Artículo Original

Revista de Investigaciones Universidad del Quindío
ISSN 1794-631X e-ISSN 2500-5782

FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS EN LAS CAPACIDADES COGNITIVAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS1

EPISTEMOLOGICAL FOUNDATIONS IN COGNITIVE COMPETENCES FOR MATHEMATICS LEARNING

Armijo-Mena, Silverio Gerardo; Reyna-Cruz, Winter Edgar

Silverio Gerardo Armijo-Mena sarmijo@ipn.mx
Centro de Investigaciones Económicas, Administrativas y Sociales, Instituto Politécnico Nacional, ciudad de México, México
Winter Edgar Reyna-Cruz
psicologo.winter.reyna@gmail.com
Centro de Investigaciones Económicas, Administrativas y Sociales, Instituto Politécnico Nacional, ciudad de México, México

Revista de Investigaciones Universidad del Quindío
Universidad del Quindío, Colombia
ISSN: 1794-631X
ISSN-e: 2500-5782
Periodicidad: Anual
vol. 34, núm. 2, 2022
riuq@uniquindio.edu.co

Recepción: 04 Julio 2022
Aprobación: 30 Agosto 2022

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/517/5173391030/

Resumen: En Latinoamérica la mayoría de los alumnos de distintos niveles educativos presentan dificultades para aprender matemáticas. Una de las estrategias propuestas ante esta situación es la adecuación del programa Tuning, en el que se delimitan las capacidades para que el estudiante latinoamericano aprenda matemáticas. Derivado del análisis y reflexión de estas competencias, los autores del presente trabajo presentan una expresión matemática, representada como una función, para responder a la pregunta ¿cuánta capacidad de razonamiento es lo mínimo necesario para que el alumno pueda aprender matemáticas? Para ello se presentan los fundamentos teóricos y epistemológicos que dan sustento a dicha expresión. En las conclusiones se señalan los beneficios de la propuesta de este trabajo en el contexto de las dificultades que presentan diversos alumnos para aprender matemáticas.

Palabras clave: Competencia, razonamiento, capacidad cognitiva, aprendizaje, algoritmo.

Abstract: In Latin America, most students of different educational levels have difficulties learning mathematics. One of the strategies proposed in this situation is the adaptation of the Tuning program, in which the capacities of the Latin American student to learn mathematics are delimited. Derived from the analysis and reflection of these competences, the authors of this work presents a mathematical expression, represented as a function, to answer the question, how much reasoning ability is the minimum necessary for the student to learn mathematics? For this, the theoretical and epistemological foundations that give support to this expression are presented. The conclusions indicate the benefits of the proposal of this work in the context of the difficulties that various students present in learning mathematics.

Keywords: Competence, reasoning, cognition, learning, algorithm.

INTRODUCCIÓN

Uno de los dilemas relevantes que enfrenta la educación formalizada en Latinoamérica, en lo que se respecta a los problemas de aprendizaje, son las dificultades que presentan la mayoría de los alumnos de distintos niveles educativos para aprender, comprender y emplear los conocimientos matemáticos siendo el Nivel Medio Superior (NMS) en dónde se pueden apreciar la mayor cantidad de estudiantes que tienen dificultades para instruirse en matemáticas (Bravo, Milicic, Cuadro, Mejía y Eslava, 2009; González, 2018; Kilpatrik, Rico y Gómez, 1998).

Para efectos de referencia y de ilustración de lo anterior, se pueden citar los dos últimos resultados obtenidos en México en las evaluaciones realizadas por el Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés). En dichas evaluaciones, realizadas en 2012 y 2015, los estudiantes mexicanos han obtenido medias de desempeño en la escala global de matemáticas de 413 y 408, ambas puntuaciones muy por debajo del promedio óptimo de desempeño establecido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), organismo regulador de la evaluación PISA. Estos resultados son congruentes con lo reportado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en el 2019 (INEE 2019) y los presentados por el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA 2017) en donde se indica que el 60.5% de los estudiantes alcanzaron el nivel I o insuficiente en 2015 y 59.1% en 2018; mientras que solo el 20.6% en 2015 y el 23% para el 2018, consiguieron los niveles III y IV cuyos aprendizajes se consideran satisfactorios y sobresalientes, respectivamente.

Las cifras anteriores resultan alarmantes si se considera que en México la matrícula de escuelas de NMS atendieron, durante el ciclo escolar 2017-2018, a 5,237,003 alumnos en 17,929 planteles a través de 2,999,460 docentes (INEE, 2019); lo que quiere decir que alrededor de 3,168,387 estudiantes de dicho nivel educativo presentan dificultades para aprender matemáticas. Por supuesto, las datos y cifras varían en cada país latinoamericano; sin embargo, en los resultados reportados en la prueba PISA en 2012 y 2015, se puede apreciar que la gran mayoría de países latinoamericanos están por debajo del promedio óptimo de desempeño en lo que respecta al área de matemáticas.

La situación anterior ha promovido que en Latinoamérica se pongan en marcha diversas estrategias que tienen como fin elevar el desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas, desde la modificación del paradigma o la concepción misma de la enseñanza de las matemáticas, hasta la implementación de programas que se enfocan en la mejora de la enseñanza y con ello el aprendizaje de esta área del conocimiento (González, 2019). Uno de estos programas ha sido la copia, adaptación y adecuación para América Latina del programa Tuning en Europa (González y Wagenaar, 2003), el cual se describe brevemente a continuación.

EL PROYECTO TUNING EN AMÉRICA LATINA

El Proyecto Tuning Higher Educational Structures in Europe (PTHESE), financiado por la Comisión Europea, está enfocado a la mejora de la educación universitaria en ese continente; se pensó, diseñó e implementó en Europa originalmente y fue el producto del esfuerzo coordinado de más de 175 universidades, que desde el año 2001, trabajaron de forma conjunta buscando crear un espacio de educación superior europeo. Lo anterior se ha realizado para dar respuesta al reto planteado por la Declaración de Bolonia (González y Wagenaar, 2003).

El PTHESE, propone un modelo educativo de educación superior para los países miembros, con una dimensión práctica y operativa, centrado en el aprendizaje por competencias, en donde el alumno debe:

- Ser protagonista del proceso, esto es, aprender a aprender,
- Adquirir competencias instrumentales, interpersonales y sistémicas con la intensión de adaptarse a los cambios naturales y propios del desarrollo personal y social,
- Convertir la información en conocimiento técnico y humano para tomar decisiones y resolver de forma más asertiva los problemas que se les presentan.

Como se mencionó, el proyectó Tuning fue copiado y adaptado a las características de los países de América Latina (Beneitone, Esquetini, González, Maletá, Suifi y Wagenaar, 2007); sin embargo, existen diferencias entre lo planteado para Europa y lo planteado y realizado para y por América Latina. Mientras que los europeos han trabajado durante algunas decenas de años buscando concretar su proceso de integración, en este caso la educativa, dentro de un marco político acordado por la Unión Europea (UE); en América Latina no se ha hecho este tipo de trabajo por lo que se necesita robustecer con más solides lo alcanzado hasta este momento ya que los países involucrados no poseen un marco político común a nivel continental ni a nivel regional y por lo mismo no hay reglas claras en acuerdos básicos dentro del encuadre de la educación superior en los niveles mencionados (González, Wagenaar y Beneitone, 2004).

Centrándose en América Latina y en sus universidades, éstas han asumido en la medida de sus posibilidades, las nuevas tendencias de la educación superior. En una de ellas, la que está relacionada con el desarrollo social, las universidades se han obligado a permanecer en constante actualización de sus currícula y planes de estudio, buscando ir a la par con su planta docente, lo anterior también los lleva a la elaboración de planes de estudio flexibles que permitan distintas opciones de aprendizaje a sus estudiantes, facilitando el desarrollo de las competencias y capacidades necesarias y suficientes para su formación profesional. En la propensión a la utilización de las tecnologías de información y comunicación (TIC), se busca que mediante su uso y aplicación de estas se mejore la calidad2 de la educación, buscando constituir estos apoyos tecnológicos en instrumentos y herramientas que faciliten el proceso pedagógico y antropológico del aprendizaje (Vega y De Armas, 2009).

