1548-1620) o seu emprego se universalizou. Todavia, as primeiras frações que a história registra foram as sexagesimais, ainda hoje de uso extenso em computações de tempo e de ângulos. O sistema sexagesimal já estava em uso pelos sumerianos, os inventores da escrita, antes de 2100 a.C. Os gregos mantiveram a tradição do emprego de frações sexagesimais, que até hoje é empregada. Já os egípcios preferiam operar com frações unitárias.

horas, em notação sexagesimal, em notação decimal teríamos

horas, empregando frações unitárias, resultado que dificilmente seria reconhecido no presente.

Logo, considerações históricas nos permitem levantar uma dúvida sobre como muitos dos estudos neuronais atuais sobre frações são conduzidos. Geralmente eles se limitam às frações decimais, costumeiras hodiernamente. Isso é explicado pelo fato de que os participantes desses estudos só conhecem e estão habituados a operar com frações decimais.

Todavia, historicamente, elas só surgem tardiamente, logo dificilmente influenciariam nos processos cognitivos evolutivos concernentes às frações. Isso permite supor que as mesmas são construtos culturais, mentefatos aos quais algum tipo de processo cognitivo, ainda não devidamente esclarecido, merecedor de pesquisa mais aprofundada, se adequa.

Possivelmente, pode-se conjecturar, nesse processo as frações seriam representações não simbólicas de magnitudes analógicas. Do mesmo modo, como uma informação adicional sobre a sua natureza, pode-se admitir que esse processo independe da base do sistema de numeração empregado para notar as frações, seja ele decimal, sexagesimal ou qualquer outro, o que reforça a hipótese anterior.

Por exemplo, quando hoje nós escrevemos 2h 20min 45s isso equivale a $\left(2 + \frac{20}{60} + \frac{45}{60^2}\right)$ horas, em notação sexagesimal, em notação decimal teríamos $\left(2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{80}\right)$ horas, empregando frações unitárias, resultado que dificilmente seria reconhecido no presente.

COMO O CÉREBRO PROCESSA AS FRAÇÕES

Até recentemente não tínhamos ideia de como o cérebro processa frações; tanto os processos cognitivos neurofisiológicos envolvidos como o local no cérebro onde são processadas constituíam mistérios arcanos. Recentes estudos, realizados por Simon Jacob e Andreas Nieder começam a desvendar os véus que os encobrem (JACOB, 2009; NIEDER, 2004, 2006, 2019).

A habilidade de codificar magnitudes, de quaisquer espécies, é um pré-requisito imprescindível para o desenvolvimento da matemática. O surgimento da linguagem, a emergência do pensamento simbólico, a invenção da escrita e sua capacidade para armazenar externamente símbolos, tornaram possível que o ser humano pudesse evoluir de uma aproximada representação de magnitudes absolutas, em seus estágios iniciais, para um conceito de número sofisticado.

A introdução de frações comuns, como a razão de dois números inteiros, foi um passo conceitual fundamental avante, ampliando os limites do campo dos números inteiros para tratar com magnitudes. Embora o conceito de números inteiros seja intuitivo e adequado à contagem e à ordenação, apenas com a introdução das frações o sistema numérico tornou-se mais flexível e ganhou em precisão. Porém, questões essenciais permaneciam, tais como: o cérebro humano processa frações automaticamente ou, alternativamente, acessa numerador e denominador em separado?

Sabia-se que magnitudes absolutas eram codificadas por neurônios individuais, os quais emitem picos (pulsos) de descargas elétricas em resposta a determinados números. Contudo, não era conhecido se como a razão de dois números era codificada, se processando o numerador e o denominador em separado, ou pela extensão da codificação de magnitudes às quantidades relativas.

Os resultados de suas pesquisas mostram que frações não são apenas construtos mentais, resultados de considerá-las como a razão entre dois números inteiros, mas sim são dadas intuitivamente, ou seja, são representações inatas.

Os experimentos por eles realizados mostraram que populações de neurônios no córtex parietal, ao redor do sulco interparietal (IPS) anterior e horizontal, são sintonizadas para determinadas frações, independentemente do formato de sua representação. Isso quer dizer que não importa se as frações são representadas como numerais, ou seja, simbolicamente: 1:6, 3:6, 5/7,..., ou são apresentadas em uma forma verbal (1/6 um sexto: sechstel, em alemão; ¼ um quarto: viertel, etc.). Isso significa que razões simbólicas são representadas como uma categoria de magnitudes abstratas no cérebro humano. Portanto, o córtex interparietal representa frações comuns de um modo independente de sua notação (KADOSH, 2007, 2009; NIEDER, 2004, 2006, 2019; MOCK *et al.*, 2018)

Desse modo, constatou-se que as regiões do cérebro com populações neuronais ativadas por mudanças nas frações que lhe são apresentadas, tanto simbolicamente como verbalmente, são o sulco interparietal e o córtex pré-frontal.

