

Las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en la resolución de problemas sobre función cuadrática

Escobar Hoyos, Gladys

Gladys Escobar Hoyos

gladysescobar_h@hotmail.com

Secretaría de Educación Municipal de Manizales,
Colombia

**Revista de Investigaciones de la Universidad Católica
de Manizales**

Universidad Católica de Manizales, Colombia

ISSN: 2539-5122

ISSN-e: 0121-067X

Periodicidad: Semestral

vol. 18, núm. 31, 2018

revistaeducacion@ucm.edu.co

Recepción: 02/04/2018

Aprobación: 12/06/2018

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/498/4983308004/>

Autor de correspondencia: gladysescobar_h@hotmail.com

Resumen: Objetivo: establecer cómo las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas favorecen la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática. **Metodología:** aplicación de una unidad didáctica que contiene aspectos puntuales sobre la función cuadrática y sus representaciones con aplicación directa en problemas que favorecen el tratamiento y conversión de sus registros de representación; el análisis de los resultados se realizó cualitativamente a la luz de las teorías sobre representaciones semióticas y resolución de problemas. **Conclusiones:** definitivamente la movilidad y tratamiento entre las representaciones semióticas de la función cuadrática son útiles al momento de resolver problemas en contexto que requieran el planteamiento de alguno de sus registros de representación.

Palabras clave: representaciones semióticas, resolución de problemas, actividades cognitivas, tratamiento y conversión.

Abstract: Objective: To establish how the cognitive activities of treatment and conversion of the semiotic representations, favor the process of solving contextual problems related to the concept of the quadratic function. **Methodology:** application of a didactic unit that includes specific aspects regarding the quadratic function and the direct application of its representations in problems that favor the treatment and conversion of its representation registers; the result analysis was performed by means of a qualitative method, given the semiotic representations and problem solving theories. **Conclusions:** the mobility and treatment among the semiotic representations of the quadratic function are definitely useful at the time of solving problems in context, which require the approach of any of its representation registers.

Keywords: semiotic representations, problem solving, cognitive activities, treatment and conversion.

Introducción

En la enseñanza de las matemáticas es reconocida la importancia de incluir en los currículos la resolución de problemas, puesto que es fundamental que los educandos reconozcan el mundo tal y como es, además de relacionar en su contexto los conceptos matemáticos, así lo afirma Santos (2007):

Problemas contextuales bien seleccionados ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas, y se utilizan en la construcción de conceptos matemáticos [...], el contexto puede aún ser no realista o [ubicarse] dentro de las matemáticas, si el desarrollo del concepto lo requiere. Sin embargo, el contexto del problema debe ser experimentado como real por los estudiantes. El mundo real se utiliza como un dominio en el cual podemos usar nuestros conceptos matemáticos en la forma que deseemos. (pp. 406-407)

Por otro lado, los conceptos matemáticos, a diferencia de los conceptos propios de muchas disciplinas, no se pueden abordar directamente con los sentidos, por lo que se requieren formas que los representen. Duval (1999) afirmó que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción humana o de una experiencia intuitiva inmediata.

Al momento de abordar problemas en contexto la función cuadrática se constituye importante, puesto que modela bastantes fenómenos; Mesa y Villa (2008) afirman que:

Destaca el hecho de que el estudio de las ecuaciones, cónicas, cinemática y las funciones fueron históricamente cimentando la noción de función cuadrática, estos elementos, son necesarios tomar en cuenta al momento de pensar en una propuesta didáctica del concepto de función cuadrática. Además, se señala que el concepto de función cuadrática estuvo históricamente vinculado a la modelación de fenómenos de variación y cambio. (p.3)

Dado lo anterior, en el presente informe se propone identificar y analizar la resolución de problemas contextuales que requieren la formulación de una función cuadrática y determinar cómo las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones semióticas pueden contribuir al desarrollo exitoso de los problemas y a la aprehensión conceptual del objeto matemático.

Las investigaciones sobre cómo los estudiantes incorporan los conocimientos matemáticos en sus estructuras cognitivas se consideran a la luz de su complejidad, como lo afirman Godino y Batanero (1996) las matemáticas se ocupan de la resolución de problemas formales, del mundo físico o de la realidad social, donde las respuestas son objetos matemáticos con una evolución progresiva.

