Artículo científico

Las fracciones: conocimiento del profesorado y su contribución en la enseñanza para el estudiantado de cuarto grado en escuelas chilenas

Innovaciones Educativas

Rodríguez Rojas, Palmenia

Palmenia Rodríguez Rojas
prodriguez@userena.cl
Universidad de La Serena, Chile

Revista Innovaciones Educativas
Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica
ISSN: 1022-9825
ISSN-e: 2215-4132
Periodicidad: Semestral
vol. 25, núm. 38, 2023
innoveducativas@uned.ac.cr

Recepción: 09 Agosto 2022
Corregido: 07 Diciembre 2022
Aprobación: 09 Diciembre 2022

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/428/4283773008/

Resumen: Las fracciones son un tema matemático complejo, difícil de aprender y de enseñar. Estudios previos sugieren que el aprendizaje del estudiantado puede verse limitado por la comprensión que tiene el profesorado en fracciones. El objetivo de este estudio es examinar en qué medida el conocimiento del profesorado en asociación con el nivel socioeconómico, los conocimientos previos del alumnado y el nivel de conocimientos en matemáticas obtenido en las escuelas contribuye al logro de aprendizaje del alumnado en fracciones. Mediante una metodología cuantitativa, siendo los instrumentos del estudio pruebas estructuradas con preguntas cerradas aplicadas a 714 personas estudiantes de cuarto grado y a 23 personas docentes de 23 escuelas chilenas. Los datos se analizan utilizando modelos multinivel. Los resultados muestran que de la variabilidad observada en la conceptualización de las fracciones, el 76% se podría atribuir a las variables de nivel del alumnado; mientras que el 24% restante, a las variables de nivel de la escuela. La varianza entre escuelas estaría explicada en un 26% por el conocimiento del profesorado y en un 8% por el nivel socioeconómico. Lo quiere decir que el conocimiento del profesorado, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 6% de la variabilidad total del avance del alumnado, con una significación al 5%. El nivel de conocimientos matemáticos observado en las escuelas no se muestra significativo. En conclusión, en el presente estudio se reporta que el conocimiento del profesorado contribuye en el logro de aprendizaje del alumnado además del efecto del nivel socioeconómico.

Palabras clave: profesorado de primaria, enseñanza de las matemáticas, aprendizaje, educación, matemáticas.

Abstract: Fractions are a complex mathematical subject, difficult to learn and to teach. Previous studies suggest that student learning may be limited by teachers' understanding of fractions. The objective of this study is to examine the extent to which teachers' knowledge in association with socioeconomic status, students' prior knowledge, and the level of mathematics knowledge obtained in schools contributes to students' learning achievement in fractions. Using a quantitative methodology, the study instruments were structured tests with closed questions applied to 714 fourth grade students and 23 teachers from 23 Chilean schools. The data are analyzed using multilevel models. The results show that of the variability observed in the conceptualization of fractions, 76% could be attributed to student level variables, while the remaining 24% could be attributed to school level variables. The variance between schools could be explained 26% by teacher knowledge and 8% by socioeconomic level. This means that teacher knowledge, alone or in combination with other factors, explains about 6% of the total variability in student progress, with a significance of 5%. The level of mathematical knowledge observed in the schools is not significant. In conclusion, the present study reports that teacher knowledge contributes to student learning achievement in addition to the effect of socioeconomic level.

Keywords: Primary school teachers, math teaching, learning, education, mathematics.

Resumo: As frações são uma matéria matemática complexa, difícil de aprender e de ensinar. Estudos anteriores sugerem que o aprendizado dos alunos pode ser limitado pela compreensão das frações por parte dos professores. O objetivo deste estudo é examinar até que ponto o conhecimento dos professores em associação com o status socioeconômico, o conhecimento prévio dos alunos e o nível de alfabetização matemática alcançado nas escolas contribui para o sucesso do aprendizado dos alunos em frações. Usando uma metodologia quantitativa, os instrumentos de estudo são testes estruturados com perguntas fechadas aplicadas a 714 alunos da quarta série e 23 professores de 23 escolas chilenas. Os dados são analisados utilizando modelos multiníveis. Os resultados mostram que 76% da variabilidade observada na conceituação das frações poderia ser atribuída a variáveis de nível estudantil, enquanto os 24% restantes poderiam ser atribuídos a variáveis de nível escolar. A variação entre as escolas é explicada em 26% pelo conhecimento dos professores e 8% pelo status sócio-econômico. Isto significa que o conhecimento do professor, sozinho ou em combinação com outros fatores, explica cerca de 6% da variação total no progresso dos alunos, com significância de 5%. O nível de conhecimento matemático observado nas escolas não é significativo. Em conclusão, o presente estudo relata que o conhecimento dos professores contribui para a realização do aprendizado dos alunos, além do efeito do status sócio-econômico.

Palavras-chave: professor de escola primária, ensino de matemática, aprendizagem, educação, matemática.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que examinan la contribución de diversas variables escolares asociadas al aprendizaje del estudiantado provienen de los estudios que se abocan a la función de producción educacional (Varas et al., 2013). A partir de la publicación del informe Coleman (Coleman et al., 1966) de los Estados Unidos, estos estudios dieron un salto cualitativo. En el informe se revela el escaso peso atribuido a las variables escolares en la explicación de las desigualdades halladas (explicaban menos del 10% de la varianza) y la gran importancia del origen social para el rendimiento estudiantil (Álvarez y Martínez, 2016). Sin embargo, el informe dejó algunas preguntas abiertas: ¿estos hallazgos son replicables a otros países?, ¿según el grado de desarrollo del país, la escuela impactará de manera diferente?