Esses estudos demonstram que o cérebro humano não executa uma simples divisão para criar um número real, p. ex. $1/4 = 0,25$, processando então números reais ao invés de frações ou proporções, mas sim constituem uma categoria própria de magnitudes abstratas, específica, inata.

Seria de se esperar que resultados similares fossem obtidos quando fossem apresentados como estímulos razões de magnitudes não simbólicas e não verbais; analógicas, portanto. Dados obtidos com primatas não humanos sugerem que macacos também compartilham o conceito de proporcionalidade (frações) quando

treinados a discernir entre as razões de dois comprimentos de linha (NIEDER, 2004, 2006; BONGARD, 2010; CANTLON, 2006).

Estudos eletrofisiológicos subsequentes do córtex pré-frontal mostraram fortes similaridades na codificação de quantidades absolutas e relativas; a atividade neuronal decresce gradualmente quando a distância entre um estímulo pré-determinado e um estímulo apresentado aumenta, devido ao efeito SNARC.

Aparentemente, na cultura ocidental tanto o alfabeto como os números parecem ser representados em uma “linha mental” horizontal orientada da esquerda para a direita (o efeito *SNARC: Spatial-Numerical Association of Response Codes*). Já os chineses letrados associam números a um eixo vertical, o que mostra que fatores outros, como a direção da escrita adotada, podem influir nessa percepção. É interessante observar como a cultura pode influir nesse efeito cognitivo.

Na maioria dos adultos, a mera apresentação de um numeral arábico já levanta preconceitos na orientação da sua atenção e na sua resposta motora. Mesmo quando executando uma tarefa simples como decidir se um número é par ou ímpar, ou se é maior ou menor que cinco, números pequenos são automaticamente colocados no lado esquerdo do espaço, enquanto que números maiores são mapeados no lado direito. Isso é uma consequência do efeito SNARC (ALMEIDA, 2018).

Numerosas evidências mostram, portanto, que as mesmas áreas do cérebro que processam numerosidades estão também sintonizadas no processamento de frações.

Essa nova compreensão sobre como o cérebro interpreta frações comuns contribui para esclarecer a importância das frações de Weber no tratamento de numerosidades. Como elas são representações inatas, uma categoria própria de magnitudes abstratas, as frações de Weber se constituem em um elemento chave na compreensão de como o cérebro processa numerosidades e do porque ele percebe números em uma escala logarítmica, conhecida como efeito SNARC, pois a percepção é proporcional a essas frações.

A Lei de WF é válida para estímulos provenientes dos diversos sentidos, sejam eles visuais, auditivos, gustativos ou mesmo táteis. Ela nos permite controlar a vida diária, sem a qual nossa sobrevivência estaria ameaçada. Vejamos alguns exemplos do cotidiano. Permite à dona de casa em suas compras cotejar o peso entre diversas embalagens de um mesmo produto, por exemplo, cebolas e batatas (tátil); permite-lhe verificar se sua preparação está mais ou menos salgada, ou temperada (gosto); verificar se a imagem de sua TV está muito clara ou escura (visual); ou se o som de seu smartphone está muito alto ou muito baixo (audição). São situações do dia a dia, baseadas na proporcionalidade entre instâncias, ou seja, na comparação, que é realizada por frações. Isso mostra que conceitos matemáticos básicos são parcialmente estruturantes da mente humana.

Ela também desempenha papel fundamental na sobrevivência das espécies, pois permite avaliar com que velocidade um predador se aproxima e com que velocidade devemos fugir dele; o mesmo é válido quando queremos atravessar uma rua e um veículo se aproxima. D'Ambrosio afirmou que a Matemática é uma das estratégias que a espécie humana desenvolveu para sobreviver (D'AMBROSIO; ALMEIDA, 2017).

Essas considerações são de suma importância para entendermos as escalas musicais e suas respectivas frações intercalares. O Dr. John Fossa chamou a atenção do autor para o fato de que como está entre os estímulos auditivos a música também deveria seguir a Lei de WF. A História da Matemática (HM) registra que a associação de estímulos sonoros (música) com frações remonta à antiguidade grega, especificamente a Pitágoras.