En referencia a la tendencia para encontrar una nueva concepción del perfil profesional del egresado universitario, el proceso de aprendizaje en la actualidad se ha ido conformando de manera multidisciplinaria, en donde el trabajo colaborativo dentro del aula es esencial, eso requiere que la visión y el conocimiento de la realidad por parte del docente y del propio estudiante no deba ser tratado como algo inconexo, dicho en otras palabras, el proceso de aprendizaje de los estudiantes se debe realizar con un enfoque multi, inter y transdisciplinario, todo ello coordinado y dirigido por el docente (Rúa, 2015).

En lo que respecta a la directriz con el proceso de enseñanza aprendizaje, la educación deja de estar centrada en la enseñanza y pasa a la que sustenta el aprendizaje, situación que obliga al docente a abandonar el centro del proceso para que este lugar lo ocupe el estudiante. Finalmente, el proyecto Tuning de América Latina, trabaja con cuatro grandes líneas:

- Competencias
- Enfoques de enseñanza, aprendizaje y evaluación de las competencias.
- Créditos académicos.
- Calidad de los programas (Beneitone, et al., 2007).

Como resalta a primera vista, la educación ahora toma como eje principal al estudiante, condición que lleva a identificar las diferentes y variadas formas que existen para aprender, obligando al docente a elaborar material didáctico en forma diferente y más especializada, en donde un apoyo indiscutible es el uso de las nuevas tecnologías, lo anterior implica una especialización más profunda y amplia del docente. En este trabajo se abordará únicamente la primera línea, la de las competencias. De acuerdo con INEE (2013) define competencia como la capacidad que tiene el estudiante para aplicar lo aprendido, así como sus habilidades en distintos espacios de su vida cotidiana, también hace referencia al razonamiento, análisis y a la comunicación en forma satisfactoria para plantear, resolver e interpretar resultados a los diferentes problemas. En el mismo informe la definición que da para la capacidad matemática es:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas, matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia le ayuda al individuo a reconocer la función que desempeñan las Matemáticas en el mundo, así como emitir juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias en su vida diaria como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (p. 16).

Recapitulando brevemente, Tuning se enfoca en la enseñanza universitaria, sin embargo, el estudiante que arriba al Nivel Superior (NS), se supone que adquirió los conocimientos algebraicos necesarios y suficientes, durante su paso por el Nivel Medio Superior (NMS), para continuar si así lo decide el, con cursos más avanzados de matemáticas. La realidad es muy diferente, al menos en México.

PROYECTO TUNING Y COMPETENCIAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Como se mencionó anteriormente, en el PISA se evalúan las habilidades y los conocimientos adquiridos en lectura, ciencias y matemáticas por estudiantes de NMS, su objetivo primordial es medir algunas competencias que pueden ser tomadas como predictores del éxito futuro, dentro del campo laboral o académico. Es de hacer notar que este programa se ha enfocado principalmente en identificar la capacidad de los estudiantes para usar y aplicar sus conocimientos y habilidades, no en saber hasta qué punto dominan un plan de estudios o cumplieron con una currícula escolar.

Tomando como punto de referencia las nuevas tendencias en la enseñanza3, propuestas para las universidades latinoamericanas, en donde se resalta la importancia que representa la instrucción por competencias, el estudiante debe adquirir o desarrollar un conjunto de capacidades y lograr con esto su aprendizaje. Al respecto se presentan una serie de definiciones que algunos autores han dado con respecto al término en cuestión.

> Personalmente, definiré una competencia como una capacidad de actuar de manera eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos. Para enfrentar una situación de la mejor manera posible [...] las competencias clínicas de un médico van mucho más allá de una memorización segura y de recordar oportunamente las teorías pertinentes (Perrenoud, 1997, p.p. 7 – 9).

Es claro que la competencia tiene una relación directa con el término capacidad, ahora bien, Weinert (1999. p. 7, citado en Moreno, 2009, pp. 72-73) “enlista 9 formas diferentes en las que la competencia ha sido definida o interpretada: capacidad cognitiva general [...]”. Es muy específico y evidente que de nueva cuenta se hace referencia a la relación directa que existe entre los términos competencia y capacidad.

Tomando de nueva cuenta a Moreno (2009, p.73) indica que Perrenoud (2004 p. 11) señala que “el concepto de competencia representa una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a situaciones. [...] pero la noción de competencia es restringida a la capacidad de la persona para ejecutar ciertas tareas”. Aquí de nueva cuenta su señalamiento indica la relación entre los términos citados.

Finalmente, en lo que respecta al término competencia Díaz Barriga (2006, p. 33) dice al respecto:

> ...el empleo del término competencia ha dado origen a un lenguaje muy amplio en el terreno de la educación. Esta diversificación lleva a promover clasificaciones distintas de las competencias y origina una enorme confusión. No existe en el momento, y es necesario reconocerlo, una clasificación completa, racional y funcional que oriente los procesos de diseño curricular y los sistemas de enseñanza.

Por lo anteriormente expresado y tomando una postura conceptual y congruente con el objetivo de este trabajo frente al término discutido, se propone que las competencias se pueden entender como un conjunto de capacidades o habilidades cognitivas y/o procedimentales que le pueden facilitar al individuo desarrollar, de forma más eficiente, la actividad que realice. Sin embargo, sigue existiendo un vacío descriptivo concreto para el termino capacidad. Partiendo de lo anterior y centrándose en el caso específico del aprendizaje de las matemáticas, Tuning América Latina ha propuesto un conjunto de competencias para lograr el aprendizaje propuesto.

A continuación, se muestran los 16 puntos que hacen referencia específica al termino capacidad que los representantes de las 15 universidades latinoamericanas participantes en el proyecto Tuning América Latina propusieron para que el estudiante universitario latino americano aprendiera matemáticas.

1. Capacidad para construir y desarrollar argumentaciones lógicas, con una identificación clara de hipótesis y conclusiones.

2. Capacidad para expresarse correctamente, utilizando el lenguaje de la matemática.
3. Capacidad de abstracción, incluido el desarrollo lógico de teorías matemáticas y las relaciones entre ellas.
4. Capacidad para formular problemas en lenguaje matemático, de forma tal que se faciliten su análisis y solución.
5. Capacidad para iniciar investigaciones matemáticas, bajo la orientación de expertos.
6. Capacidad para formular problemas de optimización, tomar decisiones e interpretar las soluciones en los contextos originales de los problemas.
7. Capacidad para contribuir en la construcción de modelos matemáticos a partir de situaciones reales.
8. Capacidad para utilizar las herramientas computaciones de cálculo numérico y simbólico para plantear y resolver problemas.
9. Capacidad para comprender problemas y abstraer lo esencial de ellos.
10. Capacidad para extraer información cualitativa de datos cuantitativos.
11. Capacidad para trabajar con datos experimentales y contribuir a su análisis.
12. Capacidad para comunicarse con otros profesionistas no matemáticos y brindarles asesoría en la aplicación de las matemáticas en sus respectivas áreas de trabajo.
13. Capacidad para trabajar en equipos interdisciplinarios.
14. Capacidad para presentar los razonamientos matemáticos y sus conclusiones, con claridad y precisión y de forma apropiada para la audiencia a la que van dirigidos, tanto oralmente como por escrito.
15. Capacidad para participar en la elaboración de los programas de formación matemática en los niveles preuniversitarios.
16. Capacidad para detectar inconsistencias (Beneitone, et al, 2007)

Ahora realizando un sencillo ejercicio de reflexión y a manera de ejemplo, se toman las capacidades 1, 3 y 12 para identificar la relación que puedan guardar con el aprendizaje de las matemáticas. Estableciendo que el objetivo general es el aprendizaje de las matemáticas, el objetivo específico de la capacidad 1, establece su intención de construir y desarrollar argumentaciones lógicas, una reflexión inmediata es ¿en qué nivel escolar los estudiantes toman el curso, materia o unidad de aprendizaje de lógica matemática?

