REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática
ISSN: 2318-6674
revistareamec@gmail.com
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil

Teixeira Junior, Valdomiro Pinheiro

UMA REFLEXÃO SOBRE A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA A PARTIR DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, vol. 9, núm. 3, 2021
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil

DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

UMA REFLEXÃO SOBRE A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA A PARTIR DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

A REFLECTION ON THE HISTORY OF ALGEBRA FROM THE PHILOSOPHY OF WITTGENSTEIN

UNA REFLEXIÓN SOBRE LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA DESDE LA FILOSOFÍA DE WITTGENSTEIN

Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior*

RESUMO

Neste texto realizo, em um estudo teórico, uma reflexão sobre a construção do conhecimento algébrico ao longo da história. Inicialmente apresento um breve histórico do desenvolvimento da linguagem algébrica, como ela se tornou cada vez mais sintética em sua simbologia. Então, apoiado em Wittgenstein, indico que a linguagem algébrica possui características de uma gramática, a arbitrariedade e a autonomia, e desse modo, a álgebra se desenvolve em um automovimento gerenciado por criações que os matemáticos realizam para evitar contradições, tendo regras oriundas de consensos na comunidade de matemáticos. A álgebra é arbitrária, pois teria surgido a partir de qualquer outro sistema (empiria, aritmética ou geometria), e é autônoma, pois, a partir da formação de seu sistema simbólico e consenso entre a comunidade, a linguagem algébrica fica independente de fatores extralinguísticos.

Palavras-chave: Álgebra. Linguagem. História. Wittgenstein. Gramática.

ABSTRACT

In this text, in a theoretical study, I reflect on the construction of algebraic knowledge throughout history. First, I present a brief history of the development of algebraic language, how it became increasingly synthetic in its symbology. So, supported by Wittgenstein, I indicate that algebraic language has characteristics of a grammar, arbitrariness and autonomy, and thus, algebra develops in a self-movement managed by creations that mathematicians perform to avoid contradictions, having rules arising from of consensus in the community of mathematicians. Algebra is arbitrary, as it could have emerged from any other system (empiric, arithmetic or geometry), and it is autonomous, as, from the formation of its symbolic system and consensus among the community, algebraic language becomes independent of extralinguistic factors.

Keywords: Algebra. Language. History. Wittgenstein. Grammar.

RESUMEN

En este texto, en un estudio teórico, reflexiono sobre la construcción del conocimiento algebraico a lo largo de la historia. Inicialmente presento una breve historia del desarrollo del lenguaje algebraico, cómo se volvió cada vez más sintético en su simbología. Entonces, apoyado por Wittgenstein, indico que el lenguaje algebraico tiene características de gramática, arbitrariedad y autonomía, y así, el álgebra se desarrolla en un auto-movimiento manejado por creaciones que los matemáticos realizan para evitar contradicciones, teniendo reglas que surgen del consenso la comunidad de matemáticos. El álgebra es arbitraria, ya que podría haber surgido de cualquier otro sistema (empírico, aritmético o geométrico), y

* Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Marabá, Pará, Brasil. Avenida dos Ipês S/N Bairro: Cidade Jardim, Marabá, Pará, Brasil. CEP: 68500-000. E-mail: valdomiro@unifesspa.edu.br.

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

es autónoma, ya que, a partir de la formación de su sistema simbólico y el consenso entre la comunidad, el lenguaje algebraico se vuelve independiente de los factores extralingüísticos.

Palabras clave: Álgebra. Lenguaje. Historia. Wittgenstein. Gramática.

1 INTRODUÇÃO

Wittgenstein não é comumente utilizado para fazer reflexões sobre a história da linguagem ou da matemática, suas reflexões abordam a linguagem em si, no entanto, vejo nessa filosofia um potencial que nos auxilia a entender o processo de construção histórico de linguagens, por isso, lanço-me aqui nesse esforço em forma de um ensaio teórico introdutório nessa tentativa.

Nesse intento, realizo, em um estudo teórico, uma reflexão sobre a construção do conhecimento algébrico ao longo da história, considerando a linguagem como centro de atenção nesse processo. Nossa pesquisa está apoiada em Ludwig Wittgenstein, filósofo que cunhou uma filosofia que entenda a linguagem como fonte de produção de sentidos, e não mais como apenas representação de conteúdos mentais ou empíricos. A linguagem deixou de ser entendida como aquela que mostra algo além dela para ser entendida como o que se mostra, o conteúdo é ela em si. Nessa filosofia da linguagem, Wittgenstein compreende que a linguagem é um produto cultural, e que se torna autônoma quando se cristaliza como uma gramática, isto é, como um conjunto de regras, aceito comunitariamente como correto.

Inicialmente, apresento um breve histórico de como a álgebra se desenvolveu e para isso uso como referências Eves (2004), Boyer (1996), Aaboe (1984), Baumgart (1992), Ponte, Branco e Matos (2009), Struik (1989), Pratt (1993) e Milies (2004). Vale ressaltar que nem todos os autores são citados explicitamente, uma vez que os conceitos por eles discutidos são questões que vemos presentes na maioria destas referências. Enfatizo o processo histórico apresentado o desenvolvimento da linguagem e indico momentos em que a linguagem matemática e mais especificamente a linguagem algébrica, como uma linguagem mais sintetizada, provocou mudanças ou desenvolvimentos mais céleres na matemática. A linguagem algébrica permitiu avanços pois ao invés de se escrever um problema por extenso como era feito na antiguidade, conseguia-se fazer com alguns símbolos demonstrações e relações, não só na própria matemática, mas também dos fatos do mundo.

Em seguida, apoiado em Wittgenstein, indico que a linguagem algébrica possui características de uma gramática, a arbitrariedade e a autonomia, que são características

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

pontuadas pelo filósofo em sua compreensão de uma gramática, e desse modo, a álgebra se desenvolve em um automovimento gerenciado por criações que os matemáticos realizam para evitar contradições, tendo regras oriundas de consensos na comunidade de matemáticos. Mostro que uma linguagem mais desenvolvida permite tanto avanços internos àquela a qual faz parte ou se aproxima, quanto os externos, sendo utilizada em outras áreas.

Tenho como objetivo mostrar que a álgebra é arbitrária, pois poderia surgir a partir de qualquer outro sistema (empiria, aritmética ou geometria), e é autônoma, pois, a partir da formação de seu sistema simbólico e consenso entre a comunidade, a linguagem algébrica fica independente de fatores extralinguísticos, desenvolvendo uma sintática própria, que depende de si mesma.

2 O DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA NA HISTÓRIA

A compreensão sobre o desenvolvimento da álgebra se faz principalmente na observação com o estudo de equações em diferentes povos, como os babilônicos, egípcios, gregos, hindus, árabes, etc. que alcançam um período de até 1700 a.C. Equações são igualdades entre expressões que revelam quantidades. Wittgenstein no *Tractaus* compreendeu que as proposições da matemática são equações e que a equação é a forma da matemática revelar a lógica do mundo (WITTGENSTEIN, 1993).

Os primeiros avanços em álgebra são percebidos quando se olha para as formas que os diferentes povos trataram as equações e quando buscaram encontrar valores desconhecidos nas mesmas, as chamadas incógnitas. Como no exemplo dado, qual o valor de x na equação: $x + 5 = 7$. O valor de x deve ser 2 para a proposição se manter como equação. Os primeiros povos que trataram de alguma forma de álgebra não tinham essa forma de escrita, até por que os próprios números indo-arábicos – usados atualmente - começaram a surgir no século VII d.C, e se difundiram na Europa no século XIII d. C. O uso de letras em equações também foi mais tardio, no século XVI d.C. Portanto, os primeiros estudos com equações com incógnitas se deram com as escritas cursivas dos povos. Foram encontrados estudos bem avançados, com equações do segundo, terceiro e quarto graus com os povos antigos.

