

ESTIMULACIÓN, EVOLUCIÓN Y REFINAMIENTO DE LA ACTIVIDAD PERCEPTUAL DE
UN GRUPO DE ESTUDIANTES Y LA PROFESORA

ESTIMULAÇÃO, EVOLUÇÃO E REFINAMENTO DA ATIVIDADE PERCEPTIVA DE UM
GRUPO DE ALUNOS E DO PROFESSOR

STIMULATION, EVOLUTION AND REFINEMENT OF THE PERCEPTUAL ACTIVITY OF A
GROUP OF STUDENTS AND THE TEACHER

Pantano Mogollón, Óscar Leonardo; Vergel Causado, Rodolfo;
Radford, Luis

 **Óscar Leonardo Pantano Mogollón**
olpantanom@correo.udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
Colombia

 **Rodolfo Vergel Causado**
rvergelc@correo.udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
Colombia

 **Luis Radford**
lradford@laurentian.ca
University Louis Pasteur of Strasbourg, Colombia

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação
Matemática, Brasil
ISSN: 1980-3141
ISSN-e: 1980-3141
Periodicidad: Cuatrimestral
vol. 16, núm. 39, 2021
revistarematec@gmail.com

Recepción: 18 Agosto 2021
Aprobación: 10 Octubre 2021
Publicación: 02 Diciembre 2021

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/574/5743029012/>

DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p206-227.id492>

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-
NoComercial 4.0 Internacional.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-
NoComercial 4.0 Internacional.

Resumo: Neste artigo apresentamos algumas considerações teóricas apoiadas por evidências empíricas em relação à evolução da actividade perceptiva de um grupo de estudantes da terceira classe do ensino primário (8-9 anos de idade) ao abordar uma tarefa associada à contagem de quantidades. A análise do episódio de actividade, através da metodologia multi-semiótica, sugere, em primeiro lugar, que a actividade perceptiva estimula, evolui e refinada gradualmente como consequência do trabalho conjunto que emerge entre os membros do grupo e o professor, a tal ponto que surge o encontro com a regularidade espacial em que as ovelhas estão dispostas no rebanho. Em segundo lugar, a evolução da actividade perceptiva torna possível a emergência e actualização de formas de pensamento aditivas associadas à contagem de quantidades cada vez mais elaboradas que vão para além da contagem das ovelhas uma a uma, à agregação de quantidades com os mesmos e diferentes números cardinais.

Palavras-chave: Trabalho conjunto, Actividade perceptiva, Evolução, Meios semióticos de objectificação, Formas de pensamento aditivo.

Resumen: En este artículo presentamos algunas consideraciones teóricas apoyadas por evidencias empíricas en relación con la evolución de la actividad perceptual de un grupo de estudiantes de grado tercero de primaria (8-9 años) al abordar una tarea asociada al conteo de cantidades. El análisis del episodio de actividad, a través de la metodología multi-semiótica, sugiere primero, que la actividad perceptual poco a poco va *estimulándose, evolucionando y refinándose*, como consecuencia de la labor conjunta que emerge entre las integrantes del grupo y la profesora, a tal punto que emerge el encuentro con la regularidad espacial en la que están dispuestas las ovejas en el rebaño. Segundo, que la evolución de la actividad perceptual posibilita la emergencia y actualización de formas de pensamiento aditivo asociadas al conteo de cantidades cada vez más elaboradas que trascienden del conteo de las ovejas, una a una, a la agregación de cantidades con el mismo y distinto cardinal.

Palabras clave: Labor conjunta, Actividad perceptual, Evolución, Medios semióticos de objetivación, Formas de Pensamiento Aditivo.

Abstract: In this article we present some theoretical considerations supported by empirical evidence in relation to the evolution of the perceptual activity of a group of third grade students (8-9 years old) when approaching a task associated with counting quantities. The analysis of the activity episode, through the multi-semiotic methodology, suggests, first, that the perceptual activity gradually stimulates, evolves and refined as a consequence of the joint labor that emerges between the members of the group and the teacher, to such an extent that the encounter emerges with the spatial regularity in which the sheep are arranged in the flock. Second, the evolution of the perceptual activity makes possible the emergence and actualization of additive forms of thinking associated with the counting of increasingly elaborated quantities that transcend from counting the sheep, one by one, to the aggregation of quantities with the same and different cardinal.

Keywords: Joint labor, Perceptual activity, Evolution, Semiotic means of objectification, Additive Thinking Forms.

INTRODUCCIÓN

La caracterización de los medios semióticos de objetivación que son movilizados por los estudiantes al abordar tareas de generalización de patrones ha sido objeto de estudio en varias investigaciones (RADFORD, 2005, 2018a; RADFORD; BARDINI; SABENA, 2006, 2007; VERGEL, 2015). En particular Radford, Bardini y Sabena (2006) abordan la pregunta “¿cómo los estudiantes coordinan los diferentes medios semióticos de objetivación en la generalización de patrones?” (p. 343). Esta pregunta es propuesta con el propósito de comprender la forma en que los estudiantes de grado noveno prestan atención a lo que se les da perceptiblemente. Es decir, a los tres primeros términos de una secuencia de patrones geométrica, y empiezan a ir más allá para comprender una posible estructura matemática general en la secuencia de patrones.

Los hallazgos encontrados, en el análisis de los episodios de clase, les permite a los investigadores concluir que los estudiantes a través de las palabras, los gestos y el ritmo colocan perceptualmente en primer plano algunos atributos geométricos y numéricos de cada uno de los términos de una secuencia. Atributos relevantes que les ayudan a reconocer una regularidad o patrón en la secuencia, la cual resulta crucial para dotar de sentido a la generalidad. Así mismo, los investigadores ponen en evidencia la manera como los estudiantes movilizan sincrónicamente los gestos, las palabras y el ritmo, permitiéndoles hacer aparente perceptualmente un orden que va más allá de las figuras que son presentadas en la tarea.

En estos hallazgos y en otros asociados a la generalización de patrones se pone en evidencia cómo la movilización sincrónica de diferentes medios semióticos hace visible al ámbito de la atención, del entendimiento y de la reflexión la manera como empiezan a ser reconocidos perceptualmente ciertos aspectos asociados a la estructura matemática de los términos de una secuencia de patrones geométrica. En coherencia con estos hallazgos en este artículo queremos presentar la manera como la movilización sincrónica de diferentes medios semióticos de objetivación materializa la evolución de la actividad perceptual de un grupo de estudiantes de grado tercero al abordar una tarea asociada al conteo de cantidades.

MARCO TEÓRICO

La labor conjunta se constituye en la categoría fundamental de la Teoría de la Objetivación (TO), “una teoría de la enseñanza y aprendizaje inspirada en el materialismo dialéctico y en la escuela de pensamiento de Vygotsky” (RADFORD, 2020, p. 15). Esta categoría fundamental de la TO se enmarca en el materialismo dialéctico porque brinda una visión histórico-cultural del ser humano y porque ofrece una ontología en la cual el ser humano es conceptualizado como parte constitutiva de la naturaleza, un ser natural, sensible, inevitablemente afectado por otras partes de la naturaleza, un ser de necesidades de supervivencia, artísticas, intelectuales, entre otras (RADFORD, 2018b).

Así mismo, la labor conjunta se caracteriza por ser un fenómeno espacio temporal, en el cual los seres humanos laboran conjuntamente en la satisfacción de necesidades y que para satisfacerlas deben activarse, es decir, gastar energía, actuar, organizarse, en términos generales hacer cosas (RADFORD, 2018b, 2020, 2021). Radford (2018b, p. 71) afirma que

La actividad [labor conjunta] es una “energía” que despliegan los participantes [los seres humanos] y que viene a envolverlos, energía espaciotemporal que es sensible y sensual, material e ideacional, discursiva y gestual, y que es fluido portador de intenciones, deseos y motivos medio confesados y medio comprendidos.

La caracterización de la labor conjunta desde la TO pone en evidencia, primero, el carácter social de la labor conjunta, no exclusivamente con otros sujetos de carne y hueso, sino también con otros recursos históricos y culturales, en los cuales ha sido consignada la actividad, las voces, las formas de pensar y de actuar de generaciones de hombres precedentes (RADFORD, 2018b). Segundo, en la labor conjunta no se descarta el papel fundamental que desempeña el lenguaje, los signos, los artefactos y el cuerpo, dado que son parte constitutiva de la labor conjunta que se configura entre los individuos y parte constitutiva de su pensamiento.

