Desde el pizarrón del profesor

EL PROBLEMA DE APOLONIO EN UN CONTEXTO ESCOLAR Y CON AYUDA DE GEOGEBRA

The Problem of Apollonius in a school context using GeoGebra

Arcos Quezada, José Ismael

José Ismael Arcos Quezada ismael_arcos@msn.com
Universidad Autónoma del Estado de México,
México

Investigación e Innovación en Matemática Educativa
Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.,
México
ISSN-e: 2594-1046
Periodicidad: Frecuencia continua
vol. 7, 2022
revistaiime@redcimates.org

Recepción: 20 Mayo 2022
Aprobación: 03 Octubre 2022
Publicación: 11 Octubre 2022

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/302/3023915009/

DOI: https://doi.org/10.46618/iime.140

Resumen: El llamado problema de Apolonio es uno de los problemas de construcción geométrica que más ha atraído la atención de los matemáticos desde que fue enunciado en el siglo III a.C. Sin embargo, debido a la cantidad y complejidad de los conceptos geométricos requeridos para su solución, particularmente si se quiere cumplir con el requisito de utilizar sólo regla y compás, sólo dos de los diez posibles casos del problema pueden ser abordados en la matemática escolar. En este documento se expone una manera de abordar y resolver los distintos casos en una situación escolar, en bachillerato o un programa académico de ingeniería, utilizando para ello, parábolas, elipses e hipérbolas, además de rectas y circunferencias, y contando con la ayuda de GeoGebra.

Palabras clave: cónicas en la escuela, GeoGebra, problema de Apolonio, problemas de construcción.

Abstract: The so-called problem of Apollonius is one of the geometric construction problems that has attracted the most attention from mathematicians since it was stated in the 3rd century BC. However, due to the number and complexity of the geometric concepts required for its solution, particularly if one wants to comply with the requirement of using only ruler and compass, only two of the ten possible cases of the problem can be addressed in school mathematics. This document exposes a way to address and solve the different cases in a school situation, in high school or in an academic engineering program, using parabolas, ellipses and hyperbolas, as well as lines and circles, and with the help of GeoGebra.

Keywords: conics at school, GeoGebra, Apollonius problem, construction problems.

1. EL PROBLEMA DE APOLONIO

El problema de construcción geométrica, conocido como el problema de Apolonio, puede describirse de diversas maneras. Desde la perspectiva de los profesionales de la matemática y de acuerdo con Courant y Robbins (2002):

Uno de los problemas clásicos de construcción más famosos es el llamado problema de Apolonio (ca. 200 a.C.), en el que se pide construir un círculo que sea tangente a tres círculos arbitrarios dados en el plano. En particular, en este problema se permite que uno o más de los círculos dados sean impropios, esto es, que degeneren en un punto o en una línea recta (un "círculo" de radio cero o "infinito", respectivamente); por ejemplo, puede pedirse que se construya un círculo tangente a dos líneas rectas dadas y que pase por un punto dado. Mientras que es fácil tratar estos casos especiales, el problema general es considerablemente más difícil (p.147).

Ahora bien, como aquí interesa abordar el problema en una situación escolar, ya sea en un curso de bachillerato o de una carrera de ingeniería, el problema de Apolonio será como lo describe Boyer (1986):

Dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados (donde debe entenderse que ser tangente una circunferencia a un punto significa pasar por él) (p.191).

Así pues, el problema parte de tres condiciones, cada una de las cuales puede ser: un punto (P) de la circunferencia, una recta (L) tangente a la circunferencia, o bien, otra circunferencia (C) que debe ser tangente a la circunferencia buscada. Cada una de las 10 combinaciones posibles, da lugar a uno de los problemas de tangencia de Apolonio:

PPP, PPL, PPC, PLL, LLL, PLC, PPC, PCC, LLC, CCC

Como problemas de construcción geométrica, utilizando sólo regla y compás, únicamente dos de estos problemas pueden ser abordados en la enseñanza básica o en el bachillerato. El problema PPP (tres puntos), que puede resolverse trazando mediatrices y el LLL (tres rectas tangentes), que puede resolverse trazando bisectrices. Para el resto de los casos se requiere de conocimientos más profundos de la geometría euclidiana, por lo que no son abordados en la escuela.