Considera-se que a história da álgebra se divide em duas fases: a primeira se deu sobre o estudo de equações e foi de 1700 a.C. a 1700 d. C, e a segunda sobre o estudo de estruturas algébricas, que é um desenvolvimento da primeira fase (BAUMGART, 1992). Com relação a forma de representação geralmente se divide a história da álgebra em três fases: álgebra retórica,

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

álgebra sincopada e a álgebra simbólica. Na retórica as expressões são escritas por extenso, na sincopada há o uso de abreviaturas e na simbólica o uso de letras. Essa evolução representa o desenvolvimento da própria linguagem matemática. Essa classificação foi feita pelo filologista e historiador da matemática alemão Georg Ferdinand Nesselmann em seu livro *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra* (Ensaio sobre uma história crítica da álgebra) de 1842, que é adotada por quase todos os historiadores da matemática.

Os primeiros povos em que se percebe o estudo de equações são os egípcios e babilônicos, próximo do século XVII a.C. Eles faziam uso da álgebra retórica. Os babilônicos produziram estudos aritméticos complexos e relacionados à álgebra, como vemos num exemplo típico oferecido por Baumgart (1992) dos problemas encontrados em escrita cuneiforme, em tábuas de argila que remontam ao tempo do rei Hamurabi (1700 a.C.). “Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura” (BAUMGART, 1992, p. 5). O autor aqui usa a notação decimal indo-arábica em vez da notação sexagesimal cuneiforme para exemplificar a fase retórica. Baumgart (1992) defende que a escrita cuneiforme babilônica, por ser mais avançada que a escrita egípcia parece ter favorecido os estudos matemáticos. Isso mostra como uma linguagem mais desenvolvida tem estreita relação com o desenvolvimento da matemática. Os babilônios já usavam um método semelhante ao atual da substituição por uma fórmula geral, para resolver equações quadráticas.

No Egito, apesar de não apresentar métodos tão avançados como os babilônicos, também percebemos algo próximo do que denominamos hoje de álgebra, seguindo a nossa relação com a resolução de equações com valores desconhecidos. Um importante documento que se tem sobre esta época é o papiro de Rhindi ou Ahmes, escrito pelo escriba Aahmesu. Boyer (1996, p. 10) nos oferece um exemplo contido neste papiro da álgebra retórica egípcia: “Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: Qual é a quantidade?”. O montão (ou *aha*) neste caso é o número procurado - é a incógnita. Os egípcios já apresentaram símbolos para representar *mais* e *menos* (um par de pernas da esquerda para direita como mais e fazendo o movimento contrário, menos) e ideogramas para os sinais de igual e a incógnita. Os egípcios resolviam equações por estimativa.

É importante dizer que apesar de verificarmos na história da álgebra a relação ou a necessidade de resolvermos problemas do cotidiano, na maioria são estudos com os números e um trabalho formal, que não parte diretamente do empírico, como percebemos na fala de Eves (2004, p. 57), quando ele rata da matemática babilônica e egípcia:

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

> A ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração [...]. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

A partir do século IV a.C. percebe-se na Grécia, sob influência da álgebra babilônica, um avanço na álgebra. Com Diofanto de Alexandria no século III d.C., com sua grande obra *aritmética,* que fez uso de abreviaturas, houve a chamada álgebra sincopada. Apesar do avanço, a forma retórica se manteve por muito tempo, pois a forma sincopada não se tornou padrão unânime. Diofanto é por muitos considerado o fundador da álgebra. Ele usou o símbolo ς para indicar incógnita. Usou símbolos para potências da incógnita, até o expoente 6. Incógnita ao quadrado era Δ^y, incógnita ao cubo K^y, incógnita a quarta potência $\Delta^y\Delta$, incógnita a quinta potência ΔK^y e a incógnita a sexta potência K^yK. Ele indicava a adição pela justaposição e criou sinais para subtração, igualdade e inversos. Por exemplo, escrevia uma expressão como $x^3 + 13x^2 + 5x$, da seguinte forma: $K^y\alpha\Delta^y\iota\gamma\varsigma\varepsilon$.

Euclides de Alexandria, autor dos *Elementos*, no século III a.C. também tem parte de sua obra dedicada à álgebra. Os Elementos contêm treze livros, dentre eles, os livros II e V são sobre álgebra. No entanto, como em toda sua matemática, a álgebra euclidiana também é geométrica, e desse modo ele compreende quantidades desconhecidas como figuras geométricas, ou seja, a^2 é um quadrado, a^3 um cubo, ab um retângulo etc. Assim, os gregos não chegaram nem próximo à forma de álgebra dos tempos atuais, talvez em decorrência do desprezo com o trabalho com números que era relegado aos escravos, e considerado desonroso para cidadãos livres, além de terem dificuldades na aceitação de certos números, como os negativos e os irracionais, o que revela o extremo rigor dos matemáticos gregos, e que também mostra a ação do homem influenciando no desenvolvimento da matemática. Além disso, em razão da própria forma de escrita numérica dos gregos, que era limitada, assim como da semelhança com os numerais romanos, o que resultava em dificuldades práticas para o trabalho numérico, mesmo em operações mais simples, o que mostra mais uma vez como a linguagem condiciona nossas formas de pensamento, limitando os gregos antigos, e causando um desenvolvimento ilimitado e veloz depois dos numerais indo-arábicos para a matemática de modo geral, e da álgebra simbólica, isto é, do uso de letras na álgebra, a partir do século XVI com os avanços proporcionados por François Viète. Uma outra explicação talvez esteja na filosofia e no modo como os gregos compreendiam o conhecimento. A base filosófica apoiada no realismo, talvez não possibilitou um avanço com relação à álgebra, pois a forma de fazer

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

matemática era geométrica, e ainda demonstrada com régua e compasso, assim a falta de uma sistematização de formas ou modelos gerais impossibilitou um avanço no simbolismo algébrico e tenha limitado uma evolução na matemática.

Houve também uma outra álgebra sincopada, assim, como a de Diofanto, que ocorreu com os Hindus entre os séculos VI e XII, dentre os quais, destacam-se os matemáticos Brahmagupta e Bhaskara Akaria. Os hindus, assim como Diofanto, indicavam a adição pela justaposição, a subtração colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação com *bha* (de *bhavita*, que significa produto) depois dos fatores, a divisão escrevendo o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada com *ka* (de *karana*, que significa irracional) antes da quantidade. Brahmagupta indica incógnita por *yā* (de *yāvattāvat*, que significa tanto quanto), os números negativos por *rū* de (*rūpa*, que significa número puro) e uma segunda incógnita era indicada por *kā* (*kālaka*, que significa a cor preta), e as demais incógnitas eram representadas pelas iniciais de outras cores. Uma expressão como $8xy + \sqrt{10} - 7$, era escrita *yā kā 8 bha ka 10 rū 7*. Os indianos passaram a resolver equações por substituição. Isso mostra que tal desenvolvimento de resolução foi avançando para modelos cada vez mais econômicos e eficazes.