Heyneman y Loxley (1982) dan respuesta a estas preguntas presentando los resultados de un estudio internacional en el cual participaron 18 países, algunos de ellos de bajo ingreso per cápita, tales como Chile, Irán, India y Tailandia. Los resultados revelan que en los países de bajos ingresos el porcentaje de varianza explicada por las variables escolares es dos a tres veces más que el que se encuentra en los países de altos ingresos, y que cuanto más pobre es el país en términos económicos mayor es el impacto de la calidad de la escuela y del profesorado en el rendimiento escolar. Con base en este hallazgo, ellos concluyen que hay evidencia suficiente para mostrar que el impacto de la calidad de la escuela y del profesorado es mayor en los países de bajos ingresos. Surge entonces una pregunta importante: ¿Qué conocimientos requiere el profesorado para que su enseñanza sea efectiva?

Shulman (1986) es pionero en clasificar el conocimiento que el profesorado necesita para que su práctica profesional sea efectiva, a saber: Conocimiento del Contenido (CC), Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) y conocimiento curricular. Él identifica el CC como la cantidad y la organización del conocimiento del contenido per se en la mente del profesorado. El CPC implica la comprensión de cómo representar el contenido de manera adecuada para que el estudiantado lo comprenda. El trabajo de Shulman (1986) atrajo la atención de los investigadores y los condujo a especificar y a esclarecer aún más el CC y el CPC. En el campo de la educación matemática, Ball et al. (2008) introdujeron el constructo conocimiento matemático para la enseñanza y describieron varios componentes asociados al CC: conocimiento común del contenido, conocimiento del horizonte matemático y conocimiento especializado del contenido. Contribuyendo a precisar este constructo, Hill et al. (2008) describieron componentes asociados al CPC de Shulman: conocimiento de la enseñanza del contenido, conocimiento del currículo y conocimiento del estudiantado y el contenido matemático.

Algunos investigadores han elaborado instrumentos válidos y confiables para medir el CC y el CPC con la finalidad de estimar el efecto que tiene el conocimiento del profesorado en el aprendizaje del estudiantado. Hill et al. (2005) fueron pioneros en mostrar que el CC y el CPC inciden en el rendimiento en matemáticas. En el estudio participan personas estudiantes de primer grado y de tercer grado y el profesorado en escuelas de los Estados Unidos. Las pruebas administradas al estudiantado incluyen preguntas acerca de números, operaciones o pre-álgebra y álgebra. Las pruebas aplicadas al profesorado incluyeron preguntas relativas a números, operaciones y geometría. Posteriormente, otros investigadores han reportado resultados similares (Baumert et al., 2010; Kelcey et al., 2019; Tchoshanov et al., 2017; Yang et al., 2020). Sin embargo, en países en desarrollo faltan estudios que estimen en qué medida el CC y el CPC contribuyen al logro de aprendizaje del alumnado (Cueto et al., 2017). Además, estos estudios no se centran en el tema de las fracciones. Analizar un tema en profundidad puede permitir detectar las debilidades y fortalezas que manifiestan tanto el profesorado como el estudiantado.

El tema de las fracciones es un componente crítico en el plan de estudios de matemáticas en las escuelas primarias y secundarias de todo el mundo. El conocimiento de las fracciones predice el aprendizaje del álgebra y, por lo tanto, sienta las bases para la adquisición de conceptos más avanzados (Azid et al., 2020; Barbieri et al., 2021; Braithwaite y Siegler, 2021; Soni y Okamoto, 2020; Stelzer et al., 2021; Zhang et al., 2021). Sin embargo, numerosas investigaciones han informado que la fracción es una de las nociones matemáticas más difíciles de entender por el estudiantado (Deringöl, 2019; Lenz et al., 2019; Xu et al., 2022).

El concepto de fracción es complejo porque no comprende un solo constructo sino varios subconstructos, tales como parte-todo, operador, cociente, razón y medida (Jiang et al., 2020). Por ejemplo, 3/4 se puede concebir como parte-todo (tres de cuatro partes iguales de un todo), como una medida (una suma de tres unidades de medida 1/4), como una razón (tres es a cuatro), como cociente (tres dividido por cuatro) y como operador (3/4 de una cantidad). Kieren (1976) fue el primero en separar el concepto de fracción en subconstructos: parte-todo, razón, operador, cociente y medida. Posteriormente, Behr et al. (1983) proponen un modelo teórico que relaciona los subconstructos parte-todo, razón, operador, cociente y medida con la equivalencia de fracciones, las operaciones de adición y multiplicación de fracciones y con la resolución de problemas.

Sustentados en los trabajos de Kieren (1976) y Behr et al. (1983), diversos investigadores han examinado las dificultades que presenta el alumnado en fracciones. Los estudios revelan que las personas estudiantes obtienen mejores resultados en tareas relativas al subconstructo parte-todo y desarrollan poco conocimiento en los otros subconstructos (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Ramadianti et al., 2019; Wijaya, 2017). La comprensión del subconstructo medida resulta ser más difícil (Jiang et al., 2020).