La labor conjunta como la categoría central de la TO afirma el papel ontológico y epistemológico fundamental de la materia, el cuerpo, el movimiento, la acción, el ritmo, la pasión y la sensación en lo que es ser humano. (RADFORD, 2018c, p. 8)

Tercero, “es a través de la labor conjunta o trabajo que los individuos se desarrollan y se transforman continuamente” (RADFORD, 2014, p. 137).

Es a través de la actividad humana que nos ponemos en devenir y nos convertimos en individuos inacabados, en flujo constante, y que nos producimos a nosotros mismo con, y a través, de otros, dentro de las posibilidades y límites que ofrece la cultura. (RADFORD, 2017a, p. 143)

En la labor conjunta los seres humanos recurren a los órganos de los sentidos y al cuerpo, con el propósito de satisfacer sus necesidades, movilizandolos formas de actividad que han sido constituidas histórica y culturalmente por generaciones precedentes. Esta movilización, de las formas de actividad, posibilita que sean actualizadas y refinadas, constituyéndose así en objeto de entendimiento y reflexión. Así mismo, “en los órganos de los sentidos se desarrollaron formas de actividad que aseguraban el planteamiento y regulación de complejos procedimientos y manipulaciones del hombre con los objetos y medios de trabajo” (DAVYDOV, 1978, p. 288).

Pero, no solamente a través de los órganos de los sentidos se desarrollan formas de actividad también éstos van estimulándose, evolucionando y refinándose lenta pero firmemente en la labor conjunta. DAVYDOV (1978, p. 288) pone en evidencia que

Los órganos de los sentidos comenzaban a observar y destacar en los objetos las propiedades y relaciones que eran, pues, más importantes para similar regulación. Así, pues, el ojo – por ejemplo - empezó a destacar en los objetos atributos importantes para el labrado de los mismos en el sentido mecánico, con cambio de su forma espacial, etc. Requerimientos análogos presentaba el trabajo con respecto a otros analizadores [órganos de los sentidos] (DAVYDOV, 1978, p. 288).

Valera (1971) amplía los planteamientos expuestos por Davydov señalando que

la mano no es sólo el órgano del trabajo; es también producto de él. [...] Pero la mano no era algo con existencia propia e independiente. Era apenas un miembro de un organismo entero y sumamente complejo. Y lo que beneficiaba a la mano beneficiaba también a todo el cuerpo servido por ella. (VARELA, 1971, 104, énfasis en el original).

En términos generales los órganos de los sentidos al estimularse, evolucionar y refinarse posibilitan que el organismo entero, que el ser humano en sí, también se estimule, evolucione y se refine, ocasionando así que los individuos se desarrollen y transformen continuamente a través de la labor conjunta. No obstante, surge la necesidad de precisar cómo se puede observar y analizar dicha estimulación, evolución y refinamiento de los órganos de los sentidos en la labor conjunta. Una alternativa se encuentra en los medios semióticos de objetivación que son movilizados y refinados por los individuos en dicha labor.

Los medios semióticos de objetivación, en la Teoría de la Objetivación, son definidos como aquellos recursos a los que acuden los individuos para hacer aparecer algo frente a ellos, por ejemplo, una de las propiedades geométricas de un rombo, la regla que permite determinar cualquier término de una secuencia (RADFORD, 2003, 2009). Estos recursos pueden ser símbolos, gestos, artefactos, actividad perceptual, actividad corpórea, enunciaciones, gráficos, ritmo, entre otros. Éstos hacen visible, visual y auditivamente, al ámbito de la atención, del entendimiento y de la reflexión, primero, las formas sensibles y materiales a través de las cuales son producidos los saberes que han sido constituidos histórica y culturalmente por las generaciones precedentes. Segundo, las formas sensibles y materiales a través de las cuales los individuos se desarrollan y transforman continuamente.

En la labor conjunta los medios semióticos de objetivación trabajan conjuntamente para notar significativamente algo que ya existe en la cultura y se encuentra frente a los individuos, algo que es diferente e independiente de cada uno de ellos (RADFORD, 2003). Así mismo, se reorganizan y refinan constantemente, posibilitando así dirigir la atención en aquellos aspectos que parecen más relevantes y significativos de lo que se encuentra frente a ellos. Esta reorganización y refinamiento en los medios semióticos de objetivación posibilita que los órganos de los sentidos se estimulen, evolucionen y se refinan.

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE DATOS CORRESPONDIENTE A UN MOMENTO DE LA ACTIVIDAD EN EL AULA DE CLASE DE MATEMÁTICAS

Los datos y resultados de investigación presentados en este artículo están vinculados a la investigación doctoral titulada^[1] *Formas de pensamiento aditivo en estudiantes de tercero de primaria (8-9 años): Una aproximación desde la Teoría de la Objetivación*. Esta investigación ha sido orientada por la pregunta de investigación ¿Qué formas de pensamiento aditivo aparecen, son producidas, a través del encuentro con saberes históricos-culturales aritméticos en la labor conjunta entre estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria y el profesor durante la resolución de tareas de tipo aditivo en los naturales?

La investigación se desarrolló con dos grupos, de 32 estudiantes cada uno, de tercer grado de Educación Básica Primaria de una institución educativa de carácter oficial y público de la localidad de Usme, perteneciente a la ciudad de Bogotá en Colombia. La actividad que se desarrolló con las profesoras y con los estudiantes de estos grupos se realizó en el transcurso de las sesiones de la clase de matemáticas que hacen parte del programa institucional propuesto por el colegio. Cada sesión de la clase tenía una duración de 120 minutos. Éstas eran dirigidas por las profesoras titulares de cada grupo y de la asignatura de matemáticas. Una de ellas es licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas y la otra es magíster en educación.

La recolección de la información se realizó en cuatro fases teniendo en cuenta las orientaciones metodológicas de Miranda, Radford, y Guzmán (2007). La primera fase corresponde a la grabación en video de la actividad que emergió durante la resolución de cada una de las tareas de tipo aditivo. Se utilizaron tres cámaras de video, las cuales registraron, de principio a fin, cada uno de los cuatro momentos de la actividad de aula de clase de matemáticas: (i) presentación de la actividad por parte de la profesora; (ii) trabajo en pequeños grupos, conformados por cuatro estudiantes de manera libre; (iii) discusión y retroalimentación

por parte de la profesora a cada uno de los pequeños grupos; (iv) discusión general entre los grupos y la profesora (RADFORD, 2017a, 2021). La segunda fase está asociada a la obtención de las hojas de trabajo de cada grupo de estudiantes y a la toma de fotografías de las anotaciones realizadas en el tablero. El análisis de las grabaciones en video constituye la tercera fase de estas orientaciones metodológicas. Por último, la cuarta fase corresponde a la realización de las transcripciones del discurso verbal y no verbal, es decir, de las acciones multimodales que fueron movilizadas por los estudiantes y la profesora.

La constitución y el análisis de los datos de investigación se enmarca en la metodología multi-semiótica (RADFORD; BARDINI; SABENA, 2006; 2007). En ésta se centra la atención en las relaciones, la dialéctica y la dinámica entre lo enunciado, los gestos, el ritmo, la actividad perceptual, la postura corporal y el uso de signos y artefactos. Esta constitución y análisis de los datos es refinado a través de la articulación de las diferentes fuentes de información, con el propósito de reconocer, rastrear y caracterizar las relaciones y refinamientos entre los diferentes medios semióticos de objetivación que son movilizadas por las estudiantes y la profesora para hacer emerger y materializar su pensamiento matemático.

El análisis que presentamos a continuación corresponde, específicamente, a uno de los momentos de la actividad del aula de clase. En éste la profesora se acerca a uno de los pequeños grupos de trabajo, con el propósito de promover la discusión y retroalimentación en torno a las formas de reflexión, acción y expresión que han sido utilizadas por ellas para abordar y dar solución al primer ítem de la tarea uno. En este ítem se les solicita a las estudiantes *escribir detalladamente un procedimiento que le permita a Willy determinar con exactitud cuántas ovejas tiene en el corral*. El pequeño grupo con el cual interactúa la profesora en ese momento de la actividad está conformado por Allison, Brenda, Julieth y Luisa.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez las integrantes del grupo finalizan el conteo de las ovejas, contándolas una a una, y determinan el cardinal de esta colección, la profesora se acerca al grupo con el propósito de familiarizarse con la manera como ellas han abordado y solucionado el primer ítem de la tarea uno. Para ello, la profesora les pregunta qué están haciendo, a lo que Luisa responde que van a escribir la respuesta obtenida después de llevar a cabo el proceso de conteo de las ovejas. No obstante, la profesora con el propósito de indagar más en detalle acerca de las formas de acción, reflexión y expresión utilizadas por las integrantes del grupo les pregunta ¿qué hicieron inicialmente? Julieth hace escuchar su voz para responderle que contaron las ovejas.