No século VIII d.C. surgiu de fato o termo *álgebra*. O nome foi retirado do título do livro *Hisab al-jabr wa-almuqãbalah*, do matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi[1], nascido em Khwarizmi, atual Uzbequistão, a quem também é atribuído o desenvolvimento dos algarismos indo-arábicos e a notação decimal posicional. O livro foi escrito em Bagdá por volta de 825 d.C. O título do livro é compreendido como "ciência da confrontação (ou restauração, ou reunião) e da redução", ou "ciência da transposição e do cancelamento" ou é um livro que trata das operações *al-jabr* e *qabalah,* sendo *al-jabr*, o termo que deu origem ao nome "álgebra", que tem o significado de "restauração", enquanto o termo *qabalah* significa "redução". A "restauração" faz referência à mudança nos dois membros de uma equação e a "redução" se refere ao cancelamento de termos semelhantes nos dois membros de uma equação. Esse livro deixa muito claro o que é a álgebra ao tratar de equações e faz referência a ideia de se imaginar uma equação como uma balança em equilíbrio, para comparar com o sistema matemático que busca resolver problemas que envolvam números desconhecidos. Entretanto, o modo de fazer álgebra de Al-Khowarizmi ainda era retórico e as

[1] *Al-Khowarizmi* também escreveu outro livro do qual não tem mais cópia, mas que era sobre o uso dos numerais hindus. Com o tempo o nome do autor do livro passou a ser associado ao modo de calcular, que hoje chamamos de *Algoritmo*, influenciado pelo nome do autor do livro (EVES, 2004).

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

resoluções são de equações do 1º e 2º graus, com alguns casos particulares de graus superiores.

O simbolismo algébrico foi a princípio se desenvolvendo lentamente. Antes do século XVI quando de fato surge a álgebra simbólica, alguns algebristas usavam *p* e *m* para representar adição e subtração, pois eram as iniciais, respectivamente, de *Plus* (mais) e *Minus* (menos). Robert Recorde foi o primeiro a usar o símbolo = para representar igualdade e o símbolo + para representar adição em 1557. É importante frisar que alguns matemáticos e cientistas famosos como Kepler, Torricelli, Cavalieri, Pascal, Napier e Fermat ainda usavam principalmente a forma retórica ao invés de símbolos, como no uso de *aeq* ou *aequales* para representar igualdade. Viète usou *aequales* e mais tarde usou ~ e Descartes usava α, talvez numa referência a *aequalis*. Johannes Widman usou os sinais + e – indicando adição e subtração, respectivamente, em 1489. O sinal + era uma referência à palavra latina *et*, que quer dizer "e". Nicolas Chuquet (século XV d.C.) foi o primeiro a usar a notação dos expoentes praticamente da forma como conhecemos hoje. Simon Stevin (século XVI d.C.) foi quem primeiramente abordou o conceito de polinômios e o seu uso para a formulação de problemas de resolução de equações.

Somente no século XVI d.C., ou seja, há pouco mais de 400 anos de nosso tempo, que surge na Europa a álgebra simbólica. As notações matemáticas já vinham se desenvolvendo, mas a álgebra alcança o que podemos chamar de álgebra simbólica com o matemático francês François Viète, que introduziu o uso de letras para indicar números desconhecidos e dos símbolos nas operações, da forma próxima de como são utilizados hoje. Destaca-se que Viète desenvolveu a álgebra em si como um sistema simbólico, buscando estudar o comportamento das equações, perceber propriedades, não fazendo relação com o cotidiano, mas no interior da própria matemática, ou seja, não apenas colocou letras para representar números, como também possibilitou um sistema operatório. Ele apresenta suas principais ideias sobre álgebra na obra "Introdução à arte analítica" de 1591. Eves (2004) nos diz que Viète adotou o uso de vogais para representar um valor desconhecido e consoantes para representar os valores conhecidos, as grandezas, fazendo, assim, uma distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida. No entanto, pensava-se em *parâmetro* e *incógnita* como segmentos e não como números. Vale informar que Viète não utilizou o termo álgebra, talvez por um preconceito europeu em usar um termo árabe, ele usava o termo *análise*. Viète (1646 *apud* MILIES, 2004, p. 8) explica seu simbolismo da seguinte forma:

> Este trabalho pode ser ajudado por um certo artifício. Magnitudes dadas serão distinguidas das desconhecidas e requeridas por um simbolismo, uniforme e sempre

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

> fácil de perceber, como é possível designando as quantidades requeridas pela letra A ou por outras letras vogais A, I, O, V, Y e as dadas pelas letras B, G, D ou outras consonantes.

Desse modo escrevia equação $bx^2 + cx = d$ da seguinte forma: *B in A quadratum + C plano in A aequalia D* sólido, que se pode escrever como: BA2 + CA *aequalia* D. Viète escrevia dessa forma, pois pensava geometricamente, por isso os termos, *quadratum, plano* e *sólido*. Apesar da diferença que ainda há para os tempos de hoje, essa forma de escrita foi um grande avanço para a época.

O uso de letras para representar números e tratar equações não foi logo aceito. Sendo Descartes quem vem a completar o trabalho de Viète, nesse sentido, ao criar as notações que chegam muito próximas ao que se usa hoje. Descartes aperfeiçoou a álgebra simbólica ao colocar as primeiras letras do alfabeto (a, b, c) para representar quantidades conhecidas e as últimas (x, y, z) para representar as incógnitas.

Baumgart (1992, p.12 e 13) apresenta um histórico do desenvolvimento do simbolismo algébrico a partir do século XVI, como reproduzimos abaixo, com algumas alterações do que foi feito originalmente:

Cardano (1545): *cubus p̄ rebus aequalis 20*

$$x^3 + 6x = 20$$

Bombelli (1572): $\underset{\smile}{6}$ $\underset{\smile}{3}$ I · p · 8 · Eguale à 20

$$x^6 + 8x^3 = 20$$

Viète (1591): *B in A quadratum + C plano in A aequalia D* solido

$$bx^2 + cx = d$$

Harriot (1631): aaa -3bba === +2 · ccc.

$$x^3 - 3b2x = 2c^3$$

Descartes (1637): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \alpha 0$

Wallis (1693): $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Viète e Descartes ainda não utilizavam coeficientes negativos, sendo John Hudde o primeiro a fazer isso em 1657, ao utilizar letras para representar coeficientes que podiam ser tanto positivos quanto negativos, e a inclusão de expoentes, além de negativos, também os fracionários, se deve a Isaac Newton. Já havia formas gerais para equações quadráticas, mas

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

não para equações cúbicas e maiores que elas. Scipione del Ferro, resolveu a equação geral do 3.º grau, mas não publicou seu trabalho. Tartaglia também resolveu, mas não publicou, sendo publicado, enfim, por Cardano na sua *Ars Magna*. A equação geral do 4.º grau foi resolvida por Ferrari.

Baumgart (1992) destaca que o sistema indo-arábico, a invenção da imprensa e o desenvolvimento do comércio foram fatores que contribuíram para a evolução da álgebra na Europa, tanto que as cidades italianas que eram comercialmente fortes foram o berço de certos avanços na álgebra, também devido ao intercâmbio de ideias favorecido pelo comércio entre a Europa e outros países.