Por otro lado, hay investigaciones que muestran que el profesorado en formación y en servicio presentan una comprensión limitada de las fracciones (Avcu, 2019; Copur-Gencturk, 2021; Reeder y Utley, 2017; Van Steenbrugge et al., 2014). Una persona docente que comprende un tema matemático puede ser capaz de brindar una instrucción de alta calidad, pero si no comprende el tema es casi seguro que no realizará una instrucción de calidad (Siegler y Lortie-Forgues, 2017). En consecuencia, resulta pertinente estudiar la contribución del conocimiento del profesorado en el aprendizaje del alumnado en fracciones.

Para efecto de este trabajo, el conocimiento de las fracciones forma parte del CC del profesorado de primaria y se define como un conocimiento conceptual y conectado en el sentido de Ma (2010), el cual involucra la comprensión de los subconstructos parte-todo, operador, cociente y medida (Behr et al., 1983; Kieren, 1976). El conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones forma parte del CPC del profesorado de primaria y se define como el conocimiento didáctico que las personas docentes tienen respecto de los errores típicos, de las dificultades y de las estrategias utilizadas por el estudiantado (Hill et al., 2008). Atendiendo a los antecedentes expuestos, este estudio tiene por objetivo examinar en qué medida el conocimiento del profesorado sobre las fracciones y su enseñanza, en asociación con las variables: conocimientos previos del estudiantado, Nivel Socioeconómico (NSE) y el nivel de conocimientos en matemáticas de la escuela medido a través de las pruebas SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación), contribuye al avance de aprendizaje del estudiantado en fracciones. Se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar la relación entre el conocimiento del profesorado, los conocimientos previos del estudiantado, el NSE, el SIMCE y el avance de aprendizaje del estudiantado en fracciones.
2. Explorar en qué medida el NSE contribuye al avance de aprendizaje del estudiantado en fracciones.
3. Explorar en qué medida el SIMCE contribuye al avance de aprendizaje del estudiantado en fracciones.
4. Examinar las dificultades que se presentan en el estudiantado y en el profesorado en fracciones.

MATERIALES Y MÉTODOS

Esta investigación fue desarrollada desde un enfoque cuantitativo con un diseño ex post facto, siendo los instrumentos del estudio pruebas estructuradas con preguntas cerradas aplicadas al estudiantado y al profesorado. En el estudio participaron 714 personas estudiantes de 4.° grado y 23 personas docentes de 23 establecimientos escolares (8 municipales y 15 subvencionados) de la conurbación de La Serena-Coquimbo; correspondiente al 15% de la población de establecimientos. Las personas docentes tienen el título de profesor o de profesora de enseñanza básica, de los cuales 22 son generalistas, lo cual quiere decir que dictan clases de todas las asignaturas incluyendo matemáticas y una de las personas docentes tiene una mención en matemáticas. Los datos fueron tomados durante el año escolar 2016 (ver Tabla 1).

TABLA 1
Tipos de escuela y alumnos por escuela

Tabla 1
Tipos de escuela y alumnos por escuela

Escuelas	Tipo	Alumnos
E1	P-Sub	28
E2	P-Sub	48
E3	P-Sub	47
E4	P-Sub	58
E5	Mun	18
E6	Mun	9
E7	Mun	26
E8	P-Sub	76
E9	P-Sub	18
E10	P-Sub	56
E11	Mun	25
E12	Mun	19
E13	P-Sub	11
E14	Mun	33
E15	P-Sub	35
E16	P-Sub	62
E17	P-Sub	16
E18	Mun	21
E19	P-Sub	30
E20	P-Sub	41
E21	P-Sub	17
E22	Mun	7
E23	P-Sub	13
Total	23	714

Los grupos se obtuvieron de un muestreo proporcional con participación voluntaria y corresponden a un grupo de escuelas que dista en ½ desviación estándar de la media poblacional ($p < .01$). Del total de personas docentes, 20 son mujeres y 3 hombres, y en promedio tienen 13 años de experiencia, con un mínimo de 2 años y un máximo de 42 años. Los 23 establecimientos de la muestra constituyen una cifra estimada como suficiente para llevar adelante el análisis estadístico. Efectivamente, Maas y Hox (2005) afirman que si se está interesado en los efectos fijos del modelo, 10 grupos de 30 individuos en el segundo nivel son suficientes para llevar adelante el estudio.

Los grupos se obtuvieron de un muestreo proporcional con participación voluntaria y corresponden a un grupo de escuelas que dista en ½ desviación estándar de la media poblacional ($p < .01$). Del total de personas docentes, 20 son mujeres y 3 hombres, y en promedio tienen 13 años de experiencia, con un mínimo de 2 años y un máximo de 42 años. Los 23 establecimientos de la muestra constituyen una cifra estimada como suficiente para llevar adelante el análisis estadístico. Efectivamente, Maas y Hox (2005) afirman que si se está interesado en los efectos fijos del modelo, 10 grupos de 30 individuos en el segundo nivel son suficientes para llevar adelante el estudio.

Para la recopilación de datos, se utilizó una prueba sobre las fracciones para el alumnado de cuarto grado que constó de 22 ítems de opción múltiple organizados de acuerdo a una matriz de especificaciones enmarcada en los contenidos curriculares (Ministerio de Educación [Mineduc], 2013) de la unidad de "Fracciones" (ver Tabla 2). La prueba se aplicó a 714 personas estudiantes al inicio del año escolar como pretest y al final del año como postest. Esta prueba fue validada por jueces expertos en el tema de didáctica de las fracciones y se aplicó a una muestra piloto de 300 estudiantes de cuarto grado. La prueba mostró una confiabilidad de ,77 según el coeficiente alfa de Cronbach.