Tradicionalmente, un curso de Geometría Analítica en bachillerato tiene, como uno de sus propósitos básicos, el de resolver problemas que involucran diversos objetos o lugares geométricos como rectas, circunferencias o secciones cónicas, precisamente como lo podrían ser cada uno de los diez problemas de tangencias de Apolonio. Sin embargo, en estos cursos se da prioridad a cuestiones de carácter algorítmico operativos, soslayando el aspecto geométrico, debido, en buena medida a la tradición heredada por textos como el de Lehmann (1942), escritos hace ocho décadas, cuando el cálculo numérico y el trazado de curvas se hacía sólo con lápiz y papel. Actualmente, sin embargo, la disponibilidad de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, para el trazo de curvas en el plano y la solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, permite al docente abordar problemas que demanden del alumno tal vez un mayor conocimiento geométrico, pero mucho menos habilidades de manipulación algebraica y sin requerir el trazo de las curvas. Así pues, el propósito de este trabajo es el de brindar herramientas a los docentes para abordar problemas de construcción geométrica en las secciones cónicas, desde una perspectiva más geométrica que algebraica, aprovechando la disponibilidad de GeoGebra.

2. PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN Y EL USO EXCLUSIVO DE LA REGLA Y EL COMPÁS

A lo largo de la historia de las matemáticas pueden identificarse momentos o situaciones en los que, para responder a una pregunta o resolver un problema, se establecen ciertas condiciones de validez sobre el uso de determinados conceptos o instrumentos.

Así, entre los matemáticos de la Grecia antigua, para considerar válida una solución a determinados problemas de construcción geométrica, se imponía la condición de utilizar sólo regla y compás, lo que equivale a utilizar sólo rectas y circunferencias.

Un ejemplo interesante es el de la duplicación del cubo, que consiste en encontrar la arista *x* de un cubo que debe tener el doble del volumen que un cubo dado, de arista Importar imagen , de manera que #^{3} = 2#^{3}. Así pues, debe construirse un segmento de longitud $x = \sqrt[3]{2}\,a$.

De acuerdo con Boyer (1969), Menecmo (siglo IV a.C.) sugirió como solución un proceso equivalente (en el contexto de la geometría analítica de bachillerato, en la actualidad) al trazo de las parábolas $x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$ (figura 1), las cuales, como puede verificarse, se intersecan en el origen y en el punto $(\sqrt[3]{2}\,a, \sqrt[3]{4}\,a)$, de manera que la abscisa del segundo punto de intersección proporciona el segmento solución. Sin embargo, tal solución era "inválida" puesto que suponía el trazo de algo más que rectas y circunferencias, en este caso, de dos parábolas.

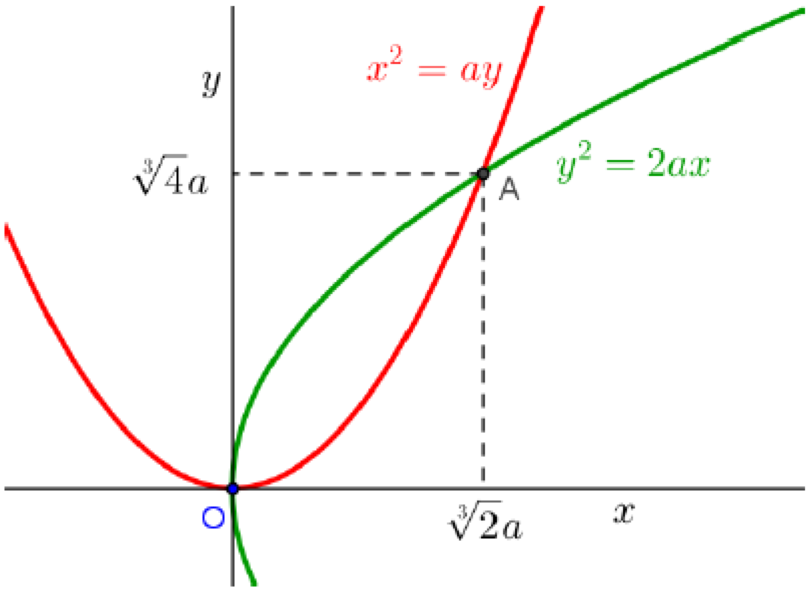

Figura 1
Solución a la duplicación del cubo por medio de parábolas.