MÚSICA

Estímulos auditivos que proporcionam prazer estético, conhecidos como harmoniosos, são denominados de *música*. Essa música, como mostra a HM, segue determinadas escalas e temperamentos que são adequados a cada cultura. Uma escala musical é uma sequência de tons ordenada pela frequência vibratória dos seus sons (normalmente do som de frequência mais baixa para o de frequência mais alta), que consiste na manutenção

de determinados intervalos entre as suas notas. Estes intervalos estão definidos por frações de números inteiros (frações comuns). Frações comuns são representações inatas no cérebro e regidas pela Lei de WF.

Temperamento musical é um esquema para dividir ou temperar a oitava. Ao longo dos tempos, foram propostos mais de 100 sistemas. Desses, não mais de 20 terão sido realmente usados com mais generalidade. Os vários sistemas ecoam os vários estilos e gostos musicais das suas épocas. E estes, por sua vez, também influenciaram os tipos de afinações.

A afinação corresponde ao processo de produzir um som equivalente a outro, afinação e temperamento não são a mesma coisa. A afinação envolve o ajuste, por uníssonos ou intervalos naturais, que podem ser expressos por frações de inteiros, da altura das notas de um instrumento às de um outro ou, por exemplo, de uma corda de guitarra a uma de outra.

Se o intervalo não estiver afinado naturalmente, ouve-se um batimento produzido pelos harmónicos desafinados (uma vibração ondulante tipo «uáuáuáuá»); se estiver afinado, não se ouve esse batimento. O temperamento envolve o ajuste da altura de notas afastando os intervalos do seu valor natural «harmónico» para fazer com que os intervalos caibam numa oitava. Os intervalos resultantes geram batimentos e são intervalos que só podem ser expressos por números irracionais (Wikipedia).

Existem inúmeras escalas musicais, adequadas a cada cultura e, podemos acrescentar, a cada gosto. Isso é justificado neuronalmente pelas diferenças individuais entre cada cérebro, resultante da diferenciação das conexões neurais (conectomas), que são reforçadas por fatores culturais e de educação/treinamento.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Jâmblico (Iamblichus: 245 d.C. – 325 d.C.) relata no Cap. XXVI de seu livro “A Vida de Pitágoras” o seguinte episódio: Pitágoras, ao passar perto do braseiro de um ferreiro, notou harmonias entre as batidas dos martelos repercutindo sobre o metal da bigorna. Reconheceu a *diapason* (oitava - 1:2), a *diapente* (quinta - 3:2) e a *diatesseron* (quarta - 3:4). Após vários experimentos reconheceu que as diferenças entre os sons não dependiam da força das batidas, nem da forma dos martelos, mas sim dos seus pesos (IAMBlichus, 1818; GUTHRIE, 1988).

O martelo que produzia o som da oitava tinha exatamente a metade do peso (1:2) do martelo cujo som era o mais grave, e que fazia às vezes de tônica. O que produzia o som da quinta pesava dois terços do peso do mais pesado (2:3). O som do intervalo de quarta vinha do martelo que pesava três quartos do peso do mais pesado (3:4).

Essas frações elementares são representações inatas, que o cérebro considera uma categoria própria de magnitudes abstratas, são, portanto, frações de Weber e se constituem em um elemento chave na compreensão de como o cérebro processa numerosidades e de porque ele percebe números em uma escala logarítmica. Pitágoras, no século VI a.C., reconheceu de forma presciente a capacidade do cérebro humano estar sintonizado com determinadas frações.

Essa foi a base com que os gregos desenvolveram toda uma complexa teoria sobre frações e médias. Também foi o fundamento do lema da Escola Pitagórica: “Tudo é Número”, todas as coisas no universo são constituídas por números e governadas por suas relações. Para essa Escola os números tinham uma realidade física (ALMEIDA, 2003).

Pitágoras experimentou inicialmente com cordas nas quais suspendia pesos diferentes; em nova experiência usou uma corda tensionada, dividiu a corda em partes iguais, notando que as mesmas proporções produziam os mesmos intervalos sonoros. Posteriormente refez essa experiência com um instrumento, o *chordotonon*, no qual alterava a tensão das cordas por meio de cravelhas, como nos instrumentos atuais.

A autenticidade desse episódio, como relatou Jâmblico, mais de oitocentos anos depois de Pitágoras, deve ser encarada *cum grano salis*. Contudo, a influência da escola pitagórica na matemática grega é inegável.

CONEXÕES INTERDISCIPLINARES

Sabe-se que frações são representações inatas no cérebro e obedecem à Lei de WF e sua relação obedece aproximadamente a uma escala logarítmica. Contudo, existem dezenas de escalas musicais, cada qual definida por uma sequência de frações própria, onde cada qual se adapta melhor a uma cultura e/ou padrão de gosto estético.