A álgebra não se desenvolve a partir de problemas concretos, talvez isso estivesse mais próximo dos avanços dos logaritmos e trigonometria, e que se utilizaram dos avanços algébricos ou de uma linguagem simbólica mais econômica. Um dos poucos usos cotidianos que colaboraram no desenvolvimento da álgebra está na matemática financeira que buscou modelos para previsões econômicas e de aplicações financeiras que envolvem juros. Até nesse caso há muitos exemplos de problemas formulados como desafios, e não necessariamente problemas reais. Portanto, o avanço da álgebra se deu muito por disputas e desafios intelectuais, isto é, encontrar respostas a determinados problemas, que ocorria desde a Grécia, como a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo, e na idade moderna, alguns desses problemas constava de resolver determinadas equações que continham raízes reais quadradas negativas e encontrar formas gerais de resolução de equações de graus maiores que 4, como foi o caso da busca da resolução da equação quíntica.

> Wittgenstein assegura um papel aos pseudo-problemas: eles cumprem uma função em matemática, mesmo que não sejam ‘problemas’ reais. A sua função é apenas direcionar a pesquisa matemática; as conjecturas enquanto estímulos ou guias da pesquisa matemática *podem* nos ajudar a ver *novos aspectos* dos sistemas matemáticos em que operamos (ENGELMANN, 2009, 178).

Os quatro exemplos dados anteriormente - a trissecção, a quadratura, a resolução, a forma geral – tiveram suas possibilidades refutadas, mas permitiram grandes avanços na matemática, devido aos processos enfrentados por quem intentou encontrar as respostas, e que possibilitou outras formulações. A busca por raízes reais quadradas negativas possibilitou a criação do conjunto dos complexos, como foi o caso de Cardano, que mesmo não aceitando determinados resultados, chamando-os de fictíveis, prosseguiu à resolução. Vale destacar que nessa época não se aceitavam os números imaginários, e até números negativos ainda eram

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

pouco aceitos, dificuldade que se assemelha à dos gregos com os números irracionais. Euller resolveu usar números imaginários, tais números só foram definitivamente aceitos com a representação geométrica proposta por Argand e Gauss. Baumgart (1992) revela que Gauss dizia que a metafísica da raiz quadrada de -1 era difícil, e que o sucesso dos resultados na matemática fez esta resolução ser aceita.

A busca por formas gerais de resoluções de equações maiores que 4 possibilitou a passagem para o estudo de estruturas algébricas. Por exemplo, Lagrange tentou encontrar uma forma geral para a equação quíntica, na intenção de encontrar para qualquer equação, mas "Embora Lagrange não tenha alcançado seu objetivo principal, sua abordagem do problema fez uso das permutações das raízes da equação, levando-o a descobrir a chave da teoria dos grupos das permutações" (BAUMGART, 1992, 23-24). Abel e Galois, por exemplo, se basearam nas criações de Lagrange. Depois de solucionadas as equações do 4º grau, finaliza-se o desenvolvimento da teoria das equações algébricas, compreendido como a primeira fase da álgebra. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 7), dois fatores contribuíram para isso: 1) a prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4º, dada por Abel; e 2) a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4º tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois. Abel e Galois são ambos do início do século XIX.

A partir desse desenvolvimento linguístico da álgebra, a matemática avançou, talvez como nunca se fez antes. Ela avançou sobre si mesma. Como diz Devlin (2004, p. 11) que defende que "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da matemática simplesmente não existiria". Compreendemos que o desenvolvimento filosófico de modo geral também possibilitou esse desenvolvimento na matemática, pois consideramos que um pensamento mais dedutivo baseado no idealismo cartesiano permitiu uma aceitação maior da abstração algébrica. O trabalho de Descartes foi um dos propulsores dessa álgebra, que começa a se desenvolver ainda mais, com estudo sobre equações não-algébricas e as equações diferenciais, relacionadas então com as funções. O mundo avançou a partir do desenvolvimento da álgebra, como entende Pierobon (2003, p. 200) ao dizer que "Embora seja verdade que a revolução científica e industrial reformulou radicalmente o universo de nossa vida cotidiana, trata-se do epifenômeno de uma mutação profunda cuja 'revolução algébrica' é um outro epifenômeno do mesmo

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

nível”[2].

No século XIX Gauss demonstra finalmente o teorema fundamental[3] da álgebra, que estabeleceu a criação do conjunto dos complexos, que se deu a partir da evolução dos estudos das equações. “Na verdade, a ‘prova do teorema fundamental da álgebra’ constrói um novo tipo de número” (WITTGENSTEIN, 2003, p. 42). Os números complexos foram criados e aceitos, por ser um sistema, em que suas operações não entram em contradição. Considerando os reais de fato as raízes não existiriam – como não existia para Kant, por exemplo - e o teorema fundamental seria falho. Não estamos com isso querendo diminuir os progressos matemáticos, como se fossem simples invenções, e sim, demonstrar que são engenhosas e brilhantes criações de verdadeiros gênios, por isso, devem ser compreendidos como produtores de soluções e não de descobridores de verdades eternas.

Após a revolução causada pelos complexos, é criada a teoria dos Grupos por Galois e a álgebra avança tendo como objeto principal as estruturas algébricas abstratas, com a teoria dos corpos e a teoria dos anéis. A partir de então, “novas álgebras” surgiram, como a de Peacock que buscou esclarecer os fundamentos da álgebra, onde tentou axiomatizá-la, do mesmo modo que a geometria nos Elementos de Euclides. Peacock percebeu que um cálculo formal poderia ser realizado sem considerar a natureza dos entes com os quais se trabalha, sendo suficiente preocupar-se com as operações entre eles, conforme regras prefixadas (MILIES, 2004). De Morgan contribuiu para o desenvolvimento da álgebra abstrata, mas ainda utilizando axiomas abstraídos da aritmética. Foi Hamilton que procedeu ao desenvolvimento da álgebra, independente da experiência aritmética. Hamilton utilizou o termo “vetor” no sentido algébrico moderno e criou os quaternários, quarterniões ou quaternions, que é um sistema de números complexos de quatro unidades. Cayley desenvolveu o estudo da álgebra das matrizes. A álgebra invade definitivamente o campo científico da lógica com Boole, hoje é conhecida como álgebra booleana ou álgebra dos conjuntos, colaborou no desenvolvimento da computação moderna, e

[2] “S’il est vrai que là révolution scientifique et industrielle a radicalement refaçonné l’univers de notre vie quotidienne, il s’agit là de l’épiphénomène d’une mutation profonde dont la ‘revolution algébrique’ est um autre épiphénomène de même rang”

[3] O teorema fundamental da álgebra afirma que toda equação de grau *n* tem *n* raízes. Parece ter sido pensado primeiramente por Viète, mas foi de fato proposto por Albert Girard (1595-1632), em 1629, num livro intitulado *Invention nouvelle en l’Algèbre*. Teve diversas propostas de demonstração por matemáticos famosos como Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783), D’Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813). Todas elas foram refutadas. A demonstração final também foi realizada por Argand (1768-1822), mas a demonstração mais aceita (ou mais famosa) é de Gauss, que definiu que qualquer polinômio p(z) com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa, o que leva a dizer que a equação p(z) = 0 tem n soluções.

REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

se aplica ainda em probabilidades, teoria da informação, análise, problemas de seguros etc. (MILIES, 2004).