Para la capacidad 3 cuyo objetivo específico es lograr que el estudiante logre la abstracción, el desarrollo lógico de teorías matemáticas y las relaciones entre ellas, ¿en cuál etapa de su vida académica se les ha inducido al desarrollo de la abstracción, entendiendo que este término, de acuerdo con Piaget (2007), está relacionado con la imaginación, inteligencia, razonamiento y repetición de procesos y procedimientos tanto operatorios como formales?

Finalmente, la competencia 12 busca que el estudiante se pueda comunicar con diferentes profesionales no matemáticos, así como dar asesoría en la aplicación de las matemáticas, esto induce a plantear la siguiente pregunta, ¿la comunicación efectiva del estudiante con grupos profesionales no matemáticos es garantía de que haya aprendido matemáticas? Esta “comunicación” ¿cómo se relaciona con el aprendizaje o la forma de expresarse por parte del estudiante en cualquiera de sus modalidades?

Dado que el objetivo es que el estudiante aprenda matemáticas, el método de enseñanza que se ha practicado en forma generalizada en todos los niveles escolares ha sido el de privilegiar el aprendizaje memorístico, siendo el proceso usual desde el nivel básico hasta el superior, la repetición de muchos ejercicios a través de la mecanización en sus procesos de solución de ejercicios, al respecto Ruiz (2012) dice

> Pero… por múltiples razones, que rebasan la intención del docente, sólo potenciamos en aprendizaje superficial, de tal manera que el alumno únicamente cumple los requisitos de la tarea, memoriza la información necesaria y suficiente para realizar, sin problemas, las pruebas o exámenes que le aplican y cumple con la tarea como una imposición externa, pero no con la intensión de aprender o deseo de comprenderla (p. 15).

En este trabajo de investigación y de acuerdo con la cita anterior hay un elemento que se considera extremadamente importante y que parece ser, no es abordado normalmente cuando se trata el tema del aprendizaje del álgebra en particular. El elemento al que se hace referencia es la intensión del estudiante para aprender matemáticas. La intensión o intencionalidad que tenga el estudiante para aprender matemáticas será abordada con detalle más adelante cuando se hable de la teoría de la acción razonada.

Con referencia a las capacidades restantes que son requeridas para el aprendizaje en general, surgen otra serie de reflexiones. Primeramente, en las 16 capacidades propuestas, se mezclan al menos dos tipos o clases diferentes; una para la enseñanza y otra para el aprendizaje. Un ejemplo de lo anterior está dado por la capacidad 2, que le compete directamente a quien orienta, guía, induce o facilita el conocimiento y la capacidad 9 que está relacionada directamente con el estudiante. Para el caso específico de la última capacidad mencionada, y esto es un primer indicador que justifica este trabajo de investigación ¿con cuánto de comprensión?, ¿con cuánto de abstracción aprende el estudiante?, ¿cuánto es o puede ser lo mínimo necesario y suficiente para que el discente adquiera esta capacidad?, ¿cómo puede saber, cuantificar o evaluar el docente si lo que ha aprendido el estudiante, es suficiente para el tema de matemáticas que está siendo abordado en su curso actual?

En los siguientes párrafos se explicará y describirá muy brevemente parte del proceso enseñanza aprendizaje, haciendo énfasis en el concepto de razonamiento y posteriormente se retomará de nueva cuenta, el término capacidad para proponer una definición que lo describa de forma más concreta. Como puede apreciarse hasta este momento, en ningún momento se exhibe en las propuestas de los representantes de las universidades participantes en el proyecto, el razonamiento para el aprendizaje de las matemáticas, término que de acuerdo con Dubinsky (1994) señala que es la acción de repetición y reflexión que ejerce un individuo sobre un objeto mental para que esta sea interiorizada y encapsulada mediante un proceso mental (ver figura 1).

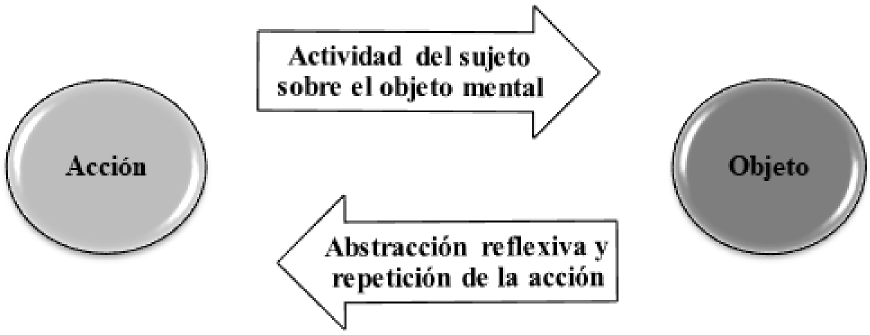

Figura 1
Mecanismo del razonamiento para el aprendizaje de las matemáticas

En la figura 1 se presenta de forma esquemática las acciones generales del razonamiento que el sujeto realiza sobre un objeto mental, en donde se destaca la actividad o acción ejercida por el sujeto sobre el objeto y la abstracción que realiza el sujeto una vez que ha realizado la acción sobre el objeto. “Ello justifica que asumamos el aprendizaje basado en competencias como un proceso centrado en la propia capacidad del estudiante, la estimulación de su responsabilidad y el desarrollo de su autonomía y el enseñar en términos de competencias [...]” (Ruiz 2012, p. 14).

Todo este proceso está relacionado con la acción y la repetición, condición primordial para que el sujeto use su memoria, imaginación, intuición, conocimientos adquiridos con anterioridad para el nuevo aprendizaje y se apropie de este:

> Es por la década de los años setenta que Kahneman et. al. (1982) dentro del campo del razonamiento que se encuentra dentro de la psicología del aprendizaje, parte de los estudios sobre la racionalidad humana. En estas investigaciones se considera que una acción es racional si está de acuerdo con los valores y creencias del individuo, es decir, si es consistente con un conjunto de axiomas (modelos normativos). [...] Estas regularidades, se supone, dan pie al proceso de razonamiento para buscar la formalización del evento por medio de ostentaciones de las operaciones mentales del individuo que conforman el corpus de la matemática y por lo tanto son pertenecientes al universo empírico de lo imaginado (Armijo, 2014, p. 53).

Con base en las reflexiones anteriores se puede llegar a la conclusión que para que el aprendizaje de las matemáticas tenga lugar son necesarias cada una de las capacidades mencionadas anteriormente. De ellas, las que resulta de particular interés para el presente trabajo, es la capacidad de razonamiento, dejando a las restantes para investigaciones posteriores. En este contexto, surge la pregunta de investigación que se plantea a continuación: ¿cuánta capacidad de razonamiento es lo mínimo necesario para que el alumno pueda aprender matemáticas? Para poder responder esta pregunta, al pensar de los autores de esta investigación, es necesario en primer lugar contar con una forma de medir dicha capacidad de razonamiento. Una manera de poder hacerlo es por medio de una expresión matemática, que pueda ser representada como una función, en donde la variable dependiente sea el aprendizaje de las matemáticas, mientras que la variable independiente sea la capacidad de razonamiento. Esto último es, precisamente, el objetivo de este trabajo. Antes de presentar dicha propuesta de expresión matemática, es necesario exponer brevemente los fundamentos epistemológicos y teóricos que le dan sustento. Dicha labor se realiza en el siguiente apartado.

FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS Y TEÓRICOS

Teoría Psicogenética

En el caso del estudiante universitario y tomando como base el modelo de aprendizaje de Piaget e Inhelder (2007), que tiene como fundamento su propuesta psicogenética, el sujeto adulto, esto es el estudiante universitario, ya ha conformado sus estructuras mentales, las operatorias concretas y las operatorias formales en el mejor de los casos, sin embargo, esto sigue sin ser garantía de que el cognoscente aprenda las matemáticas. El modelo que aquí se toma está basado en la propuesta psicogenética de Piaget e Inhelder (2007), véase Figura 2.