Tuvieron que pasar dos milenios para que Descartes (1997), en su Geometría (escrita en 1636), se sacudiera de este requisito y reconociera la validez de procesos geométricos de construcción, recurriendo a algo más que sólo regla y compás. En efecto, desde el primer párrafo del libro I, Descartes afirma que:

Cualquier problema en geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción (p. 13).

Así que, después de indicar cómo construir la suma, la diferencia, el producto o el cociente de dos segmentos dados, o la raíz cuadrada de cualquier segmento dado, procede a resolver cualquiera de los tres casos de ecuaciones cuadráticas (tómese en cuenta que, en ese entonces, no se reconocían las cantidades negativas), utilizando sólo regla y compás:

Por ejemplo, si tengo $z^2 = az + b^2$, construyo el triángulo recto NLM con un lado LM igual a b, la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado, LN, igual a $\frac{1}{2}a$, esto es, a la mitad de la otra cantidad conocida que está multiplicada por z y que se supuso como una la línea desconocida. Entonces, prolongando MN, la hipotenusa de ese triángulo, hasta O, de manera que NO sea igual a NL, la línea entera OM es la línea requerida z (figura 2).

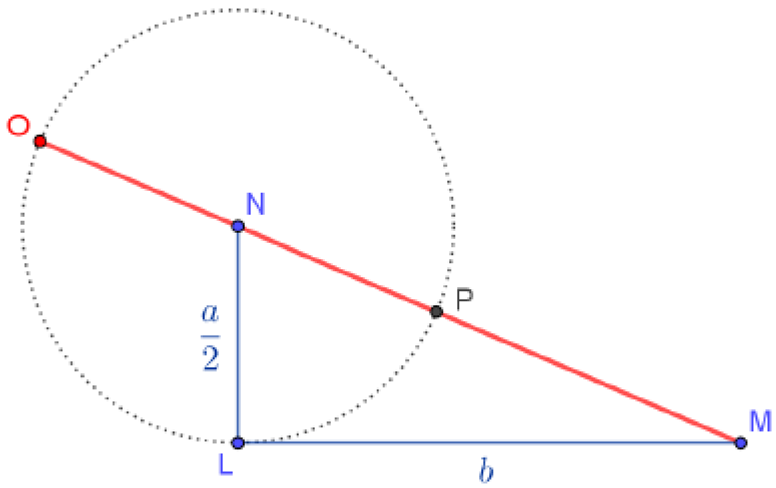

Figura 2

Solución (según Descartes) de $z^2 = az + b^2$ con regla y compás

Esto se expresa de la manera siguiente:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Puede verificarse que esta expresión corresponde a la solución (positiva) obtenida a partir de la fórmula general. Algo similar explica para cada uno de los otros casos: $y^2 + ay = b^2$ y $z^2 + az$.

Ahora bien, cabe aquí hacer un par de observaciones. Primero, que las instrucciones dadas por Descartes constituyen un algoritmo geométrico, cuyos datos de entrada son los segmentos (coeficientes) a y b, y cuya salida (respuesta) es el segmento z. Esto se podría enumerar como sigue:

1) Dados los segmentos a y b:

2) Trácese el segmento LM, de longitud b

3) Por L y perpendicularmente a LM, trácese el segmento LN, de longitud $\frac{a}{2}$

4) Trácese la circunferencia con centro en N, que pase por L (radio NL)