Para Duval (1999) es fundamental la identificación de los sistemas de representación de los objetos matemáticos para que pueda darse el proceso de enseñanza aprendizaje.

La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que esta requiera de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas, para los objetos, escrituras algebraica y lógica que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones. (p.27)

Duval (1999) habla de actividades cognitivas como el tratamiento, que es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, dentro del mismo registro; y la conversión es la transformación de la representación de un objeto externo relativo al registro de la representación de partida.

La conversión presenta dos características que no se encuentran en el tratamiento (Duval, 1999) y que cimentan una operación cognitivamente más compleja y mucho más evolucionada que las operaciones de tratamiento en los registros mono funcionales: está orientada, es decir, siempre es necesario precisar cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada [...], esto se explica por el hecho de que las posibilidades del sistema de representación de la representación de partida, son totalmente diferentes del sistema utilizado en la representación de llegada. (González, 2011, pp. 15-16)

López y Espinoza (2012) citan a Hitt (2003), quien señala el escaso uso por parte de los estudiantes de los apoyos visuales para la resolución de problemas matemáticos y la escasa articulación de las diferentes representaciones de los conceptos. Esta escasa articulación se debe en gran medida, a que en general, los profesores no enseñan a los estudiantes a que las incorporen en la resolución de ejercicios y problemas.

Sobre la resolución de problemas, Polya (1986) indica que el proceso debe tener en cuenta algunas fases que aumentan la posibilidad de tener éxito al momento de llegar a una respuesta, acerca de lo que Santos (2007), reconoce que un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarla como la ciencia de los patrones.

Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea [...]. El proceso de “hacer” matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados. (Schoenfeld, 1992, p. 343)

En el contexto de la resolución de problemas realistas, Santos (2007) reporta que,

Varias propuestas curriculares explícitamente identifican a la resolución de problemas como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, en particular, lo que interesa es que los estudiantes desarrollen una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados. (p. 18)

Se establecieron como objetivos de la investigación: identificar los obstáculos que los estudiantes participantes del estudio presentan al momento de resolver problemas contextuales relacionados con la función cuadrática; determinar el papel que desempeñan las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función cuadrática y reconocer la incidencia que tienen las representaciones semióticas del concepto de función cuadrática y sus actividades cognitivas en la resolución de problemas.

Materiales y Métodos

Para la investigación que se describe en el presente informe se planteó una metodología cualitativa, que según Planchart (2001):

Responde a la búsqueda de situaciones que no son fácilmente medibles ni comparables por medio de parámetros numéricos, se dirige más a detectar cómo piensa y responde el estudiante ante un problema dado; qué conexiones mentales hace, a qué imágenes mentales acude y con qué sistemas de representación semióticas está familiarizado. (p. 52)

Los hallazgos obtenidos deben interpretarse con base en los referentes teóricos y la comprensión del contexto de la investigación, lo cual se hace desde la perspectiva de la autora.