L1. Profesora: ¿Qué hacen?

L2. Luisa: Ya vamos a escribir la respuesta.

L3. Profesora: ¿Qué hicieron inicialmente?

L4. Julieth: Contamos las ovejas.

L5. Profesora: ¿Ya las contaron?

L6. Luisa: Sí. Y nos dio treinta y seis ovejas.

L7. Profesora: ¿36? ¿Qué hicieron para saber cuántas había?

L8. Brenda: Contarlas.

L9. Profesora: Pero, pues quiero ver cómo lo hicieron.

L10. Luisa: Allison comenzó por grupos así [simultáneamente que enuncia la palabra así, ella encierra con sus cinco dedos de la mano derecha el primer grupo de ovejas que se encuentra de izquierda a derecha y de arriba a abajo en el rebaño. Una vez más reitera el gesto de encerrar con sus cinco dedos el mismo grupo de ovejas]. Así [encierra con sus cinco dedos de la mano derecha el segundo grupo de ovejas que se encuentra de izquierda a derecha y de arriba a abajo en el rebaño]. Así [la profesora interviene para preguntar ¿Por grupos? ¿De a cuántos? Luisa encierra con sus cinco dedos de la mano derecha el tercer grupo de ovejas que se encuentra en el centro, en la parte superior del rebaño]. De a ocho. Ocho, ocho, ocho, ocho y ocho

[Simultáneamente que enuncia cada palabra ocho, encierra con sus cinco dedos de la mano derecha a cada uno de los seis grupos de ovejas que conforman al rebaño]. Y llegamos a treinta y seis.

Una vez Julieth y Brenda dan a conocer a la profesora que contaron las ovejas, Luisa hace escuchar su voz para precisar cómo realizaron el conteo. De este modo, explica que Allison realizó el conteo de éstas por grupos. No obstante, ella complementa esta explicación con la utilización de la palabra “así”. A través de esta palabra Luisa busca atraer la atención de la profesora y de las demás compañeras para delimitar los grupos que fueron establecidos y contados por Allison.

Luisa simultáneamente que enuncia la palabra “así” encierra con sus cinco dedos de la mano derecha uno de los grupos (ver Figura 1a). Esta acción de encerrar es reiterada una vez más sobre el mismo grupo (ver Figura 1b). Luego, enuncia nuevamente la palabra “así” simultáneamente que encierra con sus cinco dedos de la mano derecha otro de los grupos, el segundo grupo de ovejas contado por Allison (ver Figura 1c). Esta coordinación entre lo enunciado y el gesto de encerrar es utilizada una vez más por Luisa para hacer visible otro de los grupos, el tercer grupo de ovejas contado por Allison (ver Figura 1d).

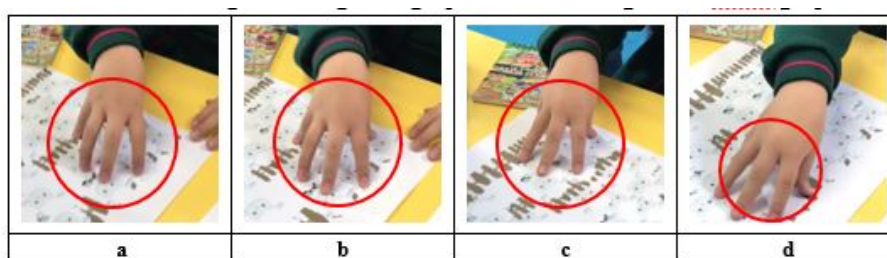


FIGURA 1

Figura 1a primer grupo de ovejas encerrado. Figura 1b primer grupo de ovejas nuevamente encerrado. Figura 1c segundo grupo encerrado. Figura 1d tercer grupo encerrado.

Pantano-Mogollón (2021)

Luisa a través de esta serie de coordinaciones entre la actividad perceptual, lo enunciado y el gesto de encerrar con sus cinco dedos está encarnando, primero, la manera como está siendo observado el rebaño de las ovejas por Allison, puesto que para ella el rebaño corresponde a una configuración constituida por pequeños grupos y no a una configuración constituida por una multitud de ovejas dispersas; segundo, la manera como Luisa ha *reconocido, interpretado y dotado de sentido* las formas de reflexión y acción movilizadas por Allison. Adicionalmente, esta coordinación entre la actividad perceptual, lo enunciado y el gesto de encerrar con sus cinco dedos de la mano desempeña un papel fundamental en la comunicación de las ideas y en la materialización de las intenciones y de la regularidad, en la distribución de las ovejas en el corral, con la que se ha topado Allison. Así como también en las formas de pensar que son puestas en movimiento por ella. Radford (2005, p. 143) afirma que

Ellos [los gestos] son elementos indispensables en el proceso de objetivación del saber de los estudiantes. Los gestos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.

A través de su implicación Luisa pone en evidencia la *capacidad generativa* que tiene para actualizar, una vez más, las formas de reflexión, acción y expresión que fueron materializadas por Allison para contar a las ovejas. Nótese cómo Luisa ha estado totalmente implicada y comprometida con las actuaciones realizadas por Brenda y por Allison. Es aquí en donde empieza a constituirse, poco a poco, una labor conjunta entre las integrantes del grupo. Esta labor conjunta está caracterizada, primero, por esfuerzos colectivos que sobrepasan las actitudes individualistas de las integrantes del grupo y en los cuales cada una de ellas da a conocer su voz, su ser y su sentir. Lo anterior, con el propósito de satisfacer las necesidades colectivas que han emergido como consecuencia de la tarea que ha sido propuesta por la profesora. Segundo, por una búsqueda

en común en la cual las estudiantes actúan, piensan y sienten juntas, entrelazando y complementando sus energías, capacidades, actuaciones y formas de pensar en la misma dirección. Lo anterior, no ignora que en esa búsqueda *en* común emerjan formas de pensar distintas, las cuales gradualmente son compartidas, comprendidas y articuladas unas a otras, entrelazándose así en una sola forma de pensar en la misma dirección que está constituida y fundamentada en la diversidad de formas de reflexión y acción actualizadas.

Ahora bien, estas formas de reflexión y acción han sido reconocidas y se han constituido en objeto de conciencia y pensamiento para Luisa gracias a los medios semióticos de objetivación que fueron movilizados por Allison, específicamente, a los golpes realizados con el lápiz de color morado y con su dedo índice de la mano derecha en cada una de las ovejas, a la enunciación de las palabras que refieren a los números de la secuencia de los números naturales, al ritmo empleado en dicha enunciación, a la actividad perceptual y a las diferentes pausas realizadas tanto en sus elocuciones como en las acciones desarrolladas a medida que finalizaba el conteo de uno de los grupos e iniciaba con el conteo de otro de éstos.

“El signo surge como una relación en la que una persona actúa sobre otra, y solo posteriormente sirve como un medio para actuar sobre uno mismo” (ROTH, 2018, p. 44). Los medios semióticos de objetivación movilizados por Allison emergen como una forma de relación entre ella y las demás integrantes del grupo, más específicamente, a través de esta forma de relación la conciencia de Allison se entreteje con la conciencia de Luisa, la de las demás integrantes y la de la profesora. “La conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena” (BAJTÍN, 1999, p. 360).

Nótese el papel fundamental que desempeñan los medios semióticos de objetivación y las relaciones dinámicas y estructurales que se constituyen entre los componentes materiales-ideacionales del pensamiento en la toma de conciencia de las formas de reflexión y acción que *aparecen*, son *producidas* y *materializadas* en la labor conjunta. A través de los medios semióticos de objetivación las formas de reflexión y acción actualizadas se hacen visibles al ámbito de la atención y del entendimiento de las integrantes del grupo y de la profesora, constituyéndose así en objetos de conciencia y pensamiento, no solo para Allison sino también para Luisa, las demás integrantes del grupo y la profesora. De manera más precisa, los medios semióticos de objetivación que son movilizados permiten notar algo, que está allí, “algo que se revela a la conciencia no pasivamente sino por medio de la actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica” (RADFORD, 2020, p. 20).

Mientras Luisa explica la manera como Allison realizó el conteo de las ovejas, la profesora interviene para preguntarle por la cantidad que conforma a cada grupo. Luisa ante su solicitud responde que de a ocho. Esta respuesta es acompañada por la acción de encerrar con sus cinco dedos de la mano derecha a cada uno de los seis grupos que conforman al rebaño simultáneamente que enuncia la palabra ocho por cada uno de éstos. Posterior a esa coordinación de acciones Luisa concluye que de esa manera llegaron al número treinta y seis. La profesora con el propósito de escuchar a las demás integrantes del grupo le pregunta a Brenda cómo realizó el conteo de las ovejas. Ante esta solicitud, Brenda menciona que las estaba contando por grupos, que la cantidad de ovejas que conformaba a cada grupo era retenida en la mente y que de ese modo podía saber cuantas ovejas había en total en el rebaño. No obstante, la profesora con el propósito de hacer visible la manera como Brenda realizó el conteo, le solicita que le deje ver.