5) Trácese el rayo MN, que cortará a la circunferencia en P y O

6) OM es el segmento buscado

La segunda observación es acerca del significado de la construcción de un segmento por medios geométricos. Sabemos que el algoritmo descrito anteriormente, para la solución de $z^2 = az + b^2$ conduce, teóricamente, a la solución exacta; es decir, si se sigue el algoritmo mentalmente o con la ayuda de un croquis, podremos asegurar que el segmento MO tendrá exactamente la longitud$\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}+\frac{1}{2}a$ Importar imagen . Si se utilizaran una regla y un compás reales, sobre una hoja de papel, el segmento MO obtenido, siguiendo el algoritmo, tendría una longitud solamente aproximada a$\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}+\frac{1}{2}a$ sin importar qué tan precisos fueran los instrumentos y los trazos realizados. Así pues, la validez de la construcción descansa en el significado y propiedades de las curvas utilizadas (en este caso, rectas y circunferencias) y no en la precisión con la que los instrumentos (regla y compás) hacen los trazos. Al respecto, Descartes, en el libro II de su Geometría, indicaba lo siguiente:

Los antiguos estaban familiarizados con el hecho de que los problemas de la geometría pueden dividirse en tres clases, a saber, Problemas planos, sólidos y lineales. Esto equivale a decir que algunos problemas requieren sólo de circunferencias y líneas rectas para su construcción, mientras que otros requieren de una sección cónica y aún otros requieren curvas más complejas. Estoy sorprendido, sin embargo, de que no hayan ido más allá, y distinguido entre distintos grados de estas curvas más complejas, y no veo por qué llamaron a las últimas mecánicas, en lugar de geométricas (p. 25).

Si decimos que se llaman mecánicas es porque debe usarse alguna especie de instrumento para describirlas; debemos entonces, para ser consistentes, rechazar circunferencias y líneas rectas, pues éstos no pueden describirse en papel sin el uso de compás y regla, que también pueden llamarse instrumentos.

Cabe entonces reflexionar sobre si, en la matemática escolar actual debemos seguir esperando que los alumnos resuelvan los problemas planteados mediante procedimientos canónicos (generalmente recién explicados en clase), desmotivando el pensamiento creativo y reprimiendo o, incluso prohibiendo procedimientos alternativos.

3. LOS CURSOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL BACHILLERATO

Ya pasaron ocho décadas desde que Lehmann (1942) escribió su texto de Geometría Analítica, que se convertiría en un clásico. En esos momentos, no se disponía de ningún instrumento para hacer cálculos aritméticos, ni mucho menos para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones o que pudiera hacer trazos geométricos con alguna precisión. Actualmente, sin embargo, ya se dispone con tecnología razonablemente accesible para cálculos numéricos y simbólicos, lo mismo que para la graficación en el plano y en 3D, de manera que ahora resulta posible delegar esas tareas a un dispositivo electrónico y dedicar más tiempo en clase o más espacio en los libros, a aspectos conceptuales y a la resolución de problemas.

Por otro lado, el mismo Lehmann, desde el primer párrafo del prólogo de su texto, menciona que su lectura supone el conocimiento, por parte del lector, de los principios fundamentales de Geometría elemental, Trigonometría plana y Álgebra. Sin embargo, una de las consecuencias de la implementación de la Reforma de la Matemática Moderna en las aulas de los distintos niveles educativos, pero básicamente en el bachillerato, fue la eliminación de la mayoría de los contenidos de geometría y con ello, del recurso de la visualización gráfica, siendo sustituidos por cuestiones algebraicas y simbólicas. El curso de Geometría Analítica se convirtió, a fines del siglo xx, en algo así como un segundo o tercer curso de álgebra. Aunque es difícil precisarlo, parece que poco ha cambiado esta situación, al menos en cuanto al descuido del contexto geométrico.

El uso de un software como GeoGebra, en el curso de Geometría Analítica del bachillerato, por ejemplo, en el estudio de las cónicas, permite utilizar poco tiempo en el trazo de figuras y la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de segundo grado, pudiendo utilizar ese tiempo en involucrar al alumno en el trabajo geométrico.

Exploremos esta idea con el caso PPL del problema de Apolonio. Esto es, supongamos que buscamos la circunferencia, con centro en Importar imagen y radio Importar imagen , que pasa por dos puntos dados Importar imagen y Importar imagen , y que es tangente a la recta dada Importar imagen . Para ello, en el contexto algebraico propio de la matemática escolar tradicional, podemos proceder como sigue:

El radio r debe ser la distancia del centro a cualquiera de los puntos dados A y B , así que:

$$r = d(\mathrm{C}, \mathrm{A}) = d(\mathrm{C}, \mathrm{B}) \qquad (1)$$ (1)

Al proceder algebraicamente, esta igualdad nos conduce a una ecuación lineal.