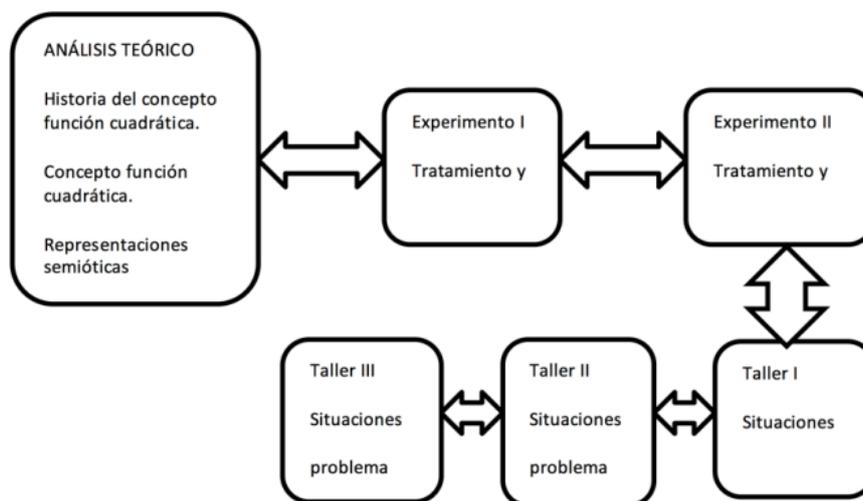


Figura 1.
Diseño de la investigación

Procedimiento

La investigación se llevó a cabo en tres momentos: en el primer momento se aplicó un instrumento de ideas previas a través del cual se identificaron diversos obstáculos relacionados con los conceptos que involucra el estudio; en el segundo momento, se realizó la aplicación de la unidad didáctica desarrollada, con el fin de afianzar los conceptos sobre función cuadrática y privilegiar las actividades cognitivas de tratamiento y de conversión previo a su aplicación en problemas que involucran el uso de estos registros de representación; por último, se realizaron los talleres en los cuales los estudiantes se enfrentaron a la resolución de problemas en contexto que incluían un registro de representación de la función cuadrática, con la aplicación del instrumento de investigación Post test, con el fin de identificar las relaciones existentes entre los registros y su incidencia en la resolución de los problemas.

La investigación fue llevada a cabo con estudiantes del grado undécimo, con edades entre 16 y 17 años, de la Institución Educativa Liceo León de Greiff en Manizales, Caldas. Para efectos de la investigación, el trabajo se realizó con diez estudiantes escogidos aleatoriamente, los cuales conformaron cinco parejas de trabajo. Para la recolección de la información, se utilizaron técnicas de observación a través de instrumentos de cuestionarios escritos. Se elaboraron dos instrumentos de cuestionarios escritos, un instrumento de ideas previas y un cuestionario post test.

Instrumento ideas previas

El instrumento de ideas previas está diseñado para detectar los obstáculos que presentan los estudiantes al momento de abordar los problemas y los registros de

representación. Consiste en un ejercicio problémico que involucra una función cuadrática para su solución y unas preguntas abiertas que contribuyen a dilucidar los aspectos que tuvieron en cuenta los estudiantes al momento de intentar resolverlo.

Se consideraron tres problemas para facilitar la triangulación de la información al momento de analizar los datos. En el presente artículo se muestran los resultados obtenidos del análisis que realizaron los grupos del siguiente problema: se deben colocar los socalos en el piso de un apartamento, con el fin de determinar la medida total en metros del material a comprar, a partir de los datos de construcción se determina que el apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho, y que el apartamento tiene una superficie de 105 m², ¿cuáles son las dos medidas?

Unidad didáctica

Se planteó una unidad didáctica que fue aplicada a todos los estudiantes que participaron en la investigación, la cual presenta aspectos generales sobre el origen epistemológico del concepto de función cuadrática. Mesa (2008) afirma: “[...] pues desde los babilonios (5000 a. C hasta los primeros años del cristianismo) se encuentran registros en los cuales se evidencia que estudiaban algunos problemas que trataban con la variación continua, pero solo desde un registro tabular” (p.46).

Se indica así que, desde los babilonios, comenzó la noción del concepto de función desde los registros tabulares, utilizando expresiones cuadráticas. En la obra *Los elementos*, de Euclides, puede observarse el manejo y tratamiento de las relaciones cuadráticas que les competía.

En los Elementos el término “cuadrado” se concibe como: [...] de entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, también Puertas (1996), la traductora de esta obra, comenta que: “para dibujar un cuadrado [Euclides] a partir de un lado la expresión dada es anagrápsai apó [...] que indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado”. Lo anterior permite mostrar la idea de cuadrado como figura cuadrilátera que evoca una concepción a partir de áreas, pero que se construye a partir de la acción de repetir ese mismo lado, obviamente teniendo en cuenta los ángulos rectos, es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica. (Escobar, 2016, p. 86)

Posteriormente, se aborda el tema de función cuadrática partiendo de su concepto, así: se denomina función cuadrática a una función polinómica de segundo grado, donde a , b y c , son números reales dados, con a diferente de 0.