No século XX surge Nicolas Bourbaki, que é o pseudônimo de um grupo de matemáticos, a maioria franceses, que teve entre outros membros, os matemáticos Dieudonné e Weil. Esse grupo buscou axiomatizar as diversas teorias matemáticas por meio da Teoria dos Conjuntos, teoria que já havia sido axiomatizada pelo grupo. Ele foi extremamente influenciado por matemáticos alemães, como Hilbert, Artin e a matemática Emmy Noether. Foi o grupo Bourbaki que difundiu a ideia de estrutura na matemática, que eles compreendem como "uma classe particular de definições de objetos abstratos, tendo em mente que esses objetos têm um certo número de propriedades características, que poderiam ser eventualmente exibidas" (DUARTE, 2007, p. 72). Bourbaki popularizou notações que se usa atualmente como $\cap$, $\cup$ e φ e o uso da letra Q para designar o conjunto dos números racionais. Dieudonné se envolveu com a questão do ensino de matemática na França e foi um dos que influenciaram o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Influenciado pelo grupo Bourbaki e seu estudo primordialmente algébrico influenciou um movimento educacional que, como diz Duarte (2007), se espalhou por toda Europa, EUA e alcançou o Brasil. Foi o grupo Bourbaki que trouxe o formalismo - corrente da filosofia da matemática - para a educação matemática.

Como tenho defendido, esse modo de fazer álgebra que surgiu a partir do século XVII é tão diferente e avançado que alguns consideram ser uma nova álgebra, como defende Baumgart (1992) que divide a álgebra em duas fases. O desenvolvimento da álgebra dado a partir do estudo sobre equações também originou a criação e o estudo de novos conjuntos numéricos, pois mesmo o desenvolvimento da álgebra abstrata dos últimos dois séculos só foi possível devido aos desenvolvimentos e caracterização das propriedades existentes nas equações algébricas. O próprio conceito de função nasce a partir das equações algébricas, sendo as primeiras funções, as polinomiais.

Mas em seu *automovimento* a matemática deu possibilidades cada vez mais amplas, sendo a causa principal a formulação de uma linguagem simbólica que permitiu se estudar a álgebra como uma linguagem em si. Hoje a álgebra é considerada um ramo da matemática juntamente com a aritmética, geometria, topologia e análise, e considera-se que a álgebra estuda as equações, as estruturas algébricas - na sua versão mais simples se traduzem nas expressões algébricas, com o estudo dos polinômios -, e as funções.

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

3 A GRAMÁTICA DA ÁLGEBRA NA HISTÓRIA

Ludwig Wittgenstein foi um filósofo austríaco que viveu na primeira metade do século XX e foi um dos principais pensadores do movimento denominado virada inguística. "Antes desse movimento, a linguagem era tomada como apenas uma ferramenta para se estar no mundo, não como constituinte deste" (MOREIRA e PINTO, 2021, p. 6). A virada linguística permitiu um olhar mais atento para a linguagem. Influenciado por seus orientadores, Bertrand Russel e Gottlob Frege, Wittgenstein entendeu que a linguagem teria uma lógica que a ligava ao mundo. Mas Wittgesntein abandona essa concepção e constrói uma segunda filosofia, que constinua enfatizando o papel da linguagem, contudo "não mais a busca por expressões logicamente claras e exatas, mas, justamente, o olhar para como a linguagem ocorre em seus ambientes comuns e ordinários" (MOREIRA e PINTO, 2021, p. 7).

O filósofo passa a entender a linguagem como linguagens ou jogos de linguagem, e é a partir da ideia de jogo que Wittgenstein constrói sua segunda filosofia. De onde tira que as linguagens são como jogos que possuem regras e que tem seus sentidos no próprio uso. A peça "cavalo" do xadrez não tem seu significado na figura do cavalo, mas no uso que se faz dela (o movimento em L). Nesse sentido, a algébra pode ser compreendida como um jogo de linguagem que possui uma gramática, isto é, um conjunto de regras, que se construiu na história, nos usos que foram sendo realizados e nas regras que foram sendo aceitas.

É importante entender como Wittgenstein concebia a matemática. Para demonstrar, tomo Margutti Pinto (2016) que destaca duas caraterísticas de uma filosofia da matemática de Wittgenstein. A primeira se alia aos intuicionistas e se opõe aos realistas, ao entender que a matemática é construída e não descoberta, e assim, os objetos matemáticos não estão em outro mundo, ideal ou mental. A segunda caraterística se opõe tanto a intuicionistas quanto realistas, e afirma que "as inferências matemáticas são contingentes, refletindo a maneira pela qual nossa cultura as concebe e efetua" (MARGUTTI PINTO, 2016, p. 608). Nesse sentido, o autor entende que os fundamentos matemáticos devem ser buscados em nossas formas de vida.

Para Wittgenstein as proposições matemáticas não são descobertas, são convenções, são criações humanas. As proposições matemáticas são proposições gramaticais ou normativas. Ao mesmo tempo que o filósofo afirma que a matemática se fundamenta nas práticas humanas, Wittgenstein estabelece diferenças entre a matemática e suas aplicações, já que essa disciplina se constitui como um campo próprio, autônomo e independente. Com a noção de proposições gramaticais, o filósofo mantém o estatuto de verdade da matemática independente de sua

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

confirmação na realidade. Ele também derruba a tese de que haveria um pano de fundo comum escondido por trás de todos os conhecimentos. Essa ideia de algo em comum, uma essência, entre os conceitos e conteúdos se remete à concepção essencialista do conhecimento, que Wittgenstein via como uma caraterística da filosofia tradicional, criticada por ele.

De acordo com Frascolla (2004), para Wittgenstein, a tarefa principal de preencher o buraco deixado pelo fim dessa tese é confiado ao acordo quase unânime entre os membros da comunidade ligados pelas inclinações partilhadas e um treino uniforme. Portanto, a partir do acordo de uma sociedade quanto ao que se considera que tenha sentido, o treino dará às gerações posteriores a continuidade e desenvolvimento, a partir da gramática definida, como o que tem sentido ou não. Frascolla (2004), apoiado em Wittgenstein, afirma que os matemáticos não são descobridores de verdades eternas concernentes a um domínio de entidades situadas fora do espaço e do tempo, contudo, pode-se afirmar que são inventores de novas significações para nossas expressões, inventores de novas regiões da estrutura conceitual por trás da linguagem da comunidade. A construção dessas estruturas não tem outro fundamento que o acordo da comunidade para atribuir um papel paradigmático às configurações dos signos construídos pelos matemáticos.

Schmitz (1988) compreende que um cálculo é apenas um jogo que nada no mundo justifica, que um jogo é apenas inventado, pois não tem nenhuma realidade antecipadamente dada, ou seja, a justificativa do cálculo seria dada pela sociedade, o que deixa de ser justificativa, mas sim aplicação. O autor considera que a metáfora do jogo tem o mérito de destacar que poderíamos talvez compreender o que é do cálculo matemático sem recurso a metafísicas perigosas e pouco seguras. Ao tratar da aritmética Wittgenstein nos diz que:

> Temos sempre aversão a dar à aritmética um fundamento, dizendo algo a respeito de sua aplicação. Ela parece firmemente fundamentada em si mesma. E isso, naturalmente, deriva do fato de que a aritmética é sua própria aplicação (WITTGENSTEIN, 2003, p. 15).

As construções da aritmética são autônomas e garantem sua aplicabilidade. Já que é possível fazer essa afirmação acerca da artimética, podemos esperar muito mais da álgebra, que como vimos tem um desenvolvimento ainda mais desligado de uma realidade concreta direta. Muito da matemática se desenvolve por necessidades próprias, que surgem no interior da linguagem matemática, para que ela continue coerente com o próprio sistema de regras e convenções que gerou. Por isso, o movimento desse campo é autônomo, autorregulado e dessa forma se torna independente.