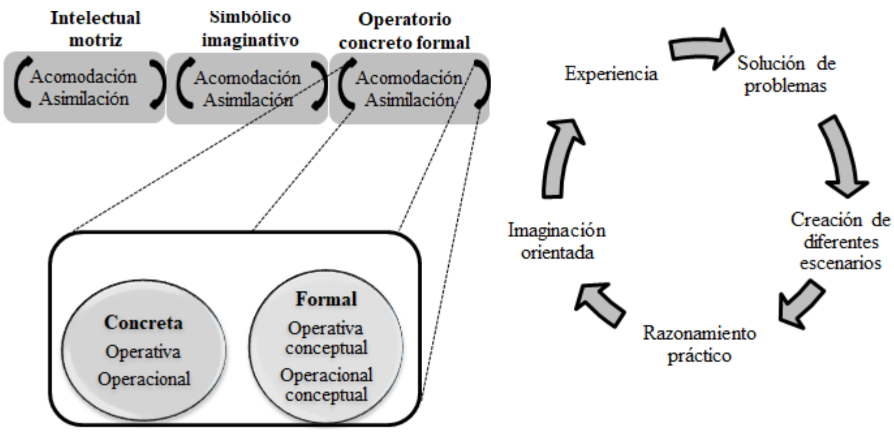

Figura 2

Modelo de aprendizaje basado en la propuesta psicogenética de Piaget Tomado de Armijo 2014

En la Figura 2 se muestra de forma esquemática, las estructuras cognitivas que, de acuerdo con la teoría psicogenética, ya han sido desarrolladas en el adulto y cómo en función de su experiencia, enfrenta problemas creando escenarios diversos; también se indica que mediante su experiencia puede dirigir su imaginación y aplicando un razonamiento práctico, busca diversas alternativas de solución para cada problema, al respecto dice Piaget e Inhelder (2007)

> En el adulto la repetición de las acciones conduce a una reducción progresiva del error sistemático, que puede llegar a la anulación completa: ese efecto de ejercicio o de exploración acumulativa es tanto más interesante en cuanto que el sujeto ignora todo acerca de sus resultados, lo que excluye la intervención de refuerzos externos y nos lleva a interpretar esa forma de aprendizaje como debida a una equilibración progresiva ("acoplamientos" más completos cada vez), (p. p. 49-50).

Del párrafo anterior se puede leer y entender que hay al menos un elemento y una condición fundamental en el aprendizaje, la imitación, que se interpreta como la repetición intencionada de un proceso observado. Lo anterior implica en primer lugar que el aprendiz o estudiante conozca en principio, al menos una forma, un proceso, un estilo o un mecanismo de cómo hacer algo, el dominio de las reglas de operación específicas para ese procedimiento, el dominio de las propiedades de los objetos, en este caso matemáticos, con los que esté trabajando para que posteriormente lo aprenda y razone porqué lo está haciendo de esa manera a través de la repetición del procedimiento indicado durante el número de veces que sea pertinente (ejercicios) y logre identificar porque se hace de la forma indicada y el siguiente paso que debiera ejecutar el estudiante sería identificar, proponer, sugerir o "ver" de que otra manera pudiera ser resuelto.

Ahora adentrándose directamente en el terreno de la enseñanza-aprendizaje, la forma en que los docentes han enseñado las matemáticas tradicionalmente, ha sido dando una explicación del tema en turno usando el pizarrón o el proyector, en el mejor de los casos, y mediante la resolución de un conjunto de ejercicios del mismo tipo, en donde sólo se practica la mecanización de la operación u operaciones, que de acuerdo con Piaget (2007), la simple mecanización forma parte del pensamiento operatorio concreto, no del formal. En lo que respecta al estudiante, este se concreta a copiar lo que el docente ha ido escribiendo en el pizarrón como ejemplo, para buscar replicarlo en casa con los ejercicios que le son asignados como tarea, recurriendo y "consultando" en internet los procedimientos y solución de ejercicios parecidos a los visto en clase para reproducir y verificar lo mostrado por el profesor, haciendo caso omiso a la interpretación de resultados y mucho menos a identificar la aplicación de las propiedades de las operaciones, el respeto a la jerarquía de las mismas o el análisis del resultado obtenido. Al respecto Ruiz (2012) dice que "En los paradigmas precedentes para la enseñanza, los resultados de aprendizaje esperados por parte de los alumnos han estado centrados en la memorización de lo informado o en la restitución de los procedimientos aprendidos para enfrentar situaciones predecibles" (p.14).

Lo anterior refuerza el hecho de que se ha primado la memorización del proceso y procedimiento para la solución de ejercicios matemáticos, dejando de lado el análisis de resultados como parte del razonamiento y la identificación de las propiedades de las operaciones, entre otras cosas, para su correcta aplicación. Por otra parte, al interior de la academia y de los cuerpos colegiados de las instituciones educativas, se sigue presentando la disyuntiva; que los alumnos abarquen la mayor cantidad de conocimientos posibles, en aras de cubrir una currícula o temario previamente diseñado, o que aprendan sólo lo que necesitan en la vida cotidiana o en la industria, de acuerdo al grado escolar en el que se encuentren, con el objetivo de que adquieran la competencia, capacidad o habilidad necesaria y suficiente para poner en práctica lo aprendido y ser rentables en el sector productivo para la cual estén prestando o vayan a prestar sus servicios.

CAPACIDAD DE RAZONAMIENTO

Descrito lo anterior se retoma el término capacidad para continuar con una descripción de su interpretación desde el punto de vista de la física, y posteriormente hacer una analogía con el termino capacidad de razonamiento que es la que se va a buscar medir o cuantificar.

La medición forma parte de toda investigación explicativa por alcance y es parte medular de todo proceso de indagación de las ciencias exactas o formales. No se debe perder de vista que toda medición conlleva un cierto error. El realizar una medición implica "la asignación de valores numéricos a objetos o eventos, de acuerdo con ciertas reglas" (Kerlinger, 2002, p. 565). A continuación, se presentan ejemplos de medición de diferentes tipos de capacidades, desde el punto de vista físico.

La capacidad eléctrica de un conductor aislado está definida por la razón de su carga a su potencial y su algoritmo viene dado por la siguiente expresión matemática:

$$C = \frac{Q}{V}$$

(1)

$$C = Capacidad\ eléctrica.$$

$$Q = Carga\ eléctrica.$$

$$V = Potencial.$$

La igualdad 1 se interpreta como la cantidad de carga eléctrica que debe ser distribuida uniformemente en otra cantidad que representa a un potencial dado.

Para medir la capacidad calorífica de un recipiente, dadas determinadas condiciones, se requiere comparar el calor que absorbe el material del que está hecho, con el incremento de temperatura resultante, de esta forma, la capacidad calorífica está dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

(2)

$$C = Capacidad\ calorífica.$$

$$Q = Cantidad\ de\ calor.$$

$$T = Temperatura.$$

$$\Delta T \to 0 = Incremento\ o\ aumento\ de\ la$$

$$temperatura, cuando\ esta\ tiende\ a\ cero.$$

La expresión 2 indica un límite dado por la cantidad que representa un incremento en la temperatura en la que se va a distribuir uniforme y equitativamente la cantidad de calor. Se podrían seguir presentando diferentes ejemplos en donde se usa el término capacidad y su respectiva representación matemática y en todos ellos se hará referencia a un almacenamiento o acumulación en un espacio físico de algo representado por una cantidad numérica sin embargo, cuando se habla de aprendizaje4 en donde se involucra el término conocimiento y esto busca ser vinculado con el ser humano, se debe tener en cuenta que el individuo no sólo es algo físico y por lo tanto medible o cuantificable, también está el elemento psicológico que de manera conjunta y relacionada con lo físico dan forma integral al sujeto.

El tocar el vocablo conocimiento nos remite a citar al menos a dos grandes pensadores y filósofos. Kant (2003, p. 171) dice "No se puede dudar que todos nuestros conocimientos comienzan con la experiencia [...] Pero si es verdad que todos nuestros conocimientos comienzan con la experiencia, todos, sin embargo, no proceden de ella".