Por último, se tratan las representaciones de la función cuadrática, la algebraica, la tabular y la gráfica; con el fin de afianzar los conceptos y facilitar el tratamiento y conversión de los registros.

Instrumento post test

El segundo instrumento consiste en tres ejercicios tipo problema contextual que involucran un tratamiento o conversión de algún registro de representación de la función cuadrática, el cual consta de preguntas abiertas que indagan acerca

de la forma de abordar el problema desde su comprensión hasta la reflexión que se da después de tener una solución y tratan de identificar el papel que tienen las actividades cognitivas de tratamiento y conversión al momento de llegar a la solución.

Los ejercicios problema se plantearon desde las siguientes perspectivas: problemas en contexto que privilegian la conversión verbal – algebraica, problemas en contexto que privilegian la conversión tabular – gráfica y problemas en contexto que privilegian el tratamiento algebraico.

En el presente artículo se muestran los resultados obtenidos del análisis que realizaron los grupos del siguiente problema: problema en contexto que privilegia la conversión verbal – algebraica. “El Golden Gate (Puerta dorada), es un puente ubicado en el estrecho de California a la entrada de la bahía de San Francisco, Estados Unidos. Une a San Francisco con Marin County, el Golden Gate está suspendido de dos cables; además, el ancho de las calzadas es de 27 m. Los cables forman una parábola y tocan la calzada exactamente en el centro del puente. 1. Estimar a qué altura están los cables cuando la distancia es de 300 m del centro del puente. 2. Hallar la ecuación de la parábola que forman los cables del puente Golden Gate. 3. Usar la ecuación obtenida en el punto 2 para hallar la altura de los cables cuando la distancia es de 300 m y comparar el resultado con el del punto 1”.

Resultados

Problemas preguntas	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Representa gráficamente la situación que plantea el problema.				
Escribe el problema con tus propias palabras.	No se sabe la medida del ancho para así poder comprar los suelos y poder colocarlos.	Determinar cuánto material se debe usar y cuáles son las medidas del ancho y largo del apartamento.	Cuál es la medida del largo y el ancho de una superficie que mide 105 m ² y el largo es mayor 8 m que el ancho?	Nos pide encontrar la base y la altura.
¿Qué debes hacer para solucionar el problema?	Calcular la medida del ancho del apartamento.	Saber las medidas. Hacer una gráfica. Saber qué me preguntan.	Dividir 105 m ² entre dos el resultado debe dar 52,5 m y a este se le resta 8 m y el resultado es 44,5 m.	Saber el área del rectángulo y del cuadrado.
¿Qué recursos tienes para solucionar el problema?	La medida del largo y la superficie del apartamento.	Calculadora. Conocimiento sobre el tema.	Una calculadora. Capacidad cognitiva. La hoja. Lapiceros.	El área total del rectángulo, el valor adicional del largo del rectángulo.
¿Qué hiciste para resolver el problema?	Encontrar un número que multiplicado por ocho su resultado sea 105.	Gráfica. Operaciones (raíz cuadrada, multiplicaciones).	Leer para poder interpretar el problema y resolverlo en la forma adecuada.	Dos números que multiplicados dan 105.
¿Qué fue lo más fácil y por qué?	Determinar el área del rectángulo.	Hacer la gráfica por que las medidas las da el problema.	La división porque es algo sencilla.	Hallar la fórmula.
¿Qué fue lo más difícil y por qué?	Encontrar el número del ancho para darle solución al problema.	Recordar las fórmulas.	Calcular los resultados finales por que no sabemos con exactitud sus medidas.	Hallar los números.
En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, ¿por qué escogiste dicha forma y no otra?	Porque me pareció la forma más directa y fácil para resolver el ejercicio adecuadamente.	Porque fue el método que nos enseñaron y fue el más fácil de hacer.	Porque es la forma más adecuada de representar una superficie que tiene m ² .	Porque describe perfectamente el problema planteado.

Tabla 1.