Neste ponto, uma questão se nos assoma. Qual seria a escala musical, ou seja, a qual a sequência de frações definidoras que melhor se aproximaria de uma escala logarítmica e, conseqüentemente, melhor seguiria a Lei de WF?

Isso significaria identificar qual a escala musical anatomicamente mais conveniente, o que equivaleria a identificar qual sequência de frações inatas são processadas de uma maneira anatomicamente mais adequada.

Evidentemente devem-se levar em conta os padrões estéticos e culturais pertinentes a cada escala. Nesse ponto, a cultura, as tradições e os gostos sociais desempenham um papel fundamental. Não necessariamente as escalas anatomicamente mais adequadas seriam as mais aceitas por grupos sociais.

Uma *Arbeit Hypothese* se nos ocorre. A escala musical que é anatomicamente melhor processada, à qual o cérebro melhor responde, é a que melhor se adequa à Lei de WF, ou seja, que apresente uma melhor disposição logarítmica. Conseqüentemente, as suas frações intrínsecas seriam as que melhor se aproximam de representações inatas.

Para testar essa hipótese, foi empregada a seguinte metodologia. Identificar as frequências de cada escala musical, bem como as frações (intervalos) entre as notas dessas escala musical. Lançar estes dados em gráfico, construindo uma curva com estes dados, em seguida usar uma regressão logarítmica e calcular o coeficiente de ajuste r . da curva de dados com a curva logarítmica padrão. A escala musical com o maior r . corresponderia a que melhor é processada pelo cérebro. O coeficiente r . é uma medida descritiva da qualidade do ajuste obtido. Quanto maior o r ., melhor o ajuste. Para o cálculo do coeficiente r . das curvas apresentadas a seguir foi empregado o Microsoft Excel 2010.

TESTES DA ARBEIT HYPOTHESE

Iniciamos nossos testes com a escala pitagórica, por ser a mais antiga e talvez a mais influente. Não iremos nos aprofundar na teoria musical, pois este não é o escopo do presente trabalho. Iremos nos restringir ao mínimo necessário para os objetivos deste estudo. Seguiremos os elementos dessa teoria conforme arregimentados e resumidos na Wikipedia^[3].

ESCALA PITAGÓRICA

Os estudos iniciais sobre as frequências e as proporções entre as frequências musicais são atribuídos ao filósofo e matemático grego Pitágoras (c. 570 a.C. – 495 a.C.).

A escala Pitagórica é construída a partir da razão 3:2 quando aplicada na afinação de intervalos de 5ª Justa ascendente ou 2:3 na afinação de 5ª Justas descendentes, e na utilização da razão 4:3 na afinação de intervalos de 4ª Justa ascendente ou 3:4 na afinação de 4ª Justas descendentes. A partir da nota Lá3, é possível afinar uma sequência ascendente, seguindo as razões indicadas: Lá3-Mi4 (3:2), Mi4-Si3 (3:4), Si3-Fá#4 (3:2), Fá#4-Dó#4 (3:4), Dó#4-Sol#4 (3:2), Sol#4-Ré#4 (3:4) (Wikipedia).

Tendo como base a nota Lá4, identificam-se as frequências dos intervalos descendentes, seguindo as razões indicadas: Lá4-Ré4 (2:3), Ré4-Sol4 (4:3), Sol4-Dó4 (2:3), Dó4-Fá4 (4:3), Fá4-Sib3 (2:3). As razões apresentadas para descrever cada intervalo da escala Pitagórica são conseqüências da sequência de razões utilizadas a partir do ciclo de quintas (id.).

O quadro 1 a seguir mostra as frações indicadas e as frequências respectivas de cada nota.

QUADRO 1
Escala Pitagórica

Escala Pitagórica												
Lá 3	Sib3	Si3	Dó4	Dó# 4	Ré 4	Ré# 4	Mi 4	Fá4	Fá# 4	Sol 4	Sol# 4	Lá 4
Razão 1	256:243	9:8	32:27	81:64	4:3	729:512	3:2	128:81	27:16	16:9	243:128	2
Freq.	442,00	465,65	497,25	523,85	559,41	589,33	629,33	663	698,47	745,88	785,78	839,11
												884

Fonte: Elaboração pelo autor

A seguir a Figura 1, empregando o Microsoft Excel 2010, as frequências da notas da escala pitagórica foram plotadas em um gráfico.