TABLA 2
Matriz de Especificaciones Prueba para los Alumnos

Tabla 2
Matriz de Especificaciones Prueba para los Alumnos

	ítems
Conocimientos previos	6
Comprensión de las fracciones	9
Adición y sustracción de fracciones de igual denominador en contexto	3
Identificación y representación de fracciones propias y números mixtos hasta 5	4

Además se utilizó una prueba de conocimiento sobre las fracciones y su enseñanza para el profesorado que constó de 10 ítems correspondientes al conocimiento sobre las fracciones enmarcadas en los contenidos curriculares (Mineduc, 2013) y 14 ítems sobre la enseñanza de las fracciones. Esta prueba fue validada por jueces expertos en el tema de didáctica de las fracciones y se aplicó a una muestra piloto de 80 personas docentes de primaria. La prueba mostró una confiabilidad de .75 según el coeficiente alfa de Cronbach.

Además se utilizó una prueba de conocimiento sobre las fracciones y su enseñanza para el profesorado que constó de 10 ítems correspondientes al conocimiento sobre las fracciones enmarcadas en los contenidos curriculares (Mineduc, 2013) y 14 ítems sobre la enseñanza de las fracciones. Esta prueba fue validada por jueces expertos en el tema de didáctica de las fracciones y se aplicó a una muestra piloto de 80 personas docentes de primaria. La prueba mostró una confiabilidad de .75 según el coeficiente alfa de Cronbach.

En el presente estudio se consideraron las siguientes variables contextuales:

NSE: Nivel socioeconómico medio de las familias del estudiantado que anualmente rinden las pruebas SIMCE en el país. Los puntajes NSE son públicos y están disponibles en línea.

SIMCE: Puntaje promedio desde el 2012 al 2016, obtenido por la escuela en las pruebas de matemáticas anuales SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) realizadas en el país, que evalúan el logro de aprendizaje en la asignatura de matemáticas, abarcando una muestra representativa de los contenidos de tercer y cuarto grado (Mineduc, 2013). Los puntajes de la prueba SIMCE se encuentran disponibles en línea.

En la literatura, ha sido ampliamente reportado que el NSE influye en la calidad de vida del alumnado y en el contexto en que se desarrolla la actividad pedagógica. El NSE promedio del estudiantado es diferente para cada escuela, las diferencias observadas tanto en el pretest como en el postest del alumnado de distintas escuelas podrían estar explicadas en parte por las diferencias en el NSE. En Chile, se ha reportado que el estudiantado con un menor NSE obtiene puntajes SIMCE significativamente más bajos que los de mayor NSE.

Para aplicar las pruebas al estudiantado, se solicitó autorización a las personas docentes, personas directoras, apoderados y apoderadas. Las pruebas fueron aplicadas por una persona ayudante de investigación del proyecto, en las primeras horas de clases, dando 60 minutos de tiempo. La prueba aplicada al profesorado fue administrada en conjunto a todos en una sala dando 60 minutos de tiempo.

Los datos se analizan siguiendo la metodología de modelos multinivel, expuesta por Pardo et al. (2007). El análisis incluyó variables a nivel de escuela, SIMCE, NSE y C_Profesorado (Conocimiento del Profesorado), y variables a nivel del estudiantado, pretest y avance. La variable avance es la variable dependiente y se obtiene al calcular la diferencia entre el postest y el pretest. Esta variable se considera como medida de avance de aprendizaje del estudiantado de cuarto grado en el tema de las fracciones. El análisis inferencial comenzó con las asociaciones lineales entre las variables a través de la estimación de correlaciones de Pearson, a continuación se examinaron distintos modelos multinivel, en los cuales las escuelas constituyen una variable categórica que contribuye a explicar las variaciones en la variable dependiente avance. Los análisis multinivel se inician con el Modelo ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (AEA), seguidos por los Modelos Regresión con Medias como Resultado (RMR) y ANCOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (ACEA).

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El principal hallazgo de este estudio fue que el conocimiento del profesorado, solo o en combinación con otros factores, explicó alrededor del 6% de la variabilidad total del avance del alumnado, con una significación al 5%. Este resultado está en consonancia con el estudio de Hill et al. (2005), quienes encontraron que dada la gran cantidad de variabilidad dentro de las escuelas, solo una pequeña cantidad se podría atribuir al profesorado, esto es aproximadamente el 8% para primer grado y un 2% para tercer grado.

En este estudio, las variables de nivel 1: avance y pretest, se midieron a nivel del alumnado. Las variables del nivel 2: C_Profesorado, NSE y SIMCE, se midieron a nivel de escuela, y se asignaron el mismo valor al alumnado de la respectiva escuela (ver Tabla 3).

TABLA 3
Estadísticos descriptivos

Tabla 3
Estadísticos descriptivos

Variable	Nivel	N	Mínimo	Máximo	M	DT
Avance	alumno	714	6	13	1,8	3,0
Pretest	alumno	714	0	22	12,4	3,6
C_Profesor	escuela	23	3	21	12,3	5,4
NSE	escuela	23	1	2	3,3	0,8
SIMCE	escuela	23	221	301	264,7	21,3

En este estudio, las variables de nivel 1: avance y pretest, se midieron a nivel del alumnado.
Las variables del nivel 2: C_Profesorado, NSE y SIMCE, se midieron a nivel de escuela,
y se asignaron el mismo valor al alumnado de la respectiva escuela (ver Tabla 3).