Resultados aplicación de instrumento de ideas previas

Preguntas	Grupo 1	Grupo 2
Entender el problema. 1. Entiende todo lo que dice el problema	Si, se entiende	En la parte donde dice "el ancho de las calzadas es de 27 m", podría dar lugar a pensar que existen varias calzadas cada una de 27 m.
2. Puede reparafrasear el problema en sus propias palabras.	Se debe determinar la altura de las torres para saber si el diseño es adecuado a partir de algunos datos de construcción.	Un puente con una longitud de 1280 m, está suspendido de dos torres de 227 m de altura, a través de dos cables que forman una parábola y tocan la calzada justo en el centro del puente, la distancia entre el agua y la calzada del puente es de 67 m. ¿Qué ecuación describe la parábola formada por los cables?
3. Distingue cuáles son los datos.	El largo, la altura de las torres, la altura entre el puente y el río.	Los datos son: longitud del puente 1280 m, altura de las torres 227 m, distancia entre la calzada del puente y la cima de las torres 160 m, vértice de la parábola formada por los cables a 640 m de ambas torres.
4. Sabe a qué quiere llegar.	Hallar la ecuación y calcular las alturas.	Se requiere conocer la ecuación de la parábola descrita por los cables para saber a qué altura estarían en cualquier punto a lo largo del puente.
5. Distingue la conversión o tratamiento que quiere favorecer el problema.	Información del problema a la gráfica y viceversa.	Una conversión de gráfica a números.
Configurar el plan. 6. En sus propias palabras describe la estrategia a utilizar o los pasos a realizar para resolver el problema.	- Se hizo la gráfica. - Se determinó la forma de la parábola. - Con la forma y sabiendo que $y = ax^2 + bx + c$ con un punto se halló a . - Con la ecuación se hallaron los otros valores.	- Leer bien el problema. - Hacer una gráfica de lo que describe. - Hacer una tabla de datos del problema. - Usar estos datos para obtener otros datos clave. - comprobar la solución.
Ejecutar el plan. 7. Al implementar la estrategia, le dio solución al problema?	Si, se dio solución al problema.	Esta estrategia me ayudó a solucionar el problema.
8. Utilizó la conversión o el tratamiento para obtener la solución del problema.	Se utilizó la conversión de palabras a gráfica y de la gráfica a la ecuación.	La gráfica ayudó a ver con mucha más claridad los datos y la forma de resolverlo.
9. Es la solución correcta?	Creo que sí es correcta.	Considero que la solución es correcta.
10. Cree que hay una solución más sencilla?	Hacer la gráfica con escalas más exactas y así determinar las alturas.	Una solución más sencilla sería tener un programa o software que al ser alimentado con los datos este me arroje los valores de la variables en cualquier punto de la parábola.
11. Considera que el tratamiento o la conversión hecha contribuyó a la solución del problema.	Si contribuyó, si no se hace la gráfica es muy difícil visualizar el problema y tener los resultados, además, la ecuación ayuda si no hay recursos para hacer la gráfica exacta.	La conversión contribuyó, ya que organizó con claridad los datos proporcionados en el problema.

Tabla 2.

Resultados instrumento post - test Problema en contexto que privilegia la conversión verbal – algebraica

Discusión de resultados

Hallazgos instrumento de ideas previas

Los estudiantes del estudio poseen dificultades para traducir un enunciado de lenguaje verbal a lenguaje algebraico, este es un hecho que representa un obstáculo importante al momento de realizar la investigación, puesto que una de las representaciones principales del objeto de estudio es la algebraica y dominar la conversión entre lenguaje verbal y algebraico; se constituye en parte fundamental para el aprendizaje de matemáticas, así lo afirma Rodríguez (2011):

La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados. De esta manera, las Matemáticas deberán concebirse, entre otras muchas cosas, como un vehículo de comunicación y expresión de ideas, que contribuirá a la comprensión de otras materias. (pp. 53-54)

Las dificultades que reflejan los estudiantes están directamente asociadas a la falta de interpretación adecuada de los enunciados verbales. Schoenfeld (1992) plantea:

Para desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y disposiciones de interpretación y encontrar sentido [a las ideas matemáticas] también como los modos apropiados de pensamiento matemático- las comunidades de práctica en la cual ellos [los estudiantes] aprenden matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en los cuales el sentido matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique. (p. 345)