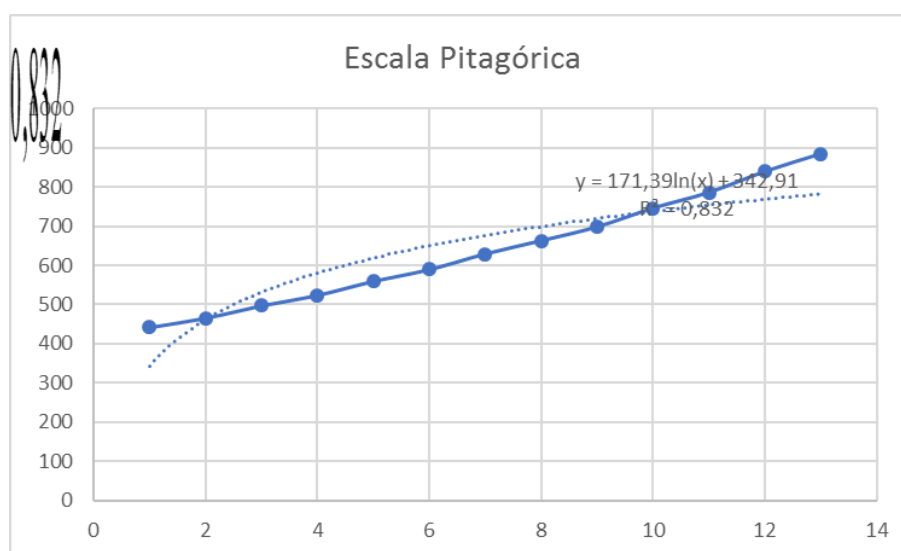


FIGURA 1
Frequências das notas da escala pitagórica
Fonte: Elaboração pelo autor

Para uma comparação visual, plotou-se uma curva logarítmica que correspondesse idealmente a esses dados (pontilhada).

O mesmo programa obtém o coeficiente de ajuste da curva. No caso da escala pitagórica, o coeficiente de ajuste r^2 da curva dessa escala obtido foi $r^2 = 0,832$, o que mostra que esta escala obedece a uma lei aproximadamente logarítmica.

ESCALA JUSTA

O sistema de afinação justa foi inicialmente proposto pelo matemático e astrônomo Claudio Ptolomeu (90-167), quem defendia que “a melhor afinação é aquela na qual o ouvido e a razão matemática estão de acordo” (Wiki; <https://www.revistas.ufg.br/musica/article/view/45333/22445>).

Posteriormente, Gioseffo Zarlino (1517-1590) organizou uma escala de 17 notas, em que existe uma clara diferença entre sustenidos e bemóis que ilustram as diferentes relações de afinação advindas das razões presentes na série harmônica.

A proposta do sistema justo busca identificar as razões que possam descrever com maior clareza um intervalo, baseada na coincidência das frequências de harmônicos presentes na série harmônica de duas notas soando simultaneamente (id.).

O intervalo de 5ª Justa é representado pela razão 3:2, enquanto a 4ª Justa está representada por 4:3, 2ª Maior por 9:8, 3ª Maior por 5:4, 6ª Maior por 5:3 e a 7ª Maior por 15:8, para indicar a escala Maior. A escala menor natural é representada pelos intervalos 3:2 para 5ª Justa, 4:3 para 4ª Justa, 6:5 para 3ª menor, 8:5 para 6ª menor, 9:5 para 7ª menor, sendo que a 2ª menor é representada pela razão 16:15 e a 4ª aumentada por 45:32 (id.).

O quadro 2 a seguir mostra as frações indicadas e as frequências respectivas de cada nota dessa escala.

QUADRO 2
Escala Justa

Escala Justa												
1J	2m	2M	3m	3M	4J	4aum	5J	6m	6M	7m	7M	8J
Razão 1	16:15	9:8	6:5	5:4	4:3	45:32	3:2	8:5	5:3	9:5	15:8	2
Freq.	442	471,47	497,25	530,40	552,50	586,33	621,56	663	707,20	736,67	795,60	828,75
	Lá 3	Sib 3	Si 3	Dó 4	Dó# 4	Ré 4	Ré# 4	Mi 4	Fá 4	Fá# 4	Sol 4	Sol# 4
												Lá 4

Fonte: Elaboração pelo autor

Empregando o Microsoft Excel 2010, plotamos as frequências da notas da escala justa em um gráfico (Figura 2).