La cita nos dice muy claramente que el conocimiento es adquirido en ocasiones en base a la experiencia cotidiana, sin embargo, no todo el conocimiento se adquiere de esta forma, un ejemplo claro lo dan las matemáticas.

Por otra parte, Rusell (1992, p. 169) de igual forma, hace referencia al conocimiento de la siguiente manera

> [...] el conocimiento es una cuestión de grado. El grado más alto se encuentra en hechos de percepción y en el poder de convicción de argumentos muy simples. El grado siguiente se halla en los recuerdos vividos. Cuando una serie de creencias son, cada una, separadamente, creíbles en algún grado, son más creíbles aún si se descubre que forman un todo lógico coherente.

También hace referencia a la experiencia, pero ahora toca otro elemento que es el de la estructuración lógica coherente, condición que nos llevan a mencionar algunos otros términos que fueron propuestos por René Descartes. Para Descartes (1984), el individuo está formado por dos substancias o entidades, una física y la otra inmaterial, la primera está representada por un cuerpo y la segunda por el alma, este último término actualmente está denominado por la psicología como la mente, siendo aquí en donde todo parece indicar se produce el aprendizaje. Está concepción da lugar al dualismo cartesiano y es esta concepción de la separación entre mente y cuerpo, separación entre el sujeto y el objeto, que se han transformado en pilares básicos del enfoque científico.

En el párrafo anterior se resalta la visión de que el cuerpo era uno y la mente no formaba parte de este. Ahora bien, dentro del cuerpo se encontraba el alma y por supuesto eran dos cosas diferentes e independientes la una de la otra, sin embargo, siendo el aprendizaje una función mental y ésta producto de la actividad cerebral, en donde el cerebro forma parte física del ser humano, se asume que se pueden relacionar de forma empírica en este artículo, esto es, la vinculación y correspondencia que existe entre cuerpo y axioma mente.

Se considera relevante recordar que de acuerdo con Piaget (1977), la semejanza que hay entre la problematización existente en las proposiciones tanto operatorias como abstractas puede considerarse como la axiomatización de las estructuras del pensamiento.

Lo anteriormente expuesto plantea un nuevo paradigma, entendiendo a éste como; un conjunto de suposiciones o perspectivas del mundo que rodean al sujeto. En este contexto, el investigador puede decidir qué método de investigación considera el más adecuado y de esta manera, presentar ante la comunidad científica, sus concepciones referentes al estudio que esté llevando a cabo, así como sus fundamentos epistemológicos de los que parte (Sulbarán 2009), en otras palabras, "representa una visión del mundo que define para quien lo suscribe, la naturaleza del mundo, el lugar del individuo en él y la extensión de las posibles relaciones con ese mundo y sus partes, como ocurre con las epistemologías y las teologías" (Guba y Lincoln, 2002 p. 119) tomado de Sulbarán (2009, p. 5). Es con este planteamiento con el que se desarrolla esta propuesta.

Recordando que capacidad también es sinónimo de acumulación o de potenciación, lo que también ya es cuantificable, le agregamos el sustantivo conocimientos, y ahora conjuntando los términos anteriores, se propone este constructo para entender o interpretar a este tipo de capacidad cognitiva, como el cúmulo o cantidad de aptitudes y recursos operativos y conceptuales con los que cuenta un individuo para llevar a cabo una determinada tarea.

Bajo este entendido, este constructo puede vincularse con la educación, convirtiendo a ésta, en un proceso en donde se han de ir agregando, esto es sumando y por lo tanto contando, herramientas y/o instrumentos cognitivos para que dicho individuo interactúe de una forma cada vez más eficiente y eficaz (términos que también son cuantificables) con sus entornos, tanto académicos como laborales en el que se encuentra.

Siendo el razonamiento un punto nodal de este trabajo, es necesario aclarar cómo va a ser entendido esta locución. Dado un conjunto de premisas o proposiciones iniciales, que se asumen como verdaderas, al ser relacionadas y reacomodadas entre sí, dan un resultado final que será denominado conclusión y de esta conclusión se obtiene un nuevo conocimiento que es superior o mayor al expresado en las premisas iniciales. Es a esta acción (proceso) de vincular a las premisas y obtener una conclusión mediante reglas claras y específicas utilizando métodos concretos y procedimientos ordenados en la estructuración del pensamiento y ejecución de las operaciones mentales que se le identifica como razonamiento. Son estos razonamientos también conocidos como argumentos los que permiten ir avanzando en el conocimiento de la realidad que rodea al cognoscente (Sanabria,1995).

Los elementos que en su conjunto se requieren para la ejecución y aplicación del razonamiento, en este caso el matemático, son un conjunto de acciones y procedimientos ordenados y sistematizados. Esas acciones son la plena identificación del problema, el dominio de la lectura esto es, lectura de comprensión, esto permite al estudiante sintetizar, la identificación e interpretación adecuada de símbolos matemáticos, conocimiento de las propiedades y reglas de operación, el procedimiento y desarrollo algorítmico de las operaciones matemáticas. Estos conocimientos deben ser reforzados por medio de un conjunto de ejercicios con diferente grado de dificultad, en otras palabras, se recomienda repetir las veces que sea necesario el mismo tipo de ejercicios y el procedimiento esto es ejecutar la acción repetida sobre el objeto mental que se esté buscando aprender y por supuesto la ejecución de la abstracción reflexiva la cual se vincula con la acción que ejerce el sujeto sobre el objeto de estudio, lo anterior permite vincular premisas, analizar y obtener una conclusión (ver figura 3).

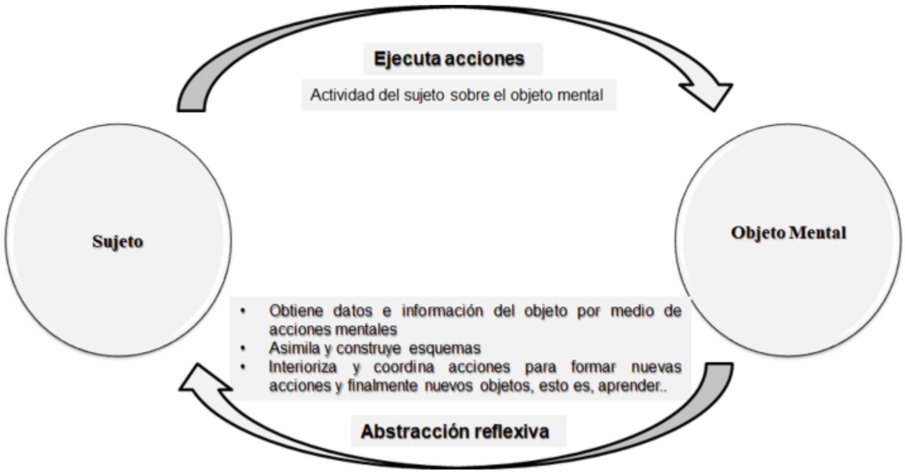

Figura 3
Acciones en el razonamiento elaboración propia con base en Armijo 2004

En la figura 3 se muestra de forma esquemática que mediante el número de acciones que ejecuta el sujeto sobre el objeto mental, esto es el objeto matemático que se esté aprendiendo, está relacionado con el razonamiento. El número de repeticiones que tendrá que realizar el sujeto hasta lograr el aprendizaje buscado es propio de cada estudiante, siempre y cuando quiera y tenga la voluntad de hacerlo. No es la prioridad ni el objetivo de este trabajo profundizar en los diferentes tipos de razonamiento, sin embargo, se considera importante mencionar que el razonamiento deductivo sea posiblemente el más utilizado en las matemáticas. En el siguiente apartado se abordará el tema relacionado con la conducta del sujeto cognoscente.

TEORÍA DE LA ACCIÓN RAZONADA

Se buscará diseñar y presentar una expresión matemática que permita arrojar luz a la pregunta de investigación planteada y mediante esas capacidades que deben adquirir los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas en principio. Se anticipa también en este momento que hay otro elemento subyacente dentro del aprendizaje vinculado directamente con el cognoscente y es en términos muy generales, que tenga la actitud o voluntad de querer aprender.