Se estudiaron las correlaciones entre las variables (ver Tabla 4). Se observó que la correlación más alta se presentó entre NSE y SIMCE. La correlación entre el conocimiento del profesorado y el avance de aprendizaje del alumnado fue positiva, débil pero significativa. Resultados similares fueron reportados en la literatura sobre la asociación entre el conocimiento del profesor y el rendimiento del estudiantado en matemáticas (Cueto et al., 2017; Hill et al., 2005; Tchoshanov et al., 2017).

TABLA 4
Correlaciones entre las variables inter-escuela

Tabla 4
Correlaciones entre las variables inter-escuela

N = 714	NSE	SIMCE	Pretest	Avance
C_Profesor	,21(**)	,36(**)	,13(**)	,12(**)
NSE		,64(**)	,28(**)	,07
SIMCE			,38(**)	,06
Pretest				-,39(**)

*Nota: Correlación Pearson bilateral; ** p < ,01*

Nota: Nota: Correlación Pearson bilateral; ** p < ,01

Nota: Correlación Pearson bilateral; ** p < ,01

La Tabla 5 muestra la escuela, el tipo de escuela, el número de estudiantado por escuela, la media del avance de aprendizaje y la desviación típica del avance.

TABLA 5
Estadísticos Descriptivos por Escuela

Tabla 5
Estadísticos Descriptivos por Escuela

Escuela	Tipo	N estudiantes	M Avance	DT Avance
E1	P-Sub	28	1,1	2,2
E2	P-Sub	48	1,1	3,3
E3	P-Sub	47	1,5	3,2
E4	P-Sub	58	2,0	2,6
E5	Mun	18	0,5	2,4
E6	Mun	9	2,5	2,5
E7	Mun	26	0,5	2,7
E8	P-Sub	76	2,9	2,4
E9	P-Sub	18	1,8	2,4
E10	P-Sub	56	2,3	3,7
E11	Mun	25	1,4	3,3
E12	Mun	19	1,5	4,6
E13	P-Sub	11	3,7	3,1
E14	Mun	33	2,5	2,5
E15	P-Sub	35	1,6	2,1
E16	P-Sub	62	1,8	2,7
E17	P-Sub	16	2,4	2,7
E18	Mun	21	1,4	3,3
E19	P-Sub	30	1,8	3,5
E20	P-Sub	41	1,7	2,8
E21	P-Sub	17	0,6	3,1
E22	Mun	7	1,7	4,1
E23	P-Sub	13	3,6	3,4
Total	23	714	1,8	3,0

Nota: P-Sub: escuela particular subvencionada y Mun: escuela municipal.

Nota P-Sub: escuela particular subvencionada y Mun: escuela municipal.

Nota: P-Sub: escuela particular subvencionada y Mun: escuela municipal.

La Tabla 6 muestra la diferencia en el estadístico -2LL asociada a los modelos Inicial y AEA, la diferencia de 9.1 se distribuyó según chi cuadrado con 1 grado de libertad ($p < .01$), por lo que se rechazó la hipótesis de que el efecto del factor Escuela sea nulo. Se observó que el modelo RMR no superó al AEA dado que las diferencias no fueron significativas. El modelo ACEA que incluyó el efecto Profesorado y pretest superó a los modelos anteriores.

TABLA 6
Criterios de Información

Tabla 6
Criterios de Información

Modelo	Descripción del modelo	-2LL	Diferencia
Inicial	No incluye el efecto Escuela	3620,8	-
AEA	Incluye el efecto Escuela	3611,7	9,1**
RMR	Incluye efecto del *SIMCE*	3619,4	-7,6
RMR	Incluye el efecto del *NSE*	3611,6	0,1
RMR	Incluye el efecto C_*Profesor*	3611,0	0,6
ACEA	Incluye efectos *SIMCE* y *Pretest*	3470,3	149,0***
ACEA	Incluye efectos *NSE* y *Pretest*	3462,6	148,9***
ACEA	Incluye efectos C_*Profesor* y *Pretest*	3461,7	149,3***

*Nota: *** p < ,001; ** p < ,01*

Nota *** p < ,001; ** p < ,01

Nota: *** p < ,001; ** p < ,01

En la Tabla 7, RMR mostró que el SIMCE y el NSE no se asociaron significativamente con el avance del estudiantado ($p= 0,91$, $p= 0,22$). El conocimiento del profesorado se asoció significativamente con el avance de aprendizaje del estudiantado ($p = 0,02$). Estudios previos mostraron resultados similares (Cueto et al., 2017; Hill et al., 2005; Tchoshanov et al., 2017).