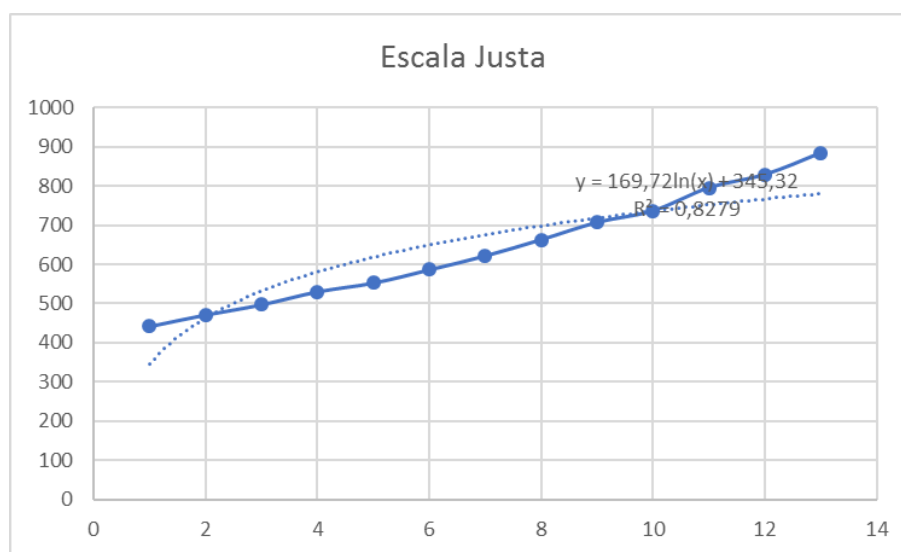


FIGURA 2
Frequências das notas da escala justa

Fonte: Elaboração pelo autor

O mesmo programa obtém o coeficiente de ajuste da curva, o caso da escala justa, o coeficiente de ajuste r^2 da curva dessa escala obtido foi $r^2 = 0,8279$.

SISTEMA DE AFINAÇÃO IGUAL

O Sistema de Afinação Igual, chamado em inglês de equal temperament, refere-se ao procedimento de divisão da oitava musical em doze partes exatamente iguais. Este procedimento teve sua primeira proposta no séc.

XVI com Giovanni Maria Lanfranco em sua estruturação dos procedimentos para a afinação de monocórdios e órgãos (Wiki).

Durante o final do período romântico, a expansão das possibilidades de modulação e a ampliação no uso de vários centros tonais colocaram em questão o uso de sistemas irregulares ou que privilegiassem determinadas tonalidades.

O Sistema Igual propõe um parâmetro objetivo que se tornou o padrão internacionalmente aceito na cultura musical ocidental no séc. XX. (Wiki).

O quadro 3 a seguir apresenta as frequências das notas desse sistema.

QUADRO 3
Escala Igual

Escala Igual												
Lá 3	Sib3	Si3	Dó4	Dó# 4	Ré 4	Ré# 4	Mi 4	Fá4	Fá# 4	Sol 4	Sol# 4	Lá 4
1J	2m	2M	3m	3M	4J	4aum	5J	6m	6M	7m	7M	8J
Razão	$\frac{0}{212}$	$1 \frac{1}{212}$	$2 \frac{2}{212}$	$3 \frac{3}{212}$	$4 \frac{4}{212}$	$5 \frac{5}{212}$	$6 \frac{6}{212}$	$7 \frac{7}{212}$	$8 \frac{8}{212}$	$9 \frac{9}{212}$	$10 \frac{10}{212}$	$12 \frac{12}{212}$
Freq.	442	468,28	496,13	525,63	556,88	590	625,08	662,25	701,63	743,35	787,55	834,38

Fonte: Elaboração pelo autor

Essas frequências foram plotadas no gráfico (Figura 3) seguinte.

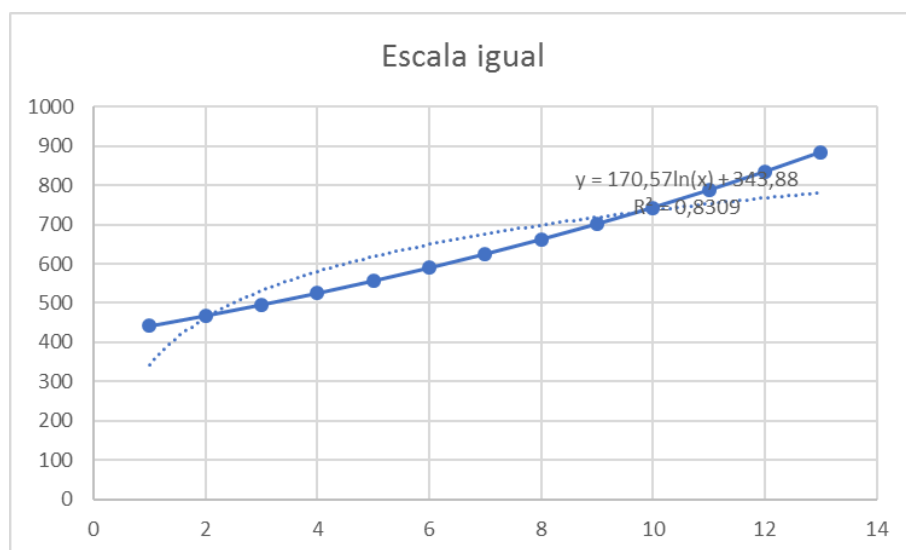


FIGURA 3
Frequências das notas da escala igual

Fonte: Elaboração pelo autor

O r^2 correspondente é $r^2 = 0,8309$.