Puesto que ya se han desarrollado y aplicado instrumentos de medición para las actitudes (Fishbein y Ajzen, 1975; Ajzen y Fishbein, 1980) se asume como premisa verdadera que ya existen esos cálculos y por lo tanto pueden ser tomados en cuenta para el propósito de este trabajo, esto es, asignarles un valor numérico mediante un conjunto de reglas y procedimientos previamente establecidas.

Como se ha podido observar a través del tiempo, en México los resultados mostrados por los estudiantes en cuanto al aprendizaje de las matemáticas siguen siendo no deseados y retomando el término intensión, que es tomado como el resultado de una determinada conducta, en este caso del estudiante de matemáticas, la teoría de la Acción Razonada de Ajzen y Fishbein (1975) dice que, es posible anticipar la conducta del sujeto a través de sus creencias, entendiendo a estas como un conjunto de sentimientos, no importando si son positivos o negativos, los que ya han sido desarrollados y estructurados por el sujeto acerca de alguna acción, asunto o tema.

Los autores mencionados, por medio de su teoría, han identificado tres componentes que en su conjunto dan una explicación de la conducta del sujeto. De aquí que la intención, esto es, la actitud hacia la conducta y las normas subjetivas responden a las creencias formadas por el sujeto.

Para Ajzen y Fishbein (1975) existen tres tipos de creencias.

- Creencias descriptivas.
- Creencias inferenciales.
- Creencias informativas.

Las primeras se obtienen de la observación que realiza el sujeto del objeto en forma directa, las segundas son adquiridas mediante la experiencia del sujeto y las terceras son producto de la información que el sujeto adquiere de otros objetos. Estas creencias constituyen la probabilidad subjetiva de relación entre el objeto de la creencia y el atributo que el sujeto le confiere al objeto.

Ahora bien, como ya se dijo en párrafos anteriores, siendo el razonamiento una actividad mental, al igual que el aprendizaje, estas dos van a ser desarrolladas en función directa de la voluntad que tenga el sujeto para realizarlas, esto es, que quiera hacerlo. A esta disposición o intencionalidad del sujeto para llevar a cabo esta actividad mental se propone que sea representada por la variable llamada

$$Int$$

La variable Int contempla el elemento cualitativo del sujeto como puede ser: actitud, voluntad, conducta, intención para realizar la actividad de aprendizaje. A esta variable, aunque cualitativa, se le puede asignar un valor en función de mediciones específicas de las actitudes.

El término actitud que se encuentra vinculado con la conducta humana, dentro de las ciencias sociales y del pensamiento, sigue representando una gran dificultad y hasta un gran problema, la medición cualitativa de los elementos que la componen. Es en este terreno que los investigadores en psicología han desarrollado un conjunto de instrumentos que permiten identificar las escalas en las actitudes del sujeto (Sulbarán, 2009).

"Las escalas de actitudes son instrumentos de medición que nos permite acercarnos a la variabilidad evaluativa de las personas en relación con cualquier objeto" (Sulbarán, 2009, p. 6). Por otra parte, Kerlinger y Lee (2002) dicen que: el término escala es usado cuando se busca hacer referencia a un instrumento de medida específico que anteriormente y con frecuencia ha sido empleado y aplicado periódicamente, en el campo de las ciencias sociales.

Como ejemplo de lo anterior se expondrá de forma esquemática, ver la Figura 4, la teoría mencionada que "fue presentada en 1967, posteriormente ha sido refinada, desarrollada y probada por estos mismos autores (Fishbein y Ajzen, 1975; Ajzen y Fishbein 1980). Es una teoría general de la conducta humana que trata de la relación entre creencias, actitudes, intenciones y comportamiento, los cuales se encuentran relacionados con la toma de decisiones a nivel conductual" (Reyes, 2007, p. 69).

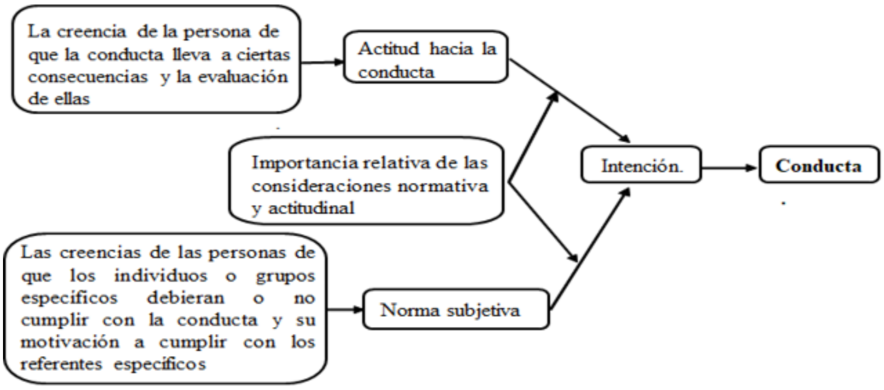

Figura 4

Teoría de la acción razonada tomado de Reyes 2007 p 71

Figura 4. Teoría de la acción razonada (tomado de Reyes, 2007, p. 71)

La figura 4 representa de forma esquemática cómo a través de una serie de creencias, algunas personales y otras tomadas o impuestas por grupos o individuos influyen de forma consciente o inconsciente, formando con ello y dando origen a la conducta del sujeto, detrás de las creencias del propio individuo. De acuerdo con Fishbein y Ajzen (1975), la siguiente expresión matemática representa la relación que existe entre las creencias y las actitudes. ç

$$Int = \sum_{i=1}^{n} \quad b_i e_i$$

(3)

$$Int = Es\ la\ actitud\ de\ una\ persona\ hacia$$

$$la\ realización\ de\ una\ conducta.$$

$$b = La\ creencia\ de\ que\ al\ ejecutar\ la$$

$$conducta\ B, ésta\ le\ llevará\ a\ un\ resultado$$

$$dado\ i.$$

$$e = Es\ el\ aspecto\ evaluativo\ de\ la\ creencia.$$

$$n = Número\ de\ creencias\ que\ una\ persona$$

$$tiene\ acerca\ de\ la\ ejecución\ de\ la\ conducta\ B.$$

El término creencia, es utilizado en el sentido que dan las personas a la anticipación de algún resultado en una acción por realizar, igualmente es usado como un supuesto, en función de la experiencia o de lo que escuchan de otros sujetos acerca de acciones similares, también se usa como sinónimo de una opinión con la que se asume y anticipa un posible resultado, se hace énfasis en este término ya que de acuerdo con Armijo (2014): "En las matemáticas, las creencias o dogmas no tienen lugar, hay axiomas y a partir de éstos, mediante el método lógico deductivo por excelencia y con razonamientos, se arriba a resultados importantes dando lugar a la construcción de la teoría" (p. 27).

Es importante hacer notar que la expresión matemática (3), es sólo una de varias, que en su conjunto representan la Intención del individuo para realizar o no alguna actividad. Sin embargo, aunque el valor numérico resultante que va a expresar esta intención sigue teniendo una gran carga subjetiva, dadas las relaciones entre sus elementos, se propone tomar este valor como un número imaginario.

> En el conjunto de los números reales, los números negativos no tienen cuadrados [...] Los números imaginarios se crearon para que los números negativos tuvieran raíces cuadradas [...] Estos números se concibieron por medio de una unidad imaginaria llamada

$$i$$

, con la convención de que

$$1^2 = -1 \; o \; i = \sqrt{-1}$$

, (Smith, A., S. 1998, p. 344).

La cita anterior tiene su fundamento en que la matemática actual con sus avances tanto teóricos como prácticos y aplicados sigue teniendo limitaciones pronunciadas en cuanto a la formalización y medición de las propiedades o características del ser humano. Lo anterior se sustenta en lo que dice (Martínez, 2008, p. 75) "El punto crucial y limitante de nuestra matemática tradicional, por ejemplo, se debe a su carácter abstracto, a su incapacidad de captar la entidad relacional".