Así mismo, para los estudiantes fue difícil identificar el contexto del problema, una gran dificultad que repercute en la capacidad que el estudiante debe tener para desarrollar un pensamiento que le permita solucionar todo tipo de problemas, de esta manera la solución de problemas es esencial en todos los niveles de enseñanza de las matemáticas, así lo afirman Santos y Espinoza (2010):

Una meta importante en las reformas de la educación matemática es proveer a los maestros de los recursos que les permitan transitar de una instrucción basada en la discusión y solución de problemas o tareas que involucren la aplicación directa de reglas o procedimientos para resolverlos hacia prácticas que incluyan la solución de tareas o problemas situados en contextos distintos y que demanden una reflexión cognitiva significativa en los estudiantes. En esta dirección, se valora y fomenta una posición inquisitiva por parte de los estudiantes y donde el tipo de problemas y formas de abordarlos resulta esencial. (párr. 1)

Por otro lado, en todas las representaciones pictóricas de los grupos, estos buscaron dibujar un rectángulo, lo cual es lógico y adecuado al inicio del abordaje del problema, sin embargo, en su desarrollo se pudo generar otro tipo de representación gráfica al momento de encontrar la ecuación cuadrática que da solución al problema, es de anotar que ningún grupo realizó dicha representación, lo cual es un obstáculo relevante, puesto que lo que pretende la investigación es encontrar la relación entre las actividades cognitivas que se pueden realizar entre los diferentes registros de representación de la función cuadrática y la solución de los problemas, según Oviedo y Kanashiro (2012)

El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una actividad cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Esto puede ser la causa de obstáculos que solo la coordinación de varios registros semióticos ayuda a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica en el aprendizaje de la matemática se torna fundamental. (p. 30)

Según la representación pictórica de todos los grupos, se reflejan problemas en la interpretación de los enunciados verbales de problemas matemáticos, que para Bahamonde y Vicuña (2011) quiere decir que:

Los estudiantes tienden a fijarse más en los conceptos que en el enunciado del problema para resolverlo. No es raro observar que, ante un problema propuesto después de haber practicado la suma, los escolares se dispongan a sumar sin haber leído el enunciado. Esto se debe entre otras causas, a los muchos consejos que se les ofrece para resolver problemas, como buscar las palabras clave que remiten a una operación (cuánto falta, cuánto sobra, entre todos, a cada uno, en total...) y efectuarla, ignorando la comprensión del enunciado; esto permite que los estudiantes escriban un número como respuesta, quizá resaltado, pero fuera de contexto, sin explicar qué quiere decir ni a qué se refiere. (p. 13)

A través de la didáctica en la enseñanza de las matemáticas los estudiantes pueden adquirir estrategias inadecuadas para resolver problemas, lo cual incluye prestar poca atención a los enunciados y realizar análisis superficiales y mecanicistas.

Hallazgos post test

La conversión del registro verbal al registro gráfico se efectuó de forma directa, a partir de las descripciones suministradas en el registro de partida, por lo que se puede afirmar que existe un fenómeno de congruencia. Acerca de la actividad de conversión, Duval (2004) afirma que “es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común” (p. 112). Y la congruencia de representaciones está determinada por tres condiciones:

(...) correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y la posibilidad de convertir una unidad signifiante en la representación de salida en una sola unidad signifiante en la representación de llegada. (Duval, 1999, p. 6)

En la Pregunta 3 los grupos dan una descripción de los datos muy basada en el concepto de función cuadrática, lo que representa un avance respecto al instrumento inicial después de la aplicación de la unidad didáctica. Para la enseñanza de las ciencias es muy importante que los contenidos se desarrollen a través de unidades didácticas, según Loste, citado por Palacios (2014), “las unidades didácticas [...] permiten el aprendizaje de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, materiales y recursos que permiten tratamientos más cercanos a las experiencias del alumnado, que promueven su participación activa, así como la formación de su sentido crítico” (p. 6).