DISCUSSÃO

Um resumo desses resultados é:

Escalas	R2
Justa	0,8279
Igual	0,8309
Pitagórica	0,832

Uma conclusão parcial seria de que a escala pitagórica entre as testadas é a que levemente melhor se ajusta à lei de W-F, portanto suas frações seriam, em princípio, as “melhores” anatomicamente processadas.

O fato de essas três terem valores muito próximos pode talvez explicar o porquê de serem muito aceitas na atualidade. Isso ocorre talvez devido ao fato de que por razões culturais o gosto do público se acostumou a elas.

Contudo cabe arguir que frações “mais complicadas”, como 256:243; 32:27; 81:64; 759:512, 128:81; 27:16; 16:9; 243:128 dificilmente teriam representações anatômicas exatas, ao invés das “mais simples”, como: 1:2; 9:8; 4:3; 3:2; 16:9 (?).

Isso provavelmente ocorre porque o cérebro intercala interpolações aproximadas entre as frações exatas delimitantes, e o treinamento faz com que as redes neurais (conectomas) se habituem a reconhecer esses seus valores.

O gosto musical por uma determinada escala normalmente é determinado pelo treinamento, o fato do cérebro estar acostumado com ela. O treinamento cria e reforça conexões neurais, os conectomas, que lhe permite reconhecer como costumeira, ou mesmo agradável, determinada escala (Almeida & Justino, 2020).

Mesmo que se encontre uma escala musical com uma afinação logarítmica com $r^2=1$, teoricamente anatomicamente perfeita, provavelmente seria difícil encontrar um instrumento real capaz dessa afinação, pois sua construção envolveria parâmetros físicos reais tais como elasticidade e rigidez das cordas, ressonância dos painéis de madeira, etc.

Existem dezenas de escalas, de afinações, e não somente no mundo ocidental. Aqui surge um horizonte para pesquisas futuras. Procurar, entre as diversas alternativas existentes, qual a que melhor se adequaria à Lei de WF e, portanto, seria a mais anatomicamente adequada. Por exemplo, uma avaliação preliminar da escala justa de Zarlino apresentou um $r^2=0,8646$, melhor que o das anteriores.

Uma linha interessante a ser investigada seria averiguar se as afinações (escalas) praticadas por povos primitivos seguiria melhor a Lei de WF do que as das culturalmente avançadas.

CONCLUSÕES

Afirmamos inicialmente que uma pesquisa de ponta atualmente deve preferencialmente ter um caráter interdisciplinar, pois, como a realidade é complexa, somente um tratamento sistêmico, holístico e histórico, nos permite vislumbrar a verdade.

Contudo, esse caráter geralmente é estranho aos nossos pesquisadores, acostumados a se encerrar em suas torres de marfim e a ignorar o que se passa em outras disciplinas. Reconhecemos, todavia, a dificuldade em se manter a par dos desenvolvimentos dos outros ramos do conhecimento que não o próprio. A época dos gênios universais, dos Leonardos, dos Picos della Mirandola, se esvaneceu. A ciência, hoje, atingiu dimensões que poderíamos denominar de galáxicas.

Contudo, isso não é justificativa para não se manter minimamente interessado nos avanços da ciência, seja por leituras próprias ou por discussões em grupos de pesquisa, ou entre outros colegas eventualmente interessados, ou mesmo com leigos educados curiosos. Na nossa modesta opinião, o descaso hoje imperante com a formação de uma sólida cultura geral é um dos principais entraves para a evolução do conhecimento.

Defendemos, portanto, a criação de grupos de pesquisas multidisciplinares, onde participem estudiosos das mais diversas disciplinas, ou mesmo leigos educados, que eventualmente estejam interessados em um dado assunto. Isso permite a troca profícua de ideias, a identificação de conexões interdisciplinares.

O presente estudo, em nossa opinião, é uma desprezível amostra de como conexões interdisciplinares podem elucidar aspectos de que maneira o conhecimento humano se processa.