L1. Profesora: *Y, ¿Brenda cómo hizo?*

L2. Brenda: *Pues es que* [interviene la profesora para decirle a Brenda que le explique lo que le estaba mostrando]. *Yo estaba haciendo así: que uno contaba cuantos grupos y uno los contaba en la mente. Entonces yo sabía cuantos.* [Usando su lápiz de color azul traza varios óvalos en el aire para encerrar el primer grupo de ovejas que se encuentra de izquierda a derecha y de arriba a abajo en el rebaño. La profesora interviene para solicitarle que le deje ver]. *Así, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho* [simultáneamente que enuncia cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el ocho golpea con su lápiz de color azul cada una de las ovejas. La enunciación de las palabras es realizada de manera rítmica].

L3. Brenda: *Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis* [simultáneamente que enuncia cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el seis golpea con su lápiz de color azul cada una de las ovejas. La enunciación de las palabras es realizada de manera rítmica].

De este modo, Brenda recurre a la enunciación de la palabra “así” para dar solución a la solicitud de la profesora simultáneamente que inicia el conteo de las ovejas que se encuentra en la parte superior izquierda del rebaño. Brenda para llevar a cabo el conteo recurre a la enunciación de cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el ocho simultáneamente que golpea con su lápiz de color azul cada una de las ovejas.

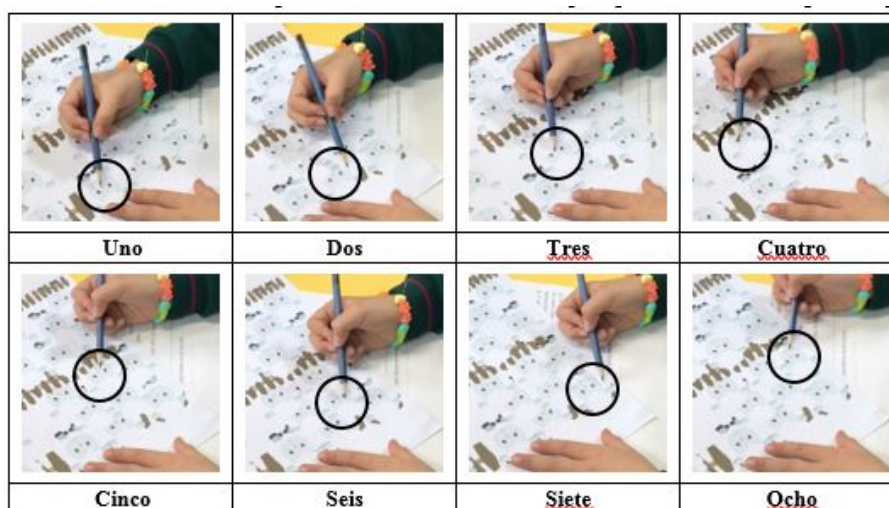


FIGURA 2

Conteo realizado por Brenda de las ocho ovejas que conforman al primer grupo.

Pantano-Mogollón (2021)

Una vez que Brenda hace el conteo de las ovejas que conforman al primer grupo, de manera inmediata, inicia con el conteo de las ovejas que conforman al segundo grupo. No obstante, este conteo no lo continúa desde el número nueve sino desde el número uno. El conteo de las ovejas que conforman al segundo grupo desde el número uno pone en evidencia, primero, que Brenda está observando el rebaño como una configuración constituida por pequeños grupos, seis pequeños grupos en totalidad. Éstos están delimitados por los espacios en blanco que están dispuestos entre las ovejas y las cercas dispuestas al interior del corral. Segundo, que ella desea determinar el cardinal de cada grupo con el propósito de agregarlos, y así encontrar el total de ovejas que tiene Willy en su rebaño.

Es aquí donde emerge el encuentro con una forma de pensamiento aditivo asociada al conteo de cantidades. Esta forma de pensamiento aditivo está caracterizada por: (i) la descomposición del rebaño de ovejas en que pequeños grupos de éstas, (ii) el conteo de las ovejas que conforman a cada uno de éstos, desde la primera hasta la última de ellas, y (iii) la delimitación del cardinal de cada uno y la posible agregación de los diferentes cardinales.

Ahora bien, Brenda recurre a las mismas formas de reflexión y acción utilizadas en el conteo del primer grupo para realizar el conteo del segundo grupo. Específicamente, ella recurre a la enunciación de cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el seis simultáneamente que golpea con su lápiz de color azul cada una de las ovejas.

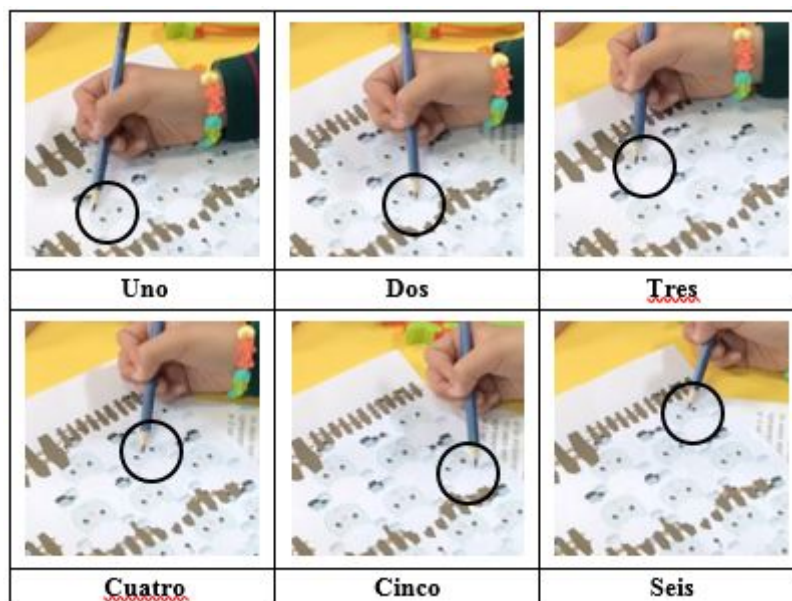


FIGURA 3

Conteo realizado por Brenda de las seis ovejas que conforman al segundo grupo.

Pantano-Mogollón (2021)

De manera inmediata, Brenda continúa con el conteo de las ovejas que conforman al tercer grupo. Ella inicialmente usa la palabra “acá” con el propósito de atraer la atención de la profesora y de las demás compañeras sobre el tercer grupo de ovejas que ha sido delimitado por ella. En el proceso de conteo de estas ovejas ella recurre a la asignación, una vez más, de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el cinco por cada una de las ovejas que son golpeadas con el lápiz de color azul.

L1. Brenda: *Acá, uno, dos, tres, cuatro, cinco* [simultáneamente que enuncia cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el cinco golpea con su lápiz de color azul a cada una de las ovejas].

L2. Luisa: *Seis, seis, seis, seis, seis, seis* [Luisa golpea con su dedo índice de la mano derecha a la oveja que olvidó contar Brenda y que hace parte del tercer grupo de ovejas. Allison acompaña el golpe realizado por Luisa señalando con su dedo índice de la mano derecha a la misma oveja golpeada por Luisa].

No obstante, Brenda olvida contar a la oveja número seis, perteneciente al tercer grupo de ovejas establecido por ella. Ante este olvido, interviene Luisa, de manera inmediata, para golpear con su dedo índice a la oveja número seis simultáneamente que enuncia la palabra seis varias veces. Estas acciones realizadas por Luisa son acompañadas por Allison con el señalamiento de la misma oveja con su dedo índice de la mano derecha.