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

Quando falamos da criação dos números complexos, por exemplo, remetemo-nos ao próprio desenvolvimento dos conjuntos numéricos. Inicialmente teve-se a necessidade social de contar, posteriormente, desenvolveu-se símbolos para representar quantidades e, então, criou-se o conjunto dos números inteiros porque antes havia criado o conjunto dos números naturais. A criação dos números inteiros surge de uma necessidade criada a partir da existência dos naturais, ou seja, criamos outros conjuntos por necessidades conceituais e teóricas e com os instrumentos que se possui na época, como defende Margutti Pinto (2016, p. 607), “Os teoremas matemáticos são construídos a partir dos materiais disponíveis num dado momento histórico”. Pensa-se claramente em adições de quaisquer números naturais, mas subtrações, apenas de naturais maiores por menores e não o contrário. A ideia de subtrair um número natural menor por um maior precisava de um novo sistema que abarcasse tal possibilidade e sua sistematização só foi possibilitada pela criação de um novo conjunto e, principalmente, da aceitação de tal, pois como já vimos, mesmo os números negativos foram rejeitados por algum tempo. Assim, como a ideia de fração e o problema posterior dos incomensuráveis, que deu origem aos números irracionais e ao problema de raízes de índice par de números negativos, que originou os números complexos.

Moreno (2003, p. 125), ao abordar a linguagem de modo geral, revela que “as novas regras gramaticais irão recuperar toda necessidade e evidência perdidas ao substituírem as velhas gramáticas, de tal maneira que sua autonomia e independência sempre estarão presentes com as novas ideias de necessidade e evidência”. Sobre a criação dos complexos, Granger (2002, p. 53) revela que:

> O encontro do irracional como obstáculo e a história de sua resolução, com efeito, são particularmente significativos no caso dos números chamados “imaginários”. De início denominados “impossíveis”, eles se apresentam como resultados de operações algébricas, impossíveis com efeito segundo as regras anteriormente admitidas da álgebra, (...) Progressivamente, regras específicas de manipulação são implícita ou explicitamente introduzidas, e tentativas de interpretação desses novos objetos se sucedem com êxitos diversos. Eles só são definitiva e oficialmente integrados no século XIX – por Gauss – num universo de novos números chamados “complexos”.

Os complexos eram entidades que ainda não existiam na linguagem matemática. Nesse sentido, abordando a integração de novas entidades à linguagem, Moreno (2003, p. 118) nos diz que:

> Se tais entidades não puderem sequer ser consideradas como casos-limite, mas, como casos imprevistos para os quais não temos conceitos, será preciso que novas formas de vida venham a integrá-las à linguagem criando conceitos novos, introduzindo

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

> critérios para sua identificação, ou melhor, construindo novos sentidos de objetos. A criação de novos usos e de novos conceitos não será uma função das entidades, mas das formas de vida, de suas convenções.

Falamos no tópico anterior do impulso provocado pela criação dos números complexos e como isso provocou um avanço no desenvolvimento da álgebra até chegar aos quaternions de Hamilton. Uma álgebra muito avançada que a princípio estava limitada a um campo teórico próprio da matemática pura, e que foi essencial no desenvolvimento da mecânica quântica. Essa criação de acordo com Boyer (1996), demonstrou a ampla liberdade que há na matemática em se construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pelas ditas “leis fundamentais”. Como também mostrei, esse desenvolvimento da álgebra colaborou no desenvolvimento da computação moderna, e se aplica ainda em probabilidades, teoria da informação, análise, problemas de seguros etc. (MILIES, 2004).

É interessante que o matemático Grassmann criou uma teoria até mais geral que a de Hamilton, porém, ela não foi tão divulgada ou aceita pela comunidade matemática, talvez até por ser uma linguagem de difícil compreensão na época, e só foi ser reconhecida no uso que Einstein fez dela na Teoria da Relatividade. Isso demonstra a liberdade de criação, onde o que prevalece é o consenso. Ao se derrubar alguns axiomas, como que AB = BA, como fez Hamilton, muitos sistemas passaram a ser permitidos, onde eles devem ser correntes no sistema em si, e assim, “Nas concepções modernas da matemática, empregam-se definições com o objetivo de aumentar o poder dedutivo dos sistemas. Podemos ter várias definições, todas igualmente legítimas, contanto que preservem a verdade dos teoremas e a falsidade das sentenças falsas” (GOTTSCHALK, 2002, p. 47).

Fazendo uma comparação com a derrubada da universalidade da geometria euclidiana, é como se passássemos a ter *álgebras não-euclidianas* ou seria *não-diofantinas* ou *não-vietianas*. Nesse sentido, vale destacar que a álgebra, diferentemente da geometria não partiu de axiomas pré-estabelecidos em sua construção histórica, mas sim, como temos visto, a álgebra se deu por manipulações simbólicas próprias, possibilitadas pelas mudanças de simbologias. Os axiomas vieram a ser formulados *a posteriori*. Eves (2004) revela que já foram estudadas mais de duas centenas de estruturas algébricas. Elas não partem da realidade, mas podem ser usadas para colaborar em outras ciências, como na Física, como em alguns exemplos já dados, genética, sociologia, estatística, engenharia e na lógica computacional, como é o caso da álgebra booleana, bem como, colaboram também com a própria matemática, como os quaternions de Hamilton, que permitiram um desenvolvimento interno da matemática.

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

Moreno (2005), a partir da noção de arbitrariedade da gramática, e do seu aspecto de atividade simbólica, conclui que ela não depende de causas extralinguísticas, sendo, portanto, autônoma. *A partir de sua formação, o objeto simbólico ganha vida própria.* Por exemplo, objetos geométricos euclidianos nasceram na Grécia antiga, mas tiveram aplicações em outros contextos sociais e épocas, porque os símbolos ganham um aspecto linguístico e conceitual, que é explorado em processos pragmáticos, que instauram e esclarecem regras de aplicação. Tal aspecto linguístico e conceitual é a gramática dos usos das palavras, ou seja, os símbolos ganham significado devido ao seu uso e o seu uso passa a definir o seu significado, e assim passa-se a usar os símbolos para explicar fatos do mundo, como no caso dos objetos geométricos euclidianos. Tais objetos foram retirados e arbitrariamente definidos a partir de percepções da realidade e se passou a usar esses objetos para perceber o mundo a nossa volta (retas, círculos, quadrados etc.), mas estes objetos não existem de fato, enxergamo-los a partir do que a linguagem – os símbolos – nos fazem/permitem enxergar.

Castañeda (2002, p. 64) entende que "É possível ampliar o conceito de 'arbitrariedade' referente às regras da linguagem estendendo-lhe para sua relação frente a qualquer realidade"[4], o que significa que assim como se pode dizer que as regras, por serem arbitrárias (não foram forjadas da realidade) não se referem a nenhuma realidade, podemos afirmar que elas se referem a qualquer outra. Por exemplo, a álgebra atual, seria algo que poderia se relacionar a qualquer realidade.

Para compreender essa questão, e até afastar de alguma aproximação ao estruturalismo, Moreno (2005) nos oferece um exemplo: compare a *descrição estrutural de um quadro épico* com a *descrição gramatical da expressão épica do quadro*. No primeiro caso, há relações entre cores, volumes e linhas que exprimem o sentido do quadro e no segundo é um sentido convencional que permite organizar os materiais do quadro e que o tornam significativo, ou seja, a descrição gramatical mostra como vemos e usamos as palavras. A descrição não está no fato em si, entretanto, na gramática, pois, é ela que decide como veremos e usaremos as palavras, isto é, como pensaremos sobre determinada situação. Assim nos conduzimos à ideia de que a compreensão do sentido é obtida no interior do próprio simbolismo, devido a sua autonomia e arbitrariedade (MORENO, 2005).