Ahora bien, si el sujeto tiene la intensión de aprender y acumula una serie de conocimientos, esto es, los aprende, entonces podemos representar matemáticamente este proceso como la suma de una parte real y una imaginaria dando con ello a la creación de un número complejo, condición también que permite contemplar cualquier cantidad que pueda estar contenida dentro de los números reales. Un número complejo está compuesto por una parte real y una imaginaria. Los números complejos, en el ámbito de las matemáticas, se representan con la letra z y su estructura es:

$$z = a + ib$$

(4)

Los números complejos son una extensión de los Números Reales, cumpliéndose que los Números Complejos, representan a todas las raíces de los polinomios, cuestión que tomando solamente a los Reales no es posible.

En el siguiente apartado se plantea en forma de algoritmo matemático la propuesta concreta para medir el razonamiento, tomando en cuenta todo lo anteriormente expuesto en donde contempla en primera instancia la parte real para posteriormente incluir a la parte imaginaria el número complejo propuesto.

Expresión matemática del aprendizaje de las matemáticas

Una vez expresado todo lo anterior, se está en condiciones de plantear una expresión matemática que tenga la posibilidad de medir la cantidad de razonamiento que debe adquirir un estudiante para un aprendizaje específico como un primer intento de cuantificar esa capacidad para que posteriormente pueda resolver un determinado tipo de problemas matemáticos y de esta forma el docente pueda evaluarlo.

$$C_R = \left[\frac{Co}{(\sum_{j=1}^{z} Pt_j)} Ne\right] - [\sum_{k=1}^{4} mt_k - mt_5 + \sum_{l=1}^{3} dcp_l + \sum_{m=1}^{2} me_m + \sum_{n=1}^{2} dsc_n]$$

(5)

$$C_o = \sum_{i=1}^{x} c_i ; i = 1, \ldots, x$$

(6)

C_R = *Capacidad de razonamiento*
Ne = *Número de ejercicios realizados para el mismo tipo de conocimiento*
Pt = *Problemas tipo (problemas específicos del tema que se esté tratando)*
$j = 1$, *Es el ejercicio más sencillo de un determinado tipo*
$z =$ *Es el ejercicio de mayor grado de dificultad del mismo tipo*
mt = *Formas de estudio*
$k\ (1, 2, 3, 4)$ = *Son las formas que tiene el estudiante para buscar aprender*
mt_5 = *Tiene un método de estudio y lo aplica*
dcp = *Deficiencias en conocimientos y procedimientos*
$l = 1, 2, 3, \ldots, n$ *(Conocimientos y procedimientos)*
me = *Usos de la memoria para recordar y / o reconstruir procedimientos*
$m = 1, 2$; 1 = *memoria temprana*, 2 = *memoria tardía*
dsc = *Disciplina para estudiar y practicar en casa*
$n = 1 \Rightarrow$ *NO Estudia por voluntad*, $n = 2 \Rightarrow$ *NO Realiza más ejercicios por voluntad*
Co = *Cantidad de Conocimientos específicos*
c_i = *Conjunto de conocimientos necesarios y suficientes para el razonamiento de problemas de un tipo específico o determinado* Pt.
$i = 1$, *Es el conocimiento elemental que debe tener el estudiante de un mismo tipo*
$x =$ *Es el conocimiento más avanzado o superior del mismo tipo*

Es el profesor quien determina qué tipo de conocimiento será el elemental y el más avanzado, así como el problema más sencillo de resolver y el más avanzado, para un determinado tema de estudio y aprendizaje.

Retomando la expresión 4, la

$$a$$

corresponde a la parte real de la igualdad, esto es, la cantidad de conocimientos que requiere tener para un tema específico o matemáticas tipo. El término

$$ib$$

corresponde a la parte imaginaria. Sustituyendo y aplicando esto, queda:

$$A_m = \frac{C_R}{Mt} + iInt$$

(7)

$$A_m = \frac{C_R}{PtMt} + iInt$$

(8)

$$A_m = Aprendizaje\ de\ matemáticas$$

$$Mt = Matemáticas\ tipo$$

La variable

$$Int$$

es interpretada como la parte imaginaria y de esta forma se tendría el número complejo propuesto dando como como resultado la expresión 7.

A la expresión (7) se le ha sumado el elemento al que se hizo referencia en párrafos anteriores y que generalmente no es tomado en cuenta y sobre del cual gira este apartado, la intensión que guarda el estudiante con respecto al deseo, voluntad, obligación, compromiso directo o impuesto y otros más, que influyen en su aprendizaje.

El término

$$Mt$$

(matemáticas tipo), se refiere a temas específicos de las matemáticas como pueden ser suma, resta, multiplicación y división algebraicas, multiplicación de polinomios, sistemas de ecuaciones, factorización, límites, derivadas, ecuaciones diferenciales, cálculo integral, trigonometría, geometría analítica entre otros muchos.

La ecuación (7) permite medir la cantidad de aprendizaje de matemáticas en función de la relación que existe entre la capacidad de razonamiento y las matemáticas tipo que requiere un estudiante para resolver sólo un determinado tipo de problemas matemáticos.

Por lo anterior en la expresión (8) se complementa la (7) quedando finalmente que el aprendizaje de las matemáticas es la relación existente entre la capacidad de razonamiento y el producto de los problemas tipo por el tipo de matemáticas requeridos para obtener el aprendizaje buscado más la intensión que tenga el estudiante de aprenderlas.

Mientras que la capacidad para solucionar problemas tipo, estará dada por la siguiente expresión

$$Sop_t = \frac{A_m}{P_t}$$

(9)

$$Sop_t = Capacidad\ para\ soluciónar$$

$$problemas\ tipo\ t$$

$$P_t = Problemas\ tipo$$

Un ejemplo de esto último puede ser contemplado en lo siguiente: Se requiere de ciertos conocimientos para realizar una suma o resta algebraica como la mostrada a continuación.

$$-3a + 5a =$$

(10)

Los conocimientos requeridos para resolver la siguiente ecuación contemplan los adquiridos con anterioridad sumados los que estén viendo actualmente para el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita en donde se debe encontrar el valor de la variable.

Ejemplo.

Dada la siguiente ecuación de primer grado, despeje a la variable y encuentre su valor

$$\frac{2}{3}a + \frac{1}{8}b - 2 = \left(\frac{1}{4}b\right)\frac{1}{2}$$

(11)

Al igual que en los ejercicios anteriores el razonamiento, procedimientos, reglas de operación y de nueva cuenta la intencionalidad que se requiere para encontrar la solución a los ejercicios anteriores se presenta al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 7z &= 24 \\ 4x + 2y - 3z &= 4 \\ 6x + 6y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

(12)

Ahora bien, para encontrar la solución al siguiente ejercicio, el razonamiento y conocimientos requeridos son diferentes a los utilizados en los ejercicios anteriores, lo que sigue permaneciendo es la intencionalidad de hacerlo:

Ejemplo.

Verifique que el resultado propuesto sea el correcto para la siguiente integral.

$$\int_0^a \quad (b^2y - y^3)dy = \frac{b^4}{4}$$

(13)

Sin embargo, todas las expresiones matemáticas anteriores requieren que el estudiante tenga un dominio del álgebra, de las propiedades de las operaciones, leyes de los signos, nociones, conceptos específicos para operaciones y procedimientos entre otros.

Es innegable que el binomio de enseñanza-aprendizaje tiene su línea orientadora y conductora en el docente e incide en el discente, entendiendo a este último como aquel estudiante que aprende, es crítico, investigador, creativo, genera su propio conocimiento, busca información, trabaja con método y contempla objetivos, lo anterior va a estar guiado por el docente, entendiendo a éste como facilitador de los elementos y recursos necesarios y suficientes que requiera el estudiante en su proceso de aprendizaje.

COMENTARIOS FINALES

Este trabajo de investigación es producto de la observación durante muchos años, de lo complicado que es aprender matemáticas, dentro del terreno de la docencia en los diferentes niveles de educación y también porque no decirlo a título personal como estudiante.