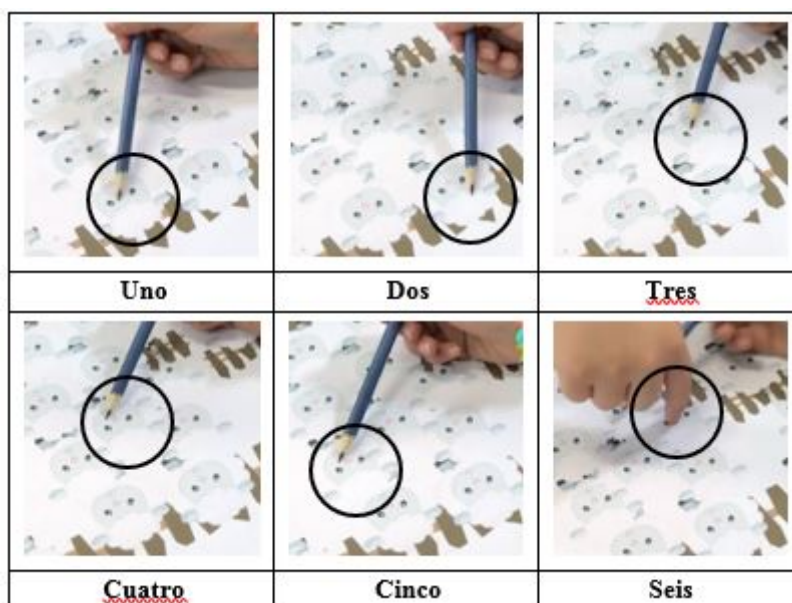


FIGURA 4

Conteo realizado por Brenda de cinco de las seis ovejas que conforman al tercer grupo y conteo de la oveja número seis por parte de Luisa.

Pantano-Mogollón (2021)

Vale la pena resaltar cómo Luisa y Allison están totalmente *activas*, implicadas y vinculadas con las actuaciones y enunciaciones realizadas por Brenda. A tal punto que logran reconocer cuál ha sido la oveja omitida en el proceso de conteo y cuál es el número que se debe enunciar inmediatamente al enunciado por Brenda. Lo anterior, pone en evidencia que las enunciaciones y actuaciones realizadas por Brenda son *reconocidas, interpretadas, dotadas de sentido* por Allison y Luisa, emergiendo así *una forma de relación fluida* de escucha, de reconocimiento, de aprobación y de responsabilidad por lo que dice y piensa la otra persona. En términos generales esta forma de relación fluida que emerge es la labor conjunta.

Este reconocimiento de la oveja número seis es posible, en primer lugar, porque Luisa y Allison han logrado reconocer el tercer grupo de ovejas que ha sido delimitado por Brenda, es decir, han logrado identificar el patrón de delimitación utilizado por Brenda para establecer los pequeños grupos de ovejas, los cuales están determinados por los espacios en blanco que están dispuestos entre las ovejas y las cercas dispuestas al interior del corral. En segundo lugar, porque han delimitado perceptualmente las ovejas que constituyen al tercer grupo. Esta delimitación perceptual es posible gracias a que la cantidad de ovejas que lo constituyen no supera la decena y todas pueden ser agarradas perceptualmente de un solo vistazo. Es aquí en donde emerge la subitización, “ya que la base de la subitización se encuentra en distinguir y reconocer patrones formados por pequeñas configuraciones [de objetos]” (CASTRO, RICO & CASTRO, 1988, p.p. 118-119). En tercer lugar, porque ellas a través de cada uno de los golpes realizados por Brenda, con su lápiz de color azul, y de cada una de sus enunciaciones logran distinguir aquellas ovejas que han sido contadas de aquellas que no, a pesar de que éstas no disponen de una marca que permita diferenciarlas perceptualmente con mayor facilidad.

Nótese que los medios semióticos de objetivación que son movilizados por Brenda están siendo *reconocidos, interpretados y dotados de sentido* por Luisa y Allison, puesto que a través de éstos Luisa y Allison, primero, logran reconocer las formas de reflexión y acción que están siendo actualizadas por Brenda para dar solución a la tarea. Segundo, complementar las actuaciones y expresiones de Brenda, constituyéndose así una labor conjunta que es impulsada por esfuerzos colectivos (RADFORD, 2020), en los cuales las integrantes del grupo trabajan juntas para alcanzar niveles de conceptualización matemática cada vez más profundos.

L1. Brenda: *Seis*. [enuncia la palabra seis con más intensidad simultáneamente que golpea a la oveja con su lápiz de color azul]. *Sieeee...* [intenta enunciar, por completo, la palabra siete mientras que golpea una de las ovejas. No obstante, hace una pausa]. *Uno, dos, tres, cuatro* [rápidamente desplaza su lápiz sobre la hoja de trabajo para golpear a otra de las ovejas. Una vez es golpeada enuncia la palabra uno. Allison y Luisa inician el conteo de las ovejas golpeando con su dedo índice de la mano derecha a cada una de éstas simultáneamente que enuncian cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el cuatro. Brenda simultáneamente que enuncia cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el dos hasta el cuatro golpea con su lápiz de color azul a cada una de las ovejas].

Una vez es golpeada y señalada la oveja número seis por Luisa y Allison, Brenda enuncia la palabra seis con más intensidad simultáneamente que golpea con su lápiz a la oveja que había olvidado contar. Brenda continuando con el conteo, intenta enunciar por completo la palabra siete simultáneamente que golpea a otra de las ovejas. No obstante, rápidamente reinicia el conteo, empezando desde el número uno, con el propósito de iniciar el conteo del cuarto grupo de ovejas delimitado por ella. Tan pronto es golpeada una de las ovejas perteneciente a este grupo, ella enuncia la palabra uno. Estas acciones realizadas por Brenda son acompañadas por Allison y Luisa, quienes también inician el conteo del mismo grupo, golpeando cada una de las ovejas con su dedo índice de la mano derecha simultáneamente que enuncian cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el cuatro. En sincronía con las acciones desplegadas por Allison y Luisa, Brenda cuenta las ovejas número dos, tres y cuatro, realizando golpes con su lápiz en cada una de las ovejas simultáneamente que enuncia cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el dos hasta el cuatro.

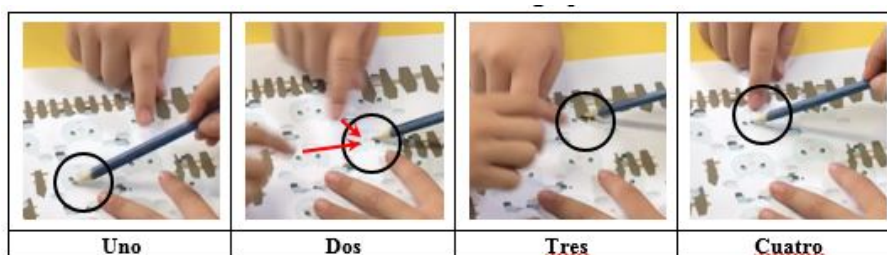


FIGURA 5

Conteo realizado por Allison, Brenda y Luisa de las cuatro primeras ovejas que conforman al cuarto grupo.
Pantano-Mogollón (2021)

En este momento de la labor conjunta es posible observar cómo se integran y articulan las actuaciones y enunciaciones realizadas por Allison, Brenda y Luisa en esa *búsqueda en común* por explicarle a la profesora como hicieron el proceso de conteo de las ovejas.

L1. Luisa: [Se presenta una corta pausa en las actuaciones y enunciaciones]. *Cinco, seis, siete, ocho* [Por cada palabra que enuncia asigna un golpe, con su dedo índice de la mano derecha, en cada una de las ovejas. Interrumpe Brenda para explicarle a la profesora que uno debe tenerlo anotado porque o si no a uno se le olvida].

L2. Profesora: *Bueno. Entonces, ¿cuántas llevarías?* [mientras tanto Luisa hace el conteo de las siguientes cuatro ovejas que constituyen al cuarto grupo, enunciando cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el cuatro hasta el ocho simultáneamente que golpea, con su dedo índice de la mano derecha, a cada una de las ovejas]. *Si dices que se te olvida, ¿cuántas llevarías hasta ahí?* [Brenda sonríe porque no sabe qué responderle a la profesora].

Tan pronto son contadas las cuatro primeras ovejas que conforman al cuarto grupo de éstas, Allison, Brenda y Luisa hacen una pausa en sus actuaciones y enunciaciones. Esta pausa emerge, tal vez, como consecuencia de que ellas no están totalmente seguras si deben continuar el conteo con la oveja número cinco o iniciar el proceso conteo del quinto grupo de ovejas. Esta consecuencia se debe al hecho de que entre las

ovejas no se dispone de suficiente espacio en blanco para garantizar la separación entre el cuarto grupo y el quinto grupo. Lo anterior, pone en evidencia que Luisa se ha topado con la manera como están distribuidas las ovejas en el corral, es decir, pequeños grupos de ovejas que se encuentran determinados por los espacios en blanco que están dispuestos entre las ovejas y las cercas dispuestas al interior del corral. No obstante, Luisa toma la iniciativa, continuando con el conteo de las ovejas.