Moreno (2005) adverte que a filosofia de Wittgenstein, mesmo quando destaca o aspecto simbólico, nega a superioridade do pensamento formal, ainda que seja um dos produtos mais

[4] "Es posible ampliar el concepto de 'arbitrariedad' referido a las reglas de lenguaje extendiéndolo a su relación frente a cualquier realidad".

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

bem acabados das construções humanas, ele deve ser situado na linguagem ordinária. A descrição gramatical nos leva a entender que as ligações internas presentes nos jogos de linguagens formais são tão arbitrárias e autônomas quanto aos presentes nos jogos de linguagens não-formalizáveis (MORENO, 2005). Portanto, mesmo tendo alguma relação com a empiria, ou seja, razões empíricas, não há, no entanto, fundamentos empíricos (GOTTSCHALK, 2014) -, são elementos linguísticos, que sendo assim entendidos perdem a necessidade de justificativas externas à linguagem. A álgebra, ao contrário da geometria e aritmética, parece ainda mais afastada, mesmo que aquela seja considerada generalização dessas, quando se tornou linguagem, ganhou certa autonomia, e os campos de aplicação puderam se ampliar, de acordo com as necessidades e convenções. Depois de entrar em consenso, pode em uma ou outra situação encontrar alguma aplicação prática para empregar os números complexos. Enfim, a matemática responde a questões empíricas, mas não é dependente delas.

> A história social da matemática se distingue de outra história, digamos, *transcendental* da matemática, história das renovadas condições de possibilidade dos conceitos. Estas condições são de natureza convencional que até podem ser eventualmente alteradas a partir de razões empíricas, como interesses sociais ou políticos; o que leva, todavia, a estas modificações, são obstáculos de natureza epistemológica, ou seja, são razões *internas* a este conhecimento que obrigam os matemáticos a reverem determinados postulados, axiomas ou procedimentos (GOTTSCHALK, 2009, p. 10).

Gottschalk (2009) oferece o exemplo da resolução do problema da continuidade da reta que foi abordado simultaneamente por Dedekind e Cantor, que a autora define como “qualquer que seja o corte de uma reta em duas partes, existe sempre um ponto da reta que separa as duas partes”. Esse grande avanço do conhecimento matemático não foi baseado em nenhuma demonstração, apenas sugeriu outro modo de ver a continuidade da reta. Não há como justificar à exaustão os conceitos matemáticos, pois, por serem convencionais, não têm um fundamento último, que não seja definido como arbitrário, relacionada às nossas formas de vida. “[...] o matemático também convive com paradoxos e contradições que o obrigam a *inventar* novos objetos e a formular novas teorias matemáticas, abrindo, assim, novos campos de investigação, e *criando* novas condições de sentido para organizar o mundo empírico” (GOTTSCHALK, 2009, p. 13)

Wittgenstein (2014) coloca as regras como em catálogos e diz que há duas maneiras de vermos, ou como um catálogo de regras determinado, como é o caso das regras do jogo de xadrez, ou como catálogo variável de regras, como a álgebra, que é um substrato de um processo

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

histórico. Em uma concepção essencialista, já citado na página 13, criticada por Wittgenstein, a matemática seria completa, e necessitaria ter suas partes descobertas, ou seja, ela seria extensionalista, pois se estenderia, a partir das novas descobertas, no entanto, Wittgenstein a toma como *intensionalista*, e não compreende o desenvolvimento matemático como um processo, e sim, como a passagem de um sistema matemático a outro, e assim, cada sistema é em si mesmo completo e distinto dos sistemas anteriores, onde ao introduzirmos novas regras, mudamos o significado de antigos sinais.

Se as regras são arbitrárias e, portanto, não há justificativas, então, como podemos em mudança ou transformação da linguagem nesse sentido? Castañeda (2002) compreende que há linguagens que permitem como parte de suas regras a introdução de novas, ou que devido a complexidades, permitem o que ele chama de “esclarecimentos gramaticais”, que surgem no uso. Isso nos remete à matemática e suas necessidades internas, e nos permite aprofundar ainda mais sobre a possibilidade de mudança na linguagem, mesmo a considerando arbitrária. A aritmética já dizia tudo o que tinha a dizer, não se mudou para tentar melhorar tal sistema, criaram-se novos sistemas, sob novos axiomas, e que não pode se alterar por si mesma, pois depende da ação dos usuários de tal linguagem.

Por isso concordamos com Granger (2013), para quem as regras de cálculo são reguladoras, diferente das regras de formação, que são estruturais. Esse autor entende que os sistemas simbólicos nas ciências exatas, por exemplo, são compreendidos tanto como meio de comunicação do pensamento quanto aspecto essencial do próprio pensamento, sendo tanto instrumentos quanto o próprio conteúdo. Como a matemática é um sistema simbólico ela não é apenas um instrumento, uma linguagem de referência, ela é um conteúdo em si e assim tem “vida própria”, ou seja, é autônoma. Granger (2013) defende que a matemática necessita de um simbolismo formal para o seu desenvolvimento, não só por ser indispensável na sua prática, como também condição de progresso e isso será exemplificado com a história dos números e do cálculo diferencial e integral. Para o autor há uma linguagem da matemática, logo, a matemática não se reduz a uma linguagem, porém é usada como uma linguagem por outras ciências. Nesse sentido, a matemática não trata de comunicação, mas de expressão, e desse modo ela não é apenas uma referência a um determinado conhecimento, do qual serviria como mero meio de comunicação, sendo entendida como criadora de símbolos de objetos de pensamento, ou seja, é a expressão para as estruturas que são propostas como modelos abstratos dos fenômenos.

Granger (2013), baseado em Husserl, nos apresenta uma diferença entre a generalização

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

e a formalização. A primeira constrói noções tiradas da experiência e a segunda propõe conceitos que são inspirados na experiência e que lhe seriam eventualmente aplicáveis, mas que não são tirados dela por uma indução. Para o autor o trabalho de conceituação se manifesta pelo desenvolvimento e pela manipulação de sistemas simbólicos que realizam a correlação efetiva de uma matéria e de uma forma, que é a dualidade operação/objeto. Essa dualidade é a relação de correspondência entre dois registros de entidades de pensamento. Assim, para o autor, qualquer pensamento que se desdobra em um sistema simbólico e visa descrever um “mundo” repousa sobre a dualidade entre um sistema de objetos e um sistema de operações e essa dualidade é o que torna possível qualquer pensamento simbólico, onde os símbolos deixam de ser apenas impressões, e colaboram na construção de uma combinatória.

Nesse sentido, Granger (2013) argumenta que signos têm função de representação que torna possível manipulações dentro de sistemas, e claro, assim eles só têm sentido dentro de respectivos sistemas. Para o autor, apenas merecerá o nome de lógica o cálculo das proposições, para o qual a perfeita adequação do operativo e do objetal se manifesta pelas metapropriedades de não contradição, de completude e de solvibilidade. É aqui que para Granger (2013) começa a matemática com seus objetos específicos, pois são novas relações que se instituem com o simbolismo, pelo fato de aparecerem conteúdos de objetos, conteúdos formais ou conteúdos empíricos.