TABLA 7
Estimaciones de los Parámetros de Efectos Fijos

Tabla 7
Estimaciones de los Parámetros de Efectos Fijos

Modelo	Parámetro	Estimación	Error típico	gl	Estadístico t	p
Inicial	Intersección	1,84	0,11	713	16,09	<0,001
AEA	Intersección	1,78	0,18	16,89	9,98	<0,001
RMR	intersección	1,77	0,19	16,8	9,58	<0,001
	SIMCE_c	0,001	0,01	14,65	0,12	0,91
RMR	intersección	1,74	0,18	18,07	9,78	<0,001
	NSE_c	0,25	0,20	22,11	1,25	0,22
RMR	intersección	1,78	0,16	16,88	10,84	<0,001
	C_Profesor_c	0,08	0,03	16,29	2,45	0,02
	Intersección	1,78	0,19	17,29	9,38	<0,001
	Pretest_c	-0,43	0,03	686,60	-13,13	<0,001
	SIMCE_c	-0,0003	0,01	15,81	-0,29	0,97
ACEA	Intersección	1,74	0,18	17,48	9,63	<0,001
ACEA	*Pretest_c*	-0,43	0,03	686,25	-13,13	<0,001
ACEA	*NSE_c*	0,24	0,20	21,35	1,21	0,23
	Intersección	1,78	0,17	17,41	10,69	<0,001
	Pretest_c	-0,43	0,03	689,17	-13,14	<0,001
	C_Profesor_c	0,08	0,032	17,28	2,52	0,02

*Nota: *** p < ,001; ** p < ,01*

Nota *** p < ,001; ** p < ,01

Nota: *** p < ,001; ** p < ,01

En la Tabla 8, el estadístico Wald otorgó la significación del efecto del procedimiento MIXED del SPSS, en este estudio se usó el estadístico -2LL, el cual es más fiable para muestras pequeñas. Según estas estimaciones, la variabilidad entre las escuelas representó el 4% de la variabilidad total del avance. El 96% de la varianza fue explicada por las diferencias dentro de cada escuela. Los modelos ACEAs mostraron que la estimación de la variabilidad entre las escuelas aumentó con respecto al modelo RMR y la varianza de los residuos pasó de 8,97 en el modelo AEA, a 7,18 en el modelo ACEA, similarmente para las tres covariables: SIMCE_c, NSE_c y C_Profesorado_c. Por tanto, al corregir el resultado en el avance mediante las puntuaciones en el pretest, la variabilidad dentro de cada escuela fue reducida en un 20%. Al comparar el modelo AEA y el modelo RMR, se conoció la proporción de varianza explicada en el nivel 2. El 8% fue atribuible al NSE, el -10% al SIMCE y 26% al conocimiento del profesorado. El SIMCE no se mostró relevante en el modelo estudiado. Por lo tanto, el conocimiento del profesor solo o en combinación con otros factores explicó alrededor del 6% de la variabilidad total del avance del alumnado, con una significación al 5%. El resultado del estudio está en línea con los hallazgos de diversas investigaciones sobre el efecto del CC y CPC en el aprendizaje del estudiantado en matemáticas (Baumert et al., 2010; Kelcey et al., 2019; Tchoshanov et al., 2017).

TABLA 8
Estimaciones de los Parámetros de Covarianza

Tabla 8
Estimaciones de los Parámetros de Covarianza

Modelo	Parámetro		Estimación	Error típico	Wald Z	p
Inicial	*Varianza total*	varianza	9,31	0,49	18,88	
AEA	Residuos	varianza	8,97	0,48	18,56	<0,001
	Varianza = Escuela		0,38	0,23	1,63	0,10
RMR	Residuos	varianza	8,97	0,48	18,53	<0,001
	Escuela (*SIMCE_c*)		0,42	0,26	1,60	0,11
RMR	Residuos	varianza	8,98	0,48	18,55	<0,001
	Escuela (*NSE_c*)		0,35	0,23	1,52	0,12
RMR	Residuos	varianza	8,96	0,48	18,59	<0,001
	Escuela (C_*Profesor_c*)		0,28	0,19	1,44	0,15
ACEA	Residuos (*SIMCE_c*)	Varianza	7,18	0,39	18,53	<0,001
	Intersección		0,52	0,27	1,91	0,05
ACEA	Residuos (*NSE_c*)	Varianza	7,19	0,39	18,52	<0,001
	Intersección		0,45	0,25	1,81	0,07
ACEA	Residuos (C_*Profesor_c*)	Varianza	7,17	0,39	18,56	<0,001
	Intersección		0,35	0,20	1,75	0,08

**** p < ,001; ** p < ,01*

*** p < ,001; ** p < ,01

*** p < ,001; ** p < ,01

Los resultados de las pruebas aplicadas en el estudio fueron los siguientes:

Prueba sobre las fracciones para el alumnado (n=714). La mayoría de las personas estudiantes respondió correctamente las preguntas relativas al subconstruto parte-todo (80%), las preguntas que resultaron más difíciles (20% a 50%) fueron las relativas al subconstructo medida, tales como ubicar fracciones en la recta numérica y comparar fracciones con distinto denominador. Estos resultados fueron similares a los reportados en la literatura (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Ramadianti et al., 2019; Wijaya, 2017).

Prueba sobre las fracciones y su enseñanza para el profesorado (n=23). Respecto de la dimensión conocimiento sobre las fracciones, las preguntas que resultaron más fáciles de responder correctamente por el profesorado fueron las relativas al subconstructo parte-todo y las preguntas que resultaron más difíciles fueron las relativas al subconstructo medida. Respecto de la dimensión conocimiento sobre la enseñanza asociada al conocimiento didáctico de la matemática, las preguntas que resultaron más fáciles de responder correctamente fueron las relativas a identificar estrategias y dificultades comunes del estudiantado y las preguntas que resultaron más difíciles fueron las relativas al conocimiento de errores comunes del alumnado.