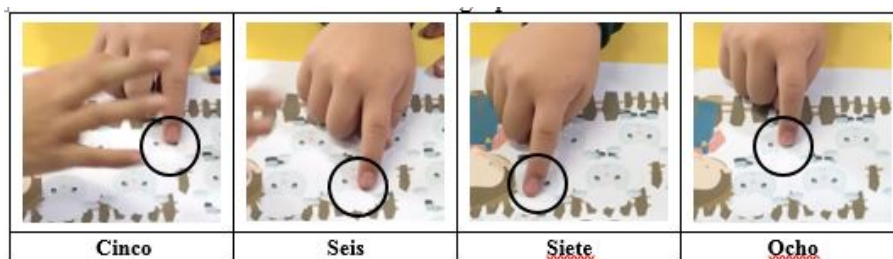


FIGURA 6

Conteo realizado por Luisa de las siguientes cuatro ovejas que conforman al cuarto grupo.

Pantano-Mogollón (2021)

Mientras que Luisa adelanta el conteo de las ovejas, Brenda interviene para explicarle a la profesora que los cardinales de cada uno de los grupos de ovejas que fueron delimitados deben ser registrados en una hoja para que no se le olviden. Ante esta explicación la profesora interviene para preguntarle a Brenda ¿cuántas llevaría?, con el propósito, primero, de registrar los cardinales de los grupos que han sido contados hasta ese preciso momento y, segundo, de garantizar que no sean olvidados esos cardinales una vez se continúe con el conteo de los grupos de ovejas que hacen falta.

Continuando con su intervención, la profesora recurre a la expresión utilizada por Brenda, “si dices que se te olvida”, con el propósito de precisar y dar mayor énfasis a la pregunta planteada con anterioridad. De este modo, ella le pregunta a Brenda “¿cuántas llevarías hasta ahí?” A través de esta pregunta y de la utilización de la palabra ahí la profesora busca delimitar espacial y temporalmente el proceso de conteo que ha sido llevado a cabo por Brenda hasta ese preciso instante. Brenda al no tener una respuesta exacta a la pregunta sonríe. No obstante, mientras la profesora y Brenda interactúan Luisa continua con el conteo de las ovejas que constituyen al quinto grupo. Luisa en el proceso de conteo de este grupo recurre a la enunciación de cada una de las palabras que refieren a los ocho primeros números naturales simultáneamente que golpea con su dedo índice a cada una de las ovejas que lo conforman.

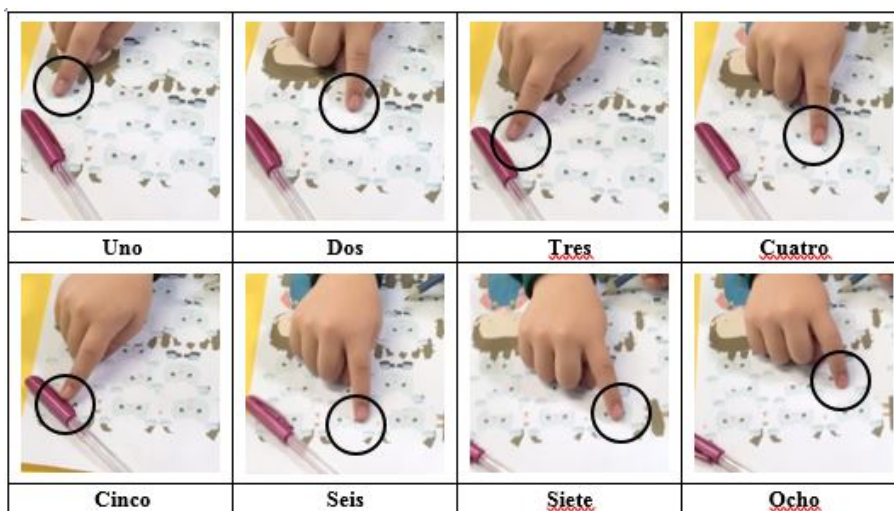


FIGURA 7

Conteo realizado por Luisa de las ocho ovejas que conforman al quinto grupo.

Pantano-Mogollón (2021)

Dado que Brenda no logra dar respuesta a la pregunta, Luisa hace escuchar su voz para plantear que la mayoría de las veces los grupos están conformados por seis ovejas. Este planteamiento es acompañado por la utilización de la palabra “acá”, a través de la cual Luisa busca atraer al ámbito de la atención y del entendimiento de la profesora y de sus compañeras uno de los grupos que está conformado exactamente por seis ovejas. Simultáneamente que usa la palabra “acá” Luisa recurre a sus cinco dedos de la mano derecha para encerrar a ese grupo.

L1. Luisa: *Aunque la mayoría, la mayoría de las veces son de seis. Pero acá [encierra con los cinco dedos de su mano derecha a uno de los grupos que está conformado exactamente por seis ovejas], como acá hay seis porque ésta se escondió [señala la oveja que Brenda había olvidado contar]. Entonces, seis [encierra con los cinco dedos de su mano derecha el mismo grupo conformado por seis ovejas] más seis [desplaza su mano derecha sobre la hoja de trabajo para encerrar con los cinco dedos de su mano derecha al otro grupo que está conformado por seis ovejas] da doce.*

Luisa enfatiza, una vez más, que en ese grupo hay seis ovejas enunciando “acá hay seis porque ésta se escondió” mientras señala a la oveja que había olvidado contar Brenda. En seguida, Luisa con el propósito de enfatizar y capturar el cardinal correspondiente a ese grupo utiliza la expresión “entonces, seis” simultáneamente que encierra con sus cinco dedos a ese grupo de seis ovejas (ver Figura 8a). Luego, a esas seis ovejas añade otra seis, usando la expresión “más seis” simultáneamente que desplaza su mano derecha sobre la hoja de trabajo con el propósito de encerrar con sus cinco dedos otro de los grupos que está conformado por seis ovejas (ver Figura 8b). Mientras mantiene su mano encerrando a las seis ovejas enuncia “da doce”.

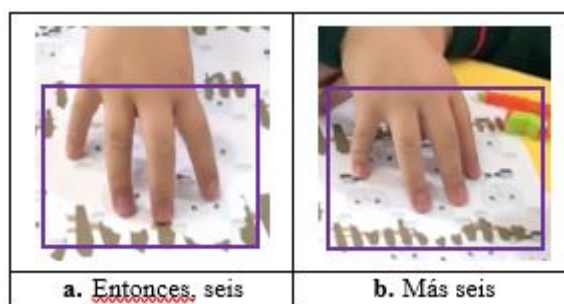


FIGURA 8

Figura 8a captura de las primeras seis ovejas. Figura 8b captura de las siguientes seis ovejas.

Pantano-Mogollón (2021)

En la labor conjunta que ha estado configurándose entre las estudiantes y la profesora es la primera vez que aparece la palabra “más” como objeto de pensamiento y expresión. La coordinación sincrónica entre la acción de encerrar con sus cinco dedos al primer grupo de ovejas conformado por seis de éstas, primera cantidad, y la enunciación de la expresión “entonces seis”, materializa la primera cantidad que es agregada por Luisa. Esta cantidad es articulada con la segunda cantidad a través de la coordinación sincrónica entre la enunciación de la expresión “más seis” y la acción simultánea de encerrar con sus cinco dedos de la mano derecha al segundo grupo de ovejas conformado por seis de éstas, segunda cantidad.

A través de esta serie de coordinaciones Luisa está materializando una forma de pensamiento aditivo asociada a la agregación de cantidades iguales, es decir, con el mismo cardinal. Esta forma de pensamiento que no había sido materializada con anterioridad en la labor conjunta emerge como consecuencia de: (i) observar el rebaño no como una totalidad constituida por unidades sueltas sino como una totalidad constituida por pequeños grupos de ovejas, (ii) del conteo de las ovejas por pequeños grupos que llevan a cabo las integrantes del grupo, (iii) la asignación del cardinal para cada pequeño grupo y (iv) que la profesora a través de las diferentes preguntas planteadas ha impulsado a emerger.

En este momento de la labor conjunta Luisa modifica las formas de reflexión y acción utilizadas con anterioridad para contar a las ovejas, puesto que hay una transición entre el conteo, de una a una, de las ovejas, al conteo de éstas a través de la agregación, más específicamente a través del emparejamiento de grupos de ovejas con el mismo cardinal y la agregación de éstos. Nótese que ella ha logrado reconocer los cardinales de la mayoría de los grupos que fueron delimitados como producto del proceso conteo realizado por Brenda, el proceso de conteo realizado por Brenda en compañía de Luisa y por el proceso de conteo realizado exclusivamente por Luisa. De este modo, Luisa ya no requiere contar, una a una, las ovejas que constituyen a cada uno de los grupos para determinar cuantas hay, sino que ella hace uso de cada uno de los cardinales que fueron obtenidos en los diferentes procesos de conteo.