En todos los grupos se evidencia que distinguen con claridad la conversión que fue necesaria realizar para dar solución al problema, sin embargo, en ningún punto del análisis se menciona que el registro de partida inicial fue el verbal, ambos grupos consideraron que la conversión realmente importante fue del registro gráfico al registro algebraico lo cual es netamente didáctico, ya que en la enseñanza del concepto la mayoría de las veces se privilegia esta conversión, de manera operativa y mecánica, cuando en realidad para solucionar el problema los grupos realizaron ambas conversiones, del registro verbal al registro gráfico y del registro gráfico al registro algebraico. “Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación” (Duval, en Hitt, 2003, p. 214).

Todos los grupos ponderaron la importancia de las conversiones realizadas para darle solución al problema; así lo citan Castro y Suavita (2011):

Toda actividad matemática implica el uso de sistemas de expresión y representación distintos al lenguaje común, lo que conlleva al desarrollo de Procesos Generales (MEN, 1998), como la resolución de problemas, razonamiento, modelación y comunicación, entre otros. Lo que significa y de acuerdo con Duval (1999), que dichas representaciones no son simplemente el medio para expresar los pensamientos del individuo o que su fin sea la comunicación, sino que son los instrumentos con los que se hace el trabajo matemático, es decir, son instrumentos semióticos, entendidos de acuerdo con Godino (1998) como, correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, signifiante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. (pp. 1-2)

Todas las actividades matemáticas requieren la manipulación de los registros de representación de los objetos matemáticos, por esta razón es importante explorar y reconocer el rol fundamental que desempeñan tales sistemas de representación y también reflexionar sobre su uso y alcances en la construcción del conocimiento matemático y en una actividad tan esencial como lo es la resolución de problemas.

Todos los grupos realizaron de manera exitosa el tratamiento del registro algebraico que se proponía en el problema. Al respecto, Oviedo y Kanashiro (2012) expresan:

El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. (p. 30)

Es un avance significativo que los grupos hayan alcanzado el objetivo de resolución del problema a través del tratamiento, esto indica claridad en el concepto.

En todos los cuestionarios se observó una evolución en el planteamiento de la estrategia para resolver el problema, que de acuerdo con Poggioli (1999) citado por Pérez y Ramírez (2011):

Las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución (p. 26). En este sentido, señala que estas estrategias comprenden los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. Los métodos heurísticos son “estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizados por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución”. (p. 27)

El establecimiento de dichas estrategias por parte de los estudiantes indica una buena comprensión del enunciado y abre el camino para aumentar las habilidades y destrezas al momento de resolver problemas.

Conclusiones

En el análisis de los resultados de la aplicación del instrumento de ideas previas se identificaron dificultades relacionadas con la interpretación de problemas en contexto, el establecimiento de estrategias para la resolución de problemas y casi que la inexistencia del concepto de representación y la posibilidad de realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión; las didácticas en la enseñanza de matemáticas en muchos casos no favorecen la adquisición de habilidades y competencias para la resolución de problemas contextuales y no explicitan la necesidad de coordinar entre los registros de representación de los objetos matemáticos.

En el experimento realizado a través del problema que privilegia la conversión verbal al lenguaje algebraico, los estudiantes recurrieron al registro gráfico como una representación auxiliar para realizar el tránsito hacia la representación algebraica, indicando que se encuentran más familiarizados con los tratamientos de los registros gráficos.

El trabajo con resolución de problemas matemáticos en contexto lleva al estudiante a examinar los objetos matemáticos y progresar en su aprendizaje, lo que tiene como consecuencia la apropiación del concepto, expresado así por Santos (2007): “En este proceso, los estudiantes desarrollan un método inquisitivo que les permite reflexionar constantemente de manera profunda sobre las diversas maneras de representar y explorar las ideas matemáticas” (p. 23).

Desde el inicio de la aplicación de los instrumentos fue evidente que para los estudiantes el establecimiento de una estrategia clara para resolver los problemas fue dificultoso, sin embargo, se logró un avance posterior a la aplicación de la unidad didáctica. Para resolver problemas y plantear estrategias heurísticas en su resolución se debe realizar un trabajo continuo en su estudio y en el análisis de las posibilidades que permiten alcanzar una solución con éxito.

Si bien el tratamiento de las representaciones depende directamente del registro inicial, en el estudio se reflejó el uso predominante del tratamiento de los registros algebraicos, dado que en la enseñanza tradicional del álgebra prevalece el contexto netamente algebraico por su carácter operativo dando poco lugar a otros enfoques.