Estos resultados mostraron que el profesorado presentó una comprensión limitada respecto de las fracciones y su enseñanza, coincidente con lo reportado en la literatura (Avcu, 2019; Copur-Gencturk, 2021; Reeder y Utley, 2017).

CONCLUSIONES

En este trabajo se constató que el conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 6% de la variabilidad total del avance del alumnado, con una significación al 5%. Este estudio se suma a un grupo de investigaciones que estiman el efecto del conocimiento del profesor en los logros de aprendizaje del estudiantado en matemáticas (Baumert et al., 2010; Hill et al., 2005; Kelcey et al., 2019;

Tchoshanov et al., 2017). No obstante, se diferencia de estudios previos porque se centra en las fracciones, un tema de gran interés para la matemática educativa. En consecuencia, el trabajo constituye un aporte a la investigación sobre el efecto del conocimiento del profesorado en el alumnado.

En este estudio se evidencia que la varianza entre escuelas estaría explicada en un 8% por el nivel socioeconómico. En la literatura se ha reportado que el NSE alto se relaciona con mejores condiciones (vivienda, acceso a salud, entre otras) que tienden a contribuir al logro de aprendizaje del alumnado. Se ha observado que en países en desarrollo, el alumnado con NSE bajo difícilmente alcanza rendimientos comparables con el alumnado de NSE alto.

Respecto de las pruebas aplicadas al estudiantado, se observa que las preguntas más fáciles de responder son relativas al subconstructo parte-todo y las más difíciles son las relativas al subconstructo medida. En general, en los textos escolares, el subconstructo parte-todo se representa utilizando figuras geométricas divididas en partes iguales. Estas representaciones son familiares para el estudiantado, por lo tanto, le resultan fácil de comprender (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007). Sin embargo, más adelante esta idea se convierte en un obstáculo para la compresión del subconstructo medida, la comparación de fracciones y otras ideas que determinan el sentido numérico. En consecuencia, aparecen errores típicos como, por ejemplo, al resolver tareas de comparación de fracciones, el alumnado se equivoca al señalar que 1/4 > 1/2, argumentando que 4 es mayor que 2. Esto sugiere que aunque parte-todo puede ser la base para comprender los otros subconstructos, no es suficiente por sí mismo para una comprensión profunda de las fracciones (Reeder y Utley, 2017).

Por otra parte, el subconstructo medida a menudo se representa por medio de rectas numéricas, este modelo resulta ser menos intuitivo que los utilizados para representar parte-todo y por ende más difícil de entender (Jiang, 2020). No obstante, la literatura señala que la enseñanza centrada en el subconstructo medida sería clave para el aprendizaje de las fracciones (Siegler y Lortie-Forgues, 2017). Asimismo, se observa que las preguntas con mayor dificultad para el profesorado fueron relativas al subconstructo medida. Algunos estudios sugieren que el aprendizaje de las fracciones por parte del estudiantado puede verse limitado por la comprensión de las fracciones por parte del profesorado. Las instituciones formadoras de las personas docentes tienen un rol clave en la solución del problema, se sugiere que estas instituciones refuercen este conocimiento (Avcu, 2019; Copur-Gencturk, 2021; Van Steenbrugge et al., 2014).

La dificultad en la comprensión de las fracciones es una constante en todos los sistemas educativos. Por lo tanto, reconocer aquellos factores que predicen el aprendizaje de fracciones se convierte en un tema clave (Stelzer et al., 2021). El presente estudio entrega pistas para continuar la investigación respecto de los conocimientos que requiere el profesorado de manera que el estudiantado pueda avanzar en el aprendizaje de las fracciones. La investigación futura podría incluir otras variables, por ejemplo: relacionadas con aspectos socio-afectivos del alumnado, características del contexto escolar y factores actitudinales del profesorado hacia el aprendizaje del alumnado.

REFERENCIAS

Álvarez, A. y Martínez, G. (2016). El Informe Coleman a Debate en su Cincuenta Aniversario. International Journal of Sociology of Education, 5(2), 87-106. http://dx.doi.org/10.17583/rise.2016.2104

Avcu, R. (2019). Turkish pre-service middle level mathematics teachers' knowledge for teaching fractions. Research in Middle Level Education Online, 42(9), 1-20. https://doi.org/10.1080/19404476.2019.1681624

Azid, N., Hasan, R., Nazarudin, N. F. M. y Md-Ali, R. (2020). Embracing Industrial Revolution 4.0: The Effect of Using Web 2.0 Tools on Primary Schools Students' Mathematics Achievement (Fraction). International Journal of Instruction, 13(3), 711-728. https://doi.org/10.29333/iji.2020.13348a

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barbieri, C. A., Young, L. K., Newton, K. J. y Booth, J. L. (2021). Predicting Middle School Profiles of Algebra Performance Using Fraction Knowledge. Child Development, 92(5), 1984-2005. https://doi.org/10.1111/cdev.13568

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. y Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American Educational Research Journal, 47(1), 133-180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational numbers concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 91-125). Academic Press. https://bit.ly/3ukOpQH

Braithwaite, D. W. y Siegler, R. S. (2021). Putting fractions together. Journal of Educational Psychology, 113(3), 556-571. https://doi.org/10.1037/edu0000477