Es una propuesta novedosa y atrevida que busca construir una herramienta de apoyo, tanto al docente como al estudiante, que les permita ir midiendo su grado de aprendizaje de las matemáticas. En esta propuesta, por el momento es solamente teórica y se vinculan dos elementos que en su conjunto definen al individuo, la parte física o cuantitativa y la parte cualitativa como son las actitudes y conductas relacionadas directamente con el elemento psicológico, todo esto por medio de un algoritmo matemático.

Ha sido a través de estos años dentro del ejercicio de la docencia y por supuesto de lo aprendido no solo de la práctica profesional sino también dentro del aula como estudiante de posgrado, en donde se ha buscado vincular distintas disciplinas del conocimiento para proponer un modelo sencillo que permita arrojar luz, tanto para el docente como para el estudiante, de su avance en el aprendizaje de las matemáticas y no se confunda con que el aprendizaje o dominio de un procedimiento para la solución de un tipo de ejercicios es sinónimo o garantía de haber aprendido el tema de matemáticas que se esté estudiando en ese momento.

Con referencia a la propuesta del algoritmo para medir la cantidad de razonamiento que se requiere para garantizar que el aprendizaje de un determinado tema ha sido suficiente, es una propuesta teórica, que en este momento va empezar a ser aplicada en diferentes niveles de educación (nivel básico o de secundaria, nivel medio, o bachillerato y nivel superior o de universidad) puede ser contemplada como un indicador, posiblemente como un vector o como se le deba de llamar, por el momento no se considera importante el nombre o categoría que se le pudiera asignar, lo que se busca alcanzar es tener la posibilidad de cuantificar el razonamiento que el estudiante va adquiriendo con referencia al tema o unidad de aprendizaje que el estudiante va logrando.

Esta propuesta busca pueda ser aplicada en tres diferentes grupos piloto, en el nivel básico, en una secundaria particular de la Ciudad de México Benito Juárez perteneciente al Centro Escolar Elodia Ramos, en el nivel medio superior en un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional (CECyT) y una escuela preparatoria del Estado de México ubicada en el Municipio de Cuijingo Estado de México, Preparatoria oficial N0. 254.

Este proyecto de investigación autorizado y avalado por el Instituto Politécnico Nacional a través de la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) con No. 2020034, no pudo seguir siendo desarrollado de acuerdo con lo planeado debido a los cambios impuestos y obligados por las circunstancias y por las autoridades educativas y de salud, cambios que impactaron y modificaron los procedimientos y procesos a todos los ámbitos e instancias no solo en México sino en todo el mundo.

Actualmente esta investigación se encuentra en su fase de implementación y adecuación para su aplicación en grupos escolares de nivel básico (primaria, secundaria) y nivel medio superior (bachillerato).

REFERENCIAS

Ajzen, I. & Fisbein, M. (1980). Understanding attitudes abd predicting social behavior. USA, Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice Hall

Armijo, S., G. (2014). Aprendizaje de la Estadística en adultos mayores. (Tesis inédita de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV-IPN. México

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M., M., Siufi, G. & Wagenaar, R. (2007). Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina, Informe Final – Proyecto Tuning América Latina 2004 – 2007. España: Bilbao.

Bravo, L., Milicic, N., Cuadro, A., Mejía, L. & Eslava, J. (2009). Trastornos del aprendizaje: investigaciones psicológicas y psicopedagógicas en diversos países de sud américa. Ciencias Psicológicas, 3(2), 203-218.

Descartes, R. (1984). Discurso del método. Madrid, España: SARPE.

Díaz-Barriga, Frida (2006). Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida. México: McCraw-Hill.

Diccionario Real Academia Española (2019). https://dle.rae.es/?id=Ds2L5b7 06-06-19 12:30 Hrs.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In A. Schoenfel (Ed.), Advanced mathematical thinking and problem solving (pp.221-247). Hillsdale, NJ: Earlbaum.

Fishbein, M. & Ajzen, I. (1975). Belief, attitude, intention and behavior.Reading, M. A. Addison-Wesley.

González, F. E. (2018). Historia de la Educación Matemática en Latinoamérica: 10 claves para su comprensión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 52, 279-305.

González, J. & Wagenaar, R. (2003). Tuning Educational Structures in Europe. Bilbao: Sócrates.

González, J. Wagenaar, J. & Beneitone, P. (2004). Tuning-américa latina: un proyecto de las universidades. Revista Iberoamericana de Educación, 35, 151-164

Guba, E. & Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. En C. Denman y J. Haro (comps.), Por los rincones; antología de métodos cualitativos en la investigación social (113 – 148). México: El colegio de Sonora, Hermosillo. https://www.uncg.edu/hdf/facultystaff/Tudge/Guba%20&%20Lincoln%201994.pdf

Kant, I. (2003). Critica de la razón pura. Argentina, Buenos Aires. Losada

Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. New York: Cambridge University Press.

Kerlinger, F. & Lee, H. (2002). Investigación del comportamiento: Métodos de investigación en ciencias sociales (4ª edición). México: Mc GrawHill/ Interamericana.

Kilpatrick, J., Rico, L. & Gómez, P. (1998). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Martínez, M., M. (2008). Epistemología y metodología cuantitativa en las ciencias sociales. México: Trillas.

INEE (2013). México en PISA 2012. 1ª edición, México: INEE.

INEE (2016). México en PISA 2016. México, INEE.

INEE (2018). Planea Resultados Nacionales 2017. Educación Media Superior. México

INEE (2019). Panorama Educativo de México 2018. Indicadores del Sistema Educativo Nacional Educación básica y media superior. México

Moreno, O., T. (2009). Competencias en educación superior: un alto en el camino para revisar la ruta del viaje. Perfiles Educativos Vol. XXXI, Número 124,2009, ISSUE-UNAM.

Perrenoud, P. (1997). Construir competencias desde la escuela. Comunicaciones y ediciones Noroeste Ltda. Santiago de Chile, Chile.

Piaget, J (1977). El desarrollo del pensamiento: Equilibrio de estructuras cognitivas. (Trans A. Rosin). Vikingo.

Piaget, J. (1979). Tratado de lógica y conocimiento científico; Volumen III Epistemología de la matemática. Paidos, Buenos Aires, Argentina.

Piaget, J. & Inhelder., B. (2007). Psicología del Niño. Madrid, España: Ediciones Morata.

Planea (2017). Informe de resultados Planea 2017 El aprendizaje de los alumnos de tercero de secundaria en México. México. INEE

Reyes, R., L. (2007). La teoría de la acción razonada: Implicaciones para el estudio de las actitudes. Investigación Educativa, 7, 66-77. http://www.alfaguia.org/alfaguia/files/1320437914_40.pdf); 31-mar-2015; 10:03 Hrs.

Ruiz, I., M. (2012). Enseñar en términos de competencias. México: Trillas.

Rusell, B. (1992). El conocimiento humano.España, Barcelona. Planeta-De Agostini.

Sanabria, J.,R. (1995). Lógica. México: Porrúa.

Smith, A., S., Charles, I., R., Dossey, A., J. Keedy, L, M. & Bittinger, L., M. (1998). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Addison Wesley.

Sulbarán, D. (2009). Medición de actitudes. Universidad Central de Venezuela Facultad de Humanidades y Educación Escuela de Psicología Departamento de Metodología Cátedra de Psicología Experimental, Caracas, Venezuela.

Vega, R & De Armas, R. (2009). Tuning-América Latina y su compatibilidad con el modelo curricular cubano. Reencuentro, 54, 73-82.

Weinert, F., E. (1999). Concepts of Competence,Munich, Max Planck Institute fir Psichological research.

Notas

1 Este trabajo es un producto de la línea de investigación de Epistemología, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estadística y probabilidad, coordinada por el primer autor de este manuscrito.

2 Término subjetivo que en este trabajo se va a entender como aquel producto o servicio educativo que cumple con las necesidades del estudiante (cliente) y está dentro las normas estipuladas para ese bien o servicio.

3 Hasta antes de la pandemia mundial provocada por el COVID-19, declarada en el 2020

4 m. Psicol. Adquisición por la práctica de una conducta duradera.