En relación con esta modificación y refinamiento de los medios, Leontiev (2005) afirma que el desarrollo de las operaciones aritméticas implica el desarrollo de conceptos/objetos matemáticos y el refinamiento de los medios que son utilizados para llevar a cabo estas operaciones. Así mismo Leontiev (2005) pone en evidencia cómo el desarrollo, en este caso del concepto/objeto, está íntimamente ligado al refinamiento de los medios semióticos que son movilizados en la actividad matemática llevada a cabo por los individuos. En este sentido, “una aproximación al desarrollo del pensamiento aritmético escolar sería imposible sin prestar atención al papel que desempeñan los signos” (RADFORD, 2018a, p. 4).

Luisa continuando con su explicación recurre a la expresión “y aquí” para hacer visible ante los ojos de sus demás compañeras y de la profesora la primera cantidad, es decir, el primero de los grupos de ovejas que será emparejado y agregado. Tan pronto la atención recae sobre el primer grupo Luisa inicia el conteo. Esta acción es llevada a cabo enunciando cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el ocho, simultáneamente que golpea con su dedo índice de la mano derecha a cada una de las ovejas. Una

vez es determinado el cardinal correspondiente a este grupo Luisa enuncia la expresión “bueno, entonces, seis más seis” con el propósito de agregar las doce ovejas que habían sido añadidas con anterioridad a las dieciséis ovejas que está obteniendo de emparejar y agregar los dos grupos constituidos por ocho ovejas cada uno.

L1. Luisa: *Y aquí* [desplaza su mano derecha para señalar a uno de los grupos constituido por ocho ovejas]. *Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho* [Simultáneamente que enuncia cada una de las palabras que refieren a los números naturales desde el uno hasta el ocho golpea con su dedo índice de la mano derecha a cada oveja]. *Bueno, entonces, seis más seis* [Brenda y Allison unen sus voces para enunciar rítmicamente ocho más ocho dieciséis. De manera simultánea Allison coloca su mano derecha sobre el primer grupo de ovejas. Luego, en coordinación con Brenda señalan al segundo grupo de ovejas. Allison hace el señalamiento con su dedo índice de la mano derecha mientras que Brenda lo hace usando su lápiz de color azul]. *Y dieciséis más doce veintiocho. Diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho* [cada vez que enuncia una de las palabras que refiere a los números naturales desde diecisiete hasta el veintiocho desdobra cada uno de sus dedos de ambas manos].

No obstante, Allison y Brenda se anticipan a las reflexiones y actuaciones realizadas por Luisa, enunciando de manera rítmica y sincrónica, “ocho más ocho dieciséis”. Allison al enunciar por primera vez la palabra ocho desplaza su mano derecha para colocarla sobre el primer grupo de ovejas conformado por ocho de éstas (ver Figura 9a). Luego, Allison y Brenda enuncian, de manera simultánea y rítmica, la expresión más ocho mientras que cada una de ellas señala al segundo grupo de ovejas conformado por ocho de éstas. Allison hace el señalamiento a través de su dedo índice de la mano derecha mientras que Brenda lo hace con su lápiz de color azul (ver Figura 9b). Una vez es señalado el segundo grupo enuncian “dieciséis”, logrando así capturar el resultado de agregar los cardinales de los dos grupos de ovejas que están conformados por la misma cantidad de ovejas, por ocho de éstas.

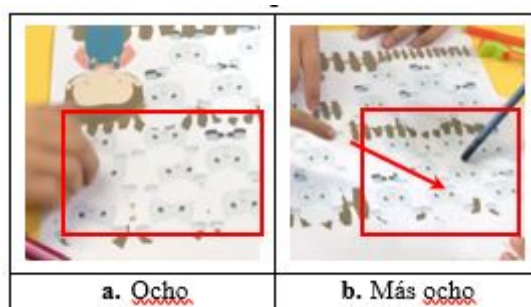


FIGURA 9

Figura 9a desplazamiento de la mano derecha con el propósito de colocarla sobre el primer grupo de ovejas conformado por ocho de éstas. Figura 9b señalamiento con el lápiz de color azul y señalamiento, con el dedo índice, del segundo grupo de ovejas conformado por ocho de éstas.

Pantano-Mogollón (2021)

Allison y Brenda a través de su implicación de manera inesperada en las actuaciones y reflexiones llevadas a cabo por Luisa ponen en evidencia, primero, que ellas han *reconocido*, se han *topado* con la forma de pensamiento aditivo asociada a la agregación de cantidades con el mismo cardinal que está siendo actualizada por Luisa. Este reconocimiento reside en que ellas son capaces de reconocer, emparejar y agregar grupos conformados por la misma cantidad de ovejas sin necesidad de que Luisa los empareje y agregue por completo. Segundo, que esfuerzos colectivos están emergiendo entre las integrantes del grupo con el propósito de contribuir a la *obra en común* que poco a poco va configurándose y materializándose como labor conjunta.

Luisa, aprovechando el resultado encontrado por Allison y Brenda al agregar los cardinales de los dos grupos, enuncia “dieciséis más doce veintiocho”. A través de esta expresión Luisa pone en evidencia una nueva agregación entre cantidades, la cual se caracteriza porque las cantidades no tienen el mismo cardinal, puesto que le está agregando a dieciséis, doce. Esta nueva agregación pone en evidencia la emergencia de una forma

de pensamiento aditivo asociada a la agregación de cantidades diferentes, es decir, con cardinales distintos. No obstante, Luisa duda acerca de si veintiocho es el resultado de sumar dieciséis más doce. Con el propósito de confirmar el resultado, ella procede a sumarle a dieciséis, doce, recurriendo al conteo a partir del número dieciséis hasta agregar una a una las doce unidades. Cada vez que Luisa enuncia una a una las palabras que refieren a los números naturales desde el número diecisiete hasta el número veintiocho, ella desdobra cada uno de sus dedos de ambas manos. A través de este conteo logra confirmar y concluir que dieciséis más doce es igual a veintiocho.

En este punto es indispensable relacionar la manera en que Luisa agrega doce a dieciséis, añadiendo una a una las doce unidades al dieciséis, puesto que esta manera de agregar las cantidades se encuentra estrechamente relacionada con los hallazgos reportados por Davydov (1975) en su investigación experimental asociada a la formación del concepto de número en el niño. Esta relación específicamente se encuentra entrelazada con la tercera etapa asociada al proceso de formación del número. En esta tercera etapa se realiza “la adición de cantidades de manera abstracta contando la segunda cantidad a adicionar a partir de la primera como un todo (método conceptual correcto de operación)” (DAVYDOV, 1975, p. 39). De este modo, Luisa está materializando, a través de sus actuaciones y enunciaciones, las acciones descritas en la tercera etapa reportada por Davydov, puesto que ella toma el dieciséis como un todo, a partir del cual empieza a contar, una a una, las doce unidades del doce para agregárselas.

L1. Profesora: *Bueno y ahí cuáles han sido las que han contado.*

L2. Luisa: *Sólo éstas hemos contado* [encierra los cuatro grupos de ovejas que han sido contados hasta el momento a través de un óvalo que traza sobre la hoja de trabajo con su dedo índice de la mano derecha]. *Sólo estos hemos contado. Y cuatro* [encierra con los cinco dedos de su mano derecha uno de los grupos que está conformado por cuatro ovejas] *más cuatro da ocho* [desplaza su mano derecha sobre la hoja de trabajo para encerrar con los cinco dedos el otro grupo que está conformado por cuatro ovejas. Brenda acompaña las actuaciones de Luisa enunciando ocho]. *Y veintiocho más ocho da* [Brenda se adelanta a la enunciación de Luisa para decir treinta y seis].

Una vez que Luisa determina la cantidad total de ovejas que hay en los cuatro grupos, los dos grupos conformados por seis ovejas cada uno y los dos grupos conformados por ocho ovejas cada uno, interviene la profesora con el propósito de indagar acerca de cuáles han sido los grupos que han sido contados hasta ese preciso momento. De este modo, Luisa procede a encerrar los cuatro grupos que han sido contados, trazando un óvalo sobre la hoja de trabajo con su dedo índice. Tan pronto traza el óvalo enuncia que sólo esas ovejas han sido contadas.