A partir destas observações de Granger (2013), percebemos que a matemática assume uma posição de sistema simbólico formal por excelência, o ápice do desenvolvimento. Nesse caso, ela não é um fundamento, o *a priori*, no sentido metafísico, contudo, será considerada como no sentido de um *a priori* linguístico. O desenvolvimento da matemática e da humanidade nos últimos dois séculos se deve bastante pelo desenvolvimento da álgebra, ou melhor, do simbolismo algébrico. Nesse sentido, uma filosofia mais voltada para a linguagem a partir do século XIX colaborou nesse desenvolvimento ou, ao contrário, recebeu colaboração.

4 CONSIDERAÇÕES

Compreendemos muitas coisas hoje por meio de fórmulas, que se desenvolveram devido ao aspecto lógico percebido na matemática, e apresentado pelas expressões algébricas. A álgebra representa o mundo falado a partir de outros símbolos. Muitos compreendem a álgebra como uma metamatemática. A álgebra se desenvolveu como uma particularidade na matemática, e que ao mesmo tempo possibilitou um desenvolvimento de todo o restante desta,

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

por se tratar de uma linguagem que permite uma abstração maior ainda, onde símbolos tratam de referentes matemáticos como os números e certos conceitos, como incógnita e variável, e apresentando uma sintaxe própria, isto é, uma forma de manipular os símbolos que seguem determinadas regras, o que leva seu usuário a dominar certas técnicas de uma nova linguagem.

A álgebra deve algo de seu desenvolvimento, tanto às necessidades empíricas, quanto sua relação com a aritmética, mas seu progresso se deve a estudos que eram completamente internos à matemática, numa espécie de estudo de uma linguagem, na intenção de buscar melhorá-la (como vimos na evolução da linguagem retórica, para a sincopada e enfim para a simbólica), e que culmina, em um automovimento. Os matemáticos criaram regras que, mesmo quando originadas no empírico, em um dado momento não dependiam mais dele, o que nos permite entender a álgebra como uma gramática, no sentido wittgensteiniano, possuindo as características de arbitrariedade e autonomia, indicadas por esse filósofo. Concluímos que a álgebra é arbitrária, pois poderia surgir a partir de qualquer outro sistema (empiria, aritmética ou geometria), e é autônoma, pois, a partir da formação de seu sistema simbólico e consenso entre a comunidade, a linguagem algébrica ganha *vida própria*, ficando independente de fatores extralinguísticos.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. SBM, 1984.

BAUMGART, John K. **História da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; vol. 4)

BOYER, Carl. **História da matemática**. Revista por Uta MarzBach; Tradução de Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CASTAÑEDA, Felipe. Arbitrariedade y posbilidad de alteracion del enguajes em Witigenstein. **Ideas y valores**, n° 118, Bogotá, abril de 2002. Disponível em: https://revistas.unal.edu.co/index.php/idval/article/view/16342/17270. Acesso em: 15 jun. 2021.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DUARTE, Aparecida. **Matemática e educação matemática: a dinâmica de suas relações ao tempo do movimento da matemática moderna no Brasil**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11261. Acesso em: 15 jun. 2021.

ENGELMANN, Mauro. As Filosofias da matemática de Wittgenstein: Intensionalismo sistêmico e a aplicação de um novo método (sobre o desenvolvimento da filosofia da

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

matemática de Wittgenstein). **doispontos**, Curitiba, São Carlos, vol. 6, n. 2, p.165-184, outubro, 2009. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/doispontos/article/download/14929/11399 . Acesso em: 15 jun. 2021.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, Editora Unicamp, 2004

FRASCOLLA, P. Wittgenstein sur la preuve mathématique. In: FLOYD, J. et al. **Wittgenstein et les mathématiques**. Paris: T. E. R., 2004, p. 43-60.

GOTTSCHALK, Cristiane. **Uma reflexão filosófica sobre a matemática nos PCN**. 154 f. Tese (Doutorado em filosofia da Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

GOTTSCHALK, Cristiane. **O sentido formativo da matemática**. São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da USP, 2009 (Publicações do Instituto de Estudos Avançados da USP). Disponível em: http://www.iea.usp.br/publicacoes/textos/sentidoformativomatematica.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

GOTTSCHALK, Cristiane. Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar. **International Studies on Law and Education**, v. 18, p. 73-82, 2014.

GRANGER, Gilles-Gaston. **O irracional**. Trad. De Alvaro Lorencini. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia, linguagem, ciência.** São Paulo: Ideias & Letras, 2013.

MARGUTTI PINTO, Paulo Roberto. Aspectos da história do número π na perspectiva duma filosofia da matemática de inspiração wittgensteiniana. **Sapere aude** – Belo Horizonte, v. 7 – n. 14, p. 605-626, Jul./Dez. 2016.

MILIES, César Polcino. **Breve história da álgebra abstrata**. Minicurso da II Bienal da SBM, 2004. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

MOREIRA, Person Gouveia dos Santos; PINTO, Thiago Pedro. Jogos de Linguagem e Geometria Euclidiana Plana: Uma Terapia Wittgensteiniana. **REAMEC –Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, v. 9, n. 1, e21021, janeiro-abril, 2021. http://dx.doi.org/10.26571/reamec.v9i1.11143

MORENO, Arley. Descrição fenomenológica e descrição gramatical: idéias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar**, UFSCar, v. IV, n.7, p. 94-139, 2003. Disponível em: http://www.ufscar.br/~revistaolhar/pdf/olhar7/descricao.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

MORENO, Arley. **Introdução a uma pragmática filosófica**: de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas, São Paulo. Editora da UNICAMP, 2005.

PIEROBON, Frank. **Kant et les mathématiques**. La conception kantienne des mathématiques, Paris, Vrin, 2003.

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

PONTE, J.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PRATT, G. V. **História da álgebra**. In: Tópicos de história da matemática: para uso em sala de aula. Trad. Hygino H. Domingues. 1ª Ed. São Paulo. Atual, 1993.

SCHMITZ, François. **Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques**. Paris: PUF, 1988.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemática**s. Gradiva. Lisboa: 1989

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus logico-philosophicus (TLP).** São Paulo: Edusp, 1993.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Gramática Filosófica (GF).** São Paulo: Edições Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **The Big Typescript - Escrito a máquina (BT)**. Madrid: Editorial Trotta, 2014.

APÊNDICE 1

AGRADECIMENTOS
“Não se aplica.”

FINANCIAMENTO
“Não se aplica.”

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA
Resumo/Abstract/Resumen: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Introdução: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Referencial teórico: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Análise de dados: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Discussão dos resultados: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Conclusão e considerações finais: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Referências: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Revisão do manuscrito: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
Aprovação da versão final publicada: Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior

CONFLITOS DE INTERESSE
O autor declara não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmico, político e financeiro referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados da pesquisa foi publicado no próprio artigo.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
“Não se aplica.”

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
“Não se aplica.”

COMO CITAR - ABNT
TEIXEIRA JUNIOR, Valdomiro Pinheiro. Uma reflexão sobre a história da álgebra a partir da filosofia de Wittgenstein. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 9, n. 3, *e*21076, set./dez., 2021. https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ISSN: 2318-6674
https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

COMO CITAR - APA

Teixeira Junior, V. P. (2021). Uma reflexão sobre a história da álgebra a partir da filosofia de Wittgenstein. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *9*(3), *e*21076. https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

PUBLISHER

Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no Portal de Periódicos UFMT. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da referida universidade.

EDITOR

Dailson Evangelista Costa

HISTÓRICO

Submetido: 15 de junho de 2021.
Aprovado: 24 de agosto de 2021.
Publicado: 17 de setembro de 2021.