AGRADECIMENTOS

O presente estudo não seria possível sem as profícuas discussões mantidas com o Dr. John Fossa, cujas opiniões e sugestões foram fundamentais para a consecução do mesmo. Agradecemos penhoradamente a sua valiosa contribuição.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Manoel de Campos; JUSTINO, Edson José Rodrigues. **Como o Cérebro Processa a Matemática? – Ensinos da Neurociência para uma Pedagogia Renovada**, Curitiba, Manoel de Campos Almeida, 2020.
- ALMEIDA, Manoel de Campos. **A Matemática Na Idade da Pedra**. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2017.
- ALMEIDA, Manoel de Campos. **Platão Redimido – A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga & Moderna**. Curitiba: Editora Champagnat, 2003.
- ALMEIDA, Manoel de Campos. **A Gênese do Número – Os Neandertais Sabiam Contar?** Curitiba, 2019.
- ALMEIDA, Manoel de Campos. A Neurociência e a História das Frações. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 20, n. 39, p. 51-62. DOI: <https://doi.org/10.47976/RBHM2020v20n3951-62>
- ALEOTTI, Sara; MASSACCESI, Stefano; PRIFTIS, Konstantinos. **Numbers around Descartes: A preregistered study on the three-dimensional SNARC effect**. In: *Cognition* · November 2019.
- ANOBILE, Giovanni; BURR, David C.; IAIA, Marika; MARINELLI, Chiara V.; ANGELELLI, Paola; TURI, Marco. **Independent adaptation mechanisms for numerosity and size perception provide evidence against a common sense of magnitude**. In: *Nature: Scientific Reports* | (2018) 8:13571.
- BENSON-AMRAM, Sarah; GILFILLAN, Geoff; McCOMB, Karen. **Numerical assessment in the wild: insights from social carnivores**. In: *Phil. Trans. R. Soc. B* 373: 20160508.
- BONGARD, Sylvia; NIEDER, Andreas. **Basic mathematical rules are encoded by primate prefrontal cortex neurons**. In: *PNAS*: February 2, 2010; vol. 107; nº 5; 2.277-2.282.
- CANTLON, Jessica F.; BRANNON, Elizabeth M. **Shared System for Ordering Small and Large Numbers in Monkeys and Humans**. In: *Psychological Science*, 17(5), 401-406. 2006.
- CHILDE, Gordon. **A Evolução Cultural do Homem**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.
- D'AMBROSIO, Ubiratan; ALMEIDA, Manoel de Campos. **Ethnomathematics and the Emergence of mathematics**. In: *The Nature and Development of Mathematics*; London: Routledge, 2017.
- GUTHRIE, Kenneth Sylvan. **The Pythagorean Sourcebook and Library**. Michigan, Phanes Press, 1988.
- IAMBlichus. **Life of Pythagoras**. London: J.M. Watkins, 1818. Trad. J.M. Watkins.
- JACOB, Simon N.; NIEDER, Andreas. **Notation-Independent Representation of Fractions in the Human Parietal Cortex**. In: *The Journal of Neuroscience*, April 8, 2009- 29(14)-4652-4657.
- KADOSH, Roi Cohen; WALSH, Vincent. **Numerical Representation in the Parietal Lobes: Abstract or not Abstract?** In: *Behavioral and Brain Sciences*. London: Cambridge Press, 2009.
- KADOSH, Roi Cohen; et al. **Notation-Dependent and – Independent Representations of Numbers in the Parietal Lobes**. In: *Neuron* 53, 307-314, January 18, 2007.
- MOCK, Julia; HÜBER, Stefan; BLOECHLE, Johannes; BAHNMUELLER, Julia. **Magnitude processing of symbolic and non-symbolic proportions: an fMRI study**. In: *Behavioral and Brain Functions* · December 2018. DOI: 10.1186/s12993-018-0141-z.
- MASI, Michael. **Boethian Number Theory**. Amsterdam: Rodopi, 1983.

- NIEDER, Andreas; MILLER, Earl K.. **A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey.**
In: PNAS. May 11, 2004. no 19. 7457-7462.
- NIEDER, Andreas; DIESTER, Ilka; TUDUSCIUC, Oana. **Temporal and Spatial Enumeration Processes in the Primate Parietal Cortex.** In: SCIENCE; VOL 313; 8 SEPTEMBER 2006.
- NIEDER, Andreas; MILLER, Earl K.. **A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey.**
In: PNAS. May 11, 2004. no 19. 7457-7462.
- NIEDER, Andreas. **Neural constraints on human number concepts.** In: December 2019. Current opinion in neurobiology 60:28-36.

NOTAS

- [2] Para uma apresentação mais extensa sobre a evolução histórica do conceito de número sugere-se compulsar Almeida (2019).
- [3] <https://www.revistas.ufg.br/musica/article/view/45333/22445>, entre outros sites.

LIGAÇÃO ALTERNATIVE

<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/61> (pdf)