Posteriormente a la precisión de las ovejas que han sido contadas, Luisa procede a contar los dos grupos de ovejas faltantes. Ella recurre a la enunciación de la palabra cuatro para enfatizar el cardinal correspondiente al quinto grupo de ovejas que ha delimitado. Esta enunciación es acompañada de manera sincrónica por el gesto de encerrar con sus cinco dedos de la mano derecha al primer grupo conformado por cuatro de las ovejas (ver Figura 10a). Luego, de manera inmediata enuncia “más cuatro” simultáneamente que desplaza su mano derecha sobre la hoja de trabajo para, luego, encerrar con sus cinco dedos al segundo grupo conformado por cuatro ovejas (ver Figura 10b). Luisa mientras mantiene su mano derecha encerrando al segundo grupo enuncia “da ocho”. Esta enunciación es acompañada por la voz de Brenda, quien ha estado acompañando atentamente las actuaciones y enunciaciones realizadas por Luisa. A través de su voz, Brenda enuncia “ocho”, resaltando una vez más el resultado de agregar los cardinales de los dos grupos de ovejas encerrados por Luisa.



FIGURA 10

Figura 10a captura de las primeras cuatro ovejas. Figura 10b captura de las siguientes cuatro ovejas.

Pantano-Mogollón (2021)

Luisa a través de esta coordinación sincrónica entre los diferentes medios semióticos de objetivación movilizados está materializando una forma de pensamiento aditivo asociada a la agregación de cantidades con el mismo cardinal. Esta forma de pensamiento le posibilita llevar a cabo una forma más sistemática de conteo de aquella que fue utilizada inicialmente y que consistía en contar una a una todas las ovejas que conforman al rebaño. Una vez Luisa obtiene el resultado de agregar los cardinales de los dos grupos procede a realizar la suma entre veintiocho y ocho. No obstante, Brenda se adelanta a las acciones realizadas por Luisa, enunciando el resultado de dicha suma. En este momento de la labor conjunta, nuevamente, se pone en evidencia la emergencia de una forma de pensamiento aditivo asociada a la agregación de cantidades diferentes, es decir, con distinto cardinal.

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

A través de la constitución y el análisis de los datos de investigación es posible observar cómo las formas de conteo utilizadas por las estudiantes evolucionan. Esta evolución se moviliza desde el conteo, de una en una, de las ovejas, desde la primera hasta la última hasta el conteo de éstas por pequeños grupos, con el propósito de determinar el cardinal de cada uno de estos grupos y posteriormente, realizar la agregación de dichos cardinales. Esta última forma de conteo emerge en la labor conjunta como consecuencia de *reconocer*, *notar* o *toparse* con una regularidad en la configuración espacial en la que están dispuestas las ovejas en el rebaño. Esta regularidad consiste en dividir o separar el rebaño en pequeños grupos de ovejas, los cuales se encuentran determinados por los espacios en blanco que están dispuestos entre las ovejas y las cercas dispuestas al interior del corral. En esta labor conjunta, específicamente, el rebaño es dividido en seis pequeños grupos. Sophian (2007) pone en evidencia que es de particular interés en el desarrollo del pensamiento aditivo que los objetos que constituyen a una colección sean separados espacialmente y organizados en diferentes configuraciones.

Ahora bien, vale resaltar que el trabajo, la labor conjunta, es la condición básica y fundamental de toda la vida humana, a tal punto que éste ha constituido al propio hombre, por ejemplo, sus manos se han ido perfeccionando a través del trabajo, posibilitando así que el hombre adquiera nuevas facultades motrices que humanizan su campo motor y que lo diferencian del de otros mamíferos. Al igual que la mano los otros órganos de los sentidos, del hombre, han venido estimulándose, evolucionando y refinándose lenta pero firmemente a través del trabajo, posibilitando así que el hombre se constituya y sea lo que es gracias a su participación en esta actividad. En este sentido, en la labor conjunta, la actividad perceptual de las estudiantes y la profesora ha venido *estimulándose*, *evolucionando* y *refinándose* a tal punto de toparse con la regularidad en la configuración espacial en la que están dispuestas las ovejas en el rebaño.

Esta regularidad es reconocida a través del refinamiento de la actividad perceptual por parte de las estudiantes. Actividad perceptual que se moviliza de observar el rebaño como una configuración constituida por una multitud de ovejas dispersas a una configuración constituida por seis pequeños grupos de éstas. Esta

modificación en la manera de observar el rebaño junto con la delimitación del cardinal para cada uno de los pequeños grupos posibilita que los estudiantes reconozcan que el rebaño está constituido por parejas de grupos que tienen el mismo cardinal. Específicamente, dos de los grupos están conformados por ocho ovejas cada uno, otros dos de los grupos están conformados por seis ovejas cada uno y los dos grupos restantes están conformados por cuatro ovejas cada uno. La delimitación de las parejas de grupos con el mismo cardinal posibilita que las estudiantes recurran cada vez menos al conteo de cada una de ellas, una a una, y en cambio agreguen los cardinales iguales, obteniendo así nuevos cardinales que capturan el total de ovejas que hay entre cada pareja de grupos agregados. Estos nuevos cardinales, que son distintos, posteriormente son agregados, obteniendo así el cardinal que representa el total de ovejas que conforman el rebaño.

En síntesis, la actividad perceptual emerge como consecuencia de la labor conjunta que se configura entre las integrantes del grupo y la profesora y a través de la cual ocurre el encuentro con la regularidad espacial en la que se encuentran dispuestas las ovejas en el rebaño. Así mismo, la labor conjunta que se configura posibilita la emergencia y actualización de formas de pensamiento aditivo asociadas al conteo de cantidades cada vez más sofisticadas que trascienden del conteo de las ovejas, una a una, a la agregación de cantidades con el mismo y diferente cardinal para determinar el total de ovejas que hay en el rebaño.

REFERENCIAS

- BAJTI#N, M. *Estética de la creación verbal*. Madrid, España: Siglo XXI Editores, 1999.
- DAVYDOV, V. On the Formation of an Elementary Concept of Number by the Child. In J. Kilpatrick, E. Begle, I. Wirszup, & J. Wilson (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, Vol. XIII: Analyses of Reasoning Processes*. Stanford, CA. School Mathematics Study Group, 1975. p. 39–44.
- DAVYDOV, V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación, 1978.
- LEONTIEV, A. N. On the development of arithmetical thinking in the child. *Journal of Russian and East European Psychology*, v. 43, n. 3, p. 78-95, 2005.
- MIRANDA, I.; RADFORD, L.; GUZMÁN, J. Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, v. 19, n. 3, p. 5–30, 2007.
- RADFORD, L. Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 5, n. 1, p. 37–70, 2003.
- RADFORD, L. ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification, In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne. University of Melbourne, 2005. p. 143-145.
- RADFORD, L. Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, v. 70, n. 3, p. 111-126. 2009.
- RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, v. 7, n. 2, p. 132–150, 2014.
- RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En D'Amore, B.; Radford, L. (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá: Colombia, 2017a. p. 115–137.
- RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. En D'Amore, B.; Radford, L. (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá: Colombia, p. 115–137, 2017b.
- RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer: New York, 2018a. p. 3-25.
- RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, v. 12, n. 2, p. 61–80, 2018b.

- RADFORD, L. Teaching and learning (algebra or something else): Working together to make sense of similarities and differences between theories (and understanding oneself). In: **AERA Symposium Dealing with Diverse Discourses (3D): Can We Build on Each Other's Research Contributions?** New York, 2018c.
- RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación [A journey through the theory of objectification]. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), **Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática**. Livraria da Física. São Paulo, Brazil, 2020. p. 15-42.
- RADFORD, L. **The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning**. Brill/Sense: Leiden, The Netherlands. 2021.
- RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Rhythm and the Grasping of the General. In Novotná, *et al.* **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Prague, Czech Republic, 2006. p. 393–400.
- RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Perceiving the General. The Multi-Semiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 5, p. 507–530, 2007.
- ROTH, M.-W. Birth of Signs: A (Spinozist-Marxian) Materialist Approach. In N. Presmeg, L. Radford, M.-W. Roth, & G. Kadunz (Eds.), **Signs of Signification**. Springer, Cham, Switzerland, 2018. p. 37-53.
- SOPHIAN, C. **The origins of mathematical knowledge in childhood**. London. New York. Lawrence Erlbaum Associates. 2017.
- VARELA, T. **Antología del materialismo dialéctico e histórico**. Santa Fe de Bogotá. D.C, Colombia. Ediciones Sudamericana S.A. 1971.
- VERGEL, R. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano [Pattern generalization and forms of early algebraic thinking]. **PNA**, v. 9, n. 3, p. 193–215, 2015.

NOTAS

- [1] Esta investigación se inscribe, desarrolla y concluye en el marco del programa académico Doctorado Interinstitucional en Educación con sede en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ubicada en la ciudad de Bogotá en Colombia.

ENLACE ALTERNATIVO

<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/32> (pdf)