Los cambios identificados después de la aplicación de la unidad didáctica demuestran el camino hacia la superación de todas las dificultades halladas inicialmente, los grupos lograron describir el problema haciendo énfasis en el contexto, reconocieron la conversión utilizada y lograron realizar el tratamiento algebraico de manera exitosa; esto resalta la relevancia de aplicar un instrumento inicial para tratar las problemáticas encontradas en la aplicación de la unidad didáctica, además de la importancia de llevar las temáticas al aula a través del desarrollo a conciencia de unidades didácticas donde se genere una evolución conceptual.

El uso de las diferentes representaciones incide favorablemente en el aprendizaje del concepto de función cuadrática y es un instrumento importante al momento de resolver problemas en contexto que requieren para su solución el planteamiento de los diferentes registros de representación de la función cuadrática.

A través del instrumento post test, se identificó la fuerte relación que existe entre el éxito en la resolución de problemas en contexto de la función cuadrática y el empleo de sus representaciones semióticas.

Referencias

- Bahamonde, S. y Vicuña, J. (2011). Resolución de problemas matemáticos. Recuperado de: http://www.umag.cl/biblioteca/tesis/bahamonde_villarroel_2011.pdf
- Castro, C. y Suavita, S. (2011). Formación, tratamiento y conversión como actividades cognitivas de representación: una experiencia con estudiantes para profesor. XIII conferencia interamericana de educación matemática. Recife, Brasil. Recuperado de: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1358.pdf>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2004). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar en el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143- 168.

- Escobar, G. (2016). *Las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las Representaciones semióticas en la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. Recuperado de: <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/1046/1/Informe%20final%20Gladys%20Escobar.pdf>
- Godino, J. y Batanero, C. (1996). Relaciones dialécticas entre teoría, desarrollo y práctica en educación matemática: un eta-análisis de tres investigaciones. En N. Malara (Ed.), *An International View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Universidad de Módena. pp. 13-22.
- González, G. (2011). *Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática*. Recuperado de: <https://goo.gl/sdu2H1>
- Hitt, F. (2003). *Funciones en contexto*. México: Prentice Hall.
- López, A. y Espinoza, J. (2012). *Representaciones semióticas del concepto de función en ambiente excel: un estudio de caso*. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/4485/1/L%C3%B3pezRepresentacione%20ALME2012.pdf>
- Mesa, Y. (2008). *El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico*. Recuperado de: <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/939/1/JC/0538.pdf>
- Oviedo, L. y Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, (13), 29-36. Recuperado de: http://www.fcb.unl.edu.ar/media/Institucional/Publicaciones/Aula%20Universitario%2013_imprensa_WEB.pdf
- Palacios, N. (2014). La unidad didáctica: el aprendizaje del entorno y sus problemáticas. XIII Coloquio Internacional de Geocrítica El control del espacio y los espacios de control. Barcelona. Recuperado de: <http://www.ub.edu/geocrit/coloquio2014/Nancy%20Palacios.pdf>
- Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), 169-193. Recuperado de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009
- Planchart, O. (2001). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Recuperado de: <http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>
- Polya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puertas, M. L. (1996). *Euclides: elementos*. Madrid: Gredos.
- Rodríguez, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1751/1/RodriguezDomingoS_TFM_julio2011.pdf
- Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica*. Recuperado de: <http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>
- Santos, L. y Espinosa, H. (2010). Teachers. use of dynamic software to generate serendipitous mathematical relations. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 31- 46. Recuperado de: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~santos/ata/productos.html>
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Notas de autor

Gladys Escobar Hoyos. Especialista en Evaluación Pedagógica, Universidad Católica de Manizales. Magíster en Enseñanza de las Ciencias, Universidad Autónoma de Manizales. Docente Secretaría de Educación Municipal de Manizales, Manizales, Colombia.

Correspondencia. gladysescobar_h@hotmail.com

Enlace alternativo

<http://www.revistas.ucm.edu.co/ojs/index.php/revista/article/view/108/pdf>
(pdf)