Charalambous, C. Y. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. Educational Studies in Mathematics, 64(3), 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Coleman, J. S., Campbell, E., Hobson, C., McPartland, J., Mood, A., Weinfeld, F. y York, R. (1966). Equality of educational opportunity. https://eric.ed.gov/?q=ED012275&id=ED012275

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. Educational Studies in Mathematics, 107, 525-545. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10033-4

Cueto, S., León, J., Sorto, M. A. y Miranda, A. (2017). Teachers' pedagogical content knowledge and mathematics achievement of students in Peru. Educational Studies in Mathematics, 94(3), 329-345. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9735-2

Deringöl, Y. (2019). Misconceptions of primary school students about the subject of fractions: views of primary teachers and primary pre-service teachers. International Journal of Evaluation and Research in Education, 8(1), 29-38. http://doi.org/10.11591/ijere.v8i1.16290

Heyneman, S. P. y Loxley, W. A. (1982). Influences on academic achievement across high and low income countries: a Re-Analysis of IEA data. Sociology of education, 55(1), 13-21. https://www.jstor.org/stable/2112607

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers′ topic-specific Knowledge of Students. Journal for Research in Mathematics Education, 39(4), 372-400. https://www.jstor.org/stable/40539304

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. American educational research journal, 42(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Jiang, Z., Mok, I. A. C. y Li, J. (2020). Chinese students' hierarchical understanding of part-whole and measure subconstructs. International Journal of Science and Mathematics Education, 19(7), 1441-1461. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10118-1

Kelcey, B., Hill, H. C. y Chin, M. J. (2019). Teacher mathematical knowledge, instructional quality, and student outcomes: a multilevel quantile mediation analysis. School Effectiveness and School Improvement, 30(4), 398-431. https://doi.org/10.1080/09243453.2019.1570944

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), Number and measurement: Papers from a research workshop (pp. 101-144). ERIC/SMEAC. https://eric.ed.gov/?id=ED120027

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L. y Wittmann, G. (2019). Are conceptual knowledge and procedural knowledge empirically separable? The case of fractions. British Journal of Educational Psychology, 90(3), 809-829. https://doi.org/10.1111/bjep.12333

Ma, L. (2010). Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU. Academia Chilena de Ciencias. https://hdl.handle.net/20.500.12365/17686

Maas, C. y Hox, J. (2005). Sufficient sample sizes for multilevel modeling. Methodology. European Journal of Research Methods for the Behavioral and Social Sciences, 1(3), 86-92. https://doi.org/10.1027/1614-2241.1.3.86

Ministerio de Educación. (2013). Matemática: Programa de Estudio Cuarto Año Básico. https://hdl.handle.net/20.500.12365/644

Pardo, A., Ruiz, M. A. y San Martín, R. (2007). Cómo ajustar e interpretar modelos multinivel con SPSS. Psicothema, 19(2), 308-321. https://www.psicothema.com/pii?pii=3365

Ramadianti, W., Priatna, N. y Kusnandi, K. (2019). Misconception analysis of junior high school student in interpreting fraction. Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 7(4), 1159-1173. http://dx.doi.org/10.17478/jegys.631567

Reeder, S. y Utley, J. (2017). What is a fraction? Developing fraction understanding in prospective elementary teachers. School Science and Mathematics, 117(7-8), 307-316. https://doi.org/10.1111/ssm.12248

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860

Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. Current Directions in Psychological Science, 26(4), 346-351. https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Soni, M. y Okamoto, Y. (2020). Improving children's fraction understanding through the use of number lines. Mathematical Thinking and Learning, 22(3), 233-243. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1709254

Stelzer, F., Richard's, M. M., Andrés, M. L., Vernucci, S. y Introzzi, I. (2021). Cognitive and maths-specific predictors of fraction conceptual knowledge. Educational Psychology, 41(2), 172-190. https://doi.org/10.1080/01443410.2019.1693508

Tchoshanov, M., Cruz, M. D., Huereca, K., Shakirova, K., Shakirova, L. y Ibragimova, E. N. (2017). Examination of lower secondary mathematics teachers' content knowledge and its connection to students' performance. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(4), 683-702. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9703-9

Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M. y Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students' knowledge? Journal of Curriculum Studies, 46(1), 138-161. https://doi.org/10.1080/00220272.2013.839003

Varas, M., Lacourly, N., López, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. Enseñanza de las Ciencias, 31(1), 171-187. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n1.857

Wijaya, A. (2017). The Relationships between Indonesian Fourth Graders' Difficulties in Fractions and the Opportunity to Learn Fractions: A Snapshot of TIMSS Results. International Journal of Instruction, 10(4), 221-236. https://doi.org/10.12973/iji.2017.10413a

Xu, C., Li, H., Burr, S. D. L., Si, J., LeFevre, J. A. y Huang, B. (2022). Divide and conquer: Relations among arithmetic operations and emerging knowledge of fraction notation for Chinese students in grade 4. Journal of Experimental Child Psychology, 217(105371). https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105371

Yang, X., Kaiser, G., König, J. y Blömeke, S. (2020). Relationship between pre-service mathematics teachers' knowledge, beliefs and instructional practices in China. ZDM Mathematics Education, 52(3), 281-294. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01145-x

Zhang, S., Yu, S., Xiao, J., Liu, Y. y Jiang, T. (2021). The Effects of Concrete-Representational-Abstract Sequence Instruction on Fractions for Chinese Elementary Students with Mathematics Learning Disabilities. International Journal of Science and Mathematics Education, 1-18. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10215-9