Por otra parte, al ser la circunferencia buscada, tangente a la recta, el radio debe ser la distancia del centro a la recta Importar imagen , de manera que:

$$r = d(\mathrm{C}, \mathrm{A}) = d(\mathrm{C}, L) \qquad (2)$$ (2)

Esta igualdad da lugar a una ecuación cuadrática, así que podrá haber dos soluciones. Al resolver el sistema de ecuaciones {(1),(2)} se obtienen las coordenadas del centro (o de cada uno de los dos centros) mientras que el radio de cada circunferencia se obtiene al calcular la distancia de cada uno de los centros obtenidos a cualquiera de los puntos dados. Este proceso es bastante laborioso y demanda una gran habilidad algebraica y aritmética, por lo que una muy reducida porción de los estudiantes llegaría, sin error, a la solución.

Si, en cambio, se mira el problema desde un contexto geométrico, se observará que la ecuación (1) es la de la mediatriz del segmento Importar imagen , mientras que la ecuación (2) es la de la parábola con foco en A y directriz en L.

Utilizando GeoGebra, se ubicarían puntos A y B, y la recta L (figura 3 superior izquierda), enseguida se trazarían la mediatriz del segmento AB y la parábola con foco en A, que tiene como directriz a la recta L (figura 3 superior derecha).

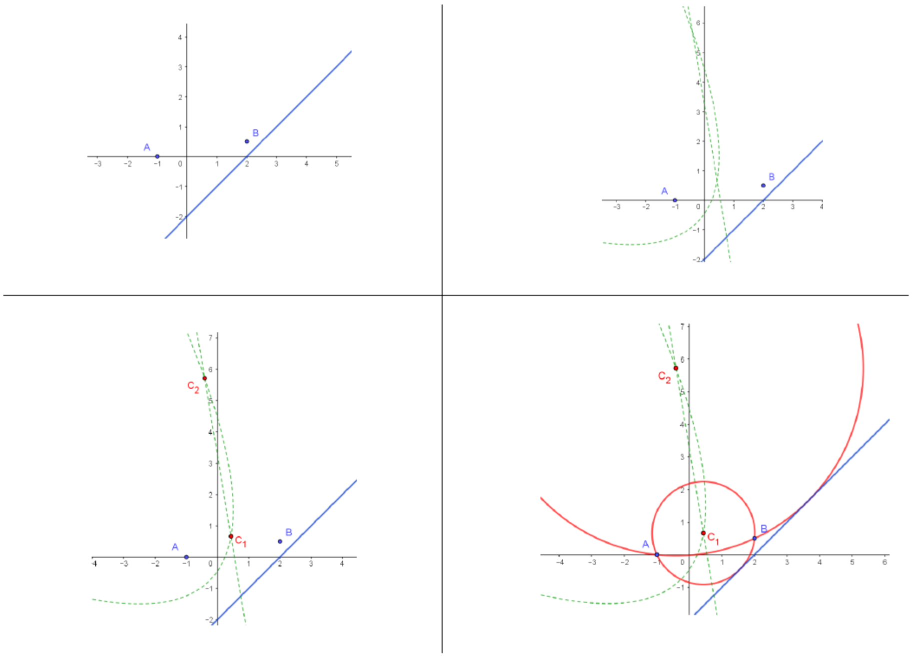

Figura 3
Solución con GeoGebra del caso PPL

Luego se ubicarían los puntos de intersección entre la mediatriz y la parábola encontradas (figura 3 inferior izquierda) y, finalmente, se trazarían las circunferencias con centro en cada uno de esos puntos de intersección y que pasan por alguno de los puntos A o B (figura 3 inferiror derecha).

En el ejemplo ilustrado en la figura 3, los puntos dados son A=(-1,0) y B=(2,0.5), mientras que la recta dada es x - y = 2. Al hacer los trazos con GeoGebra, en la "vista algebraica" aparecen las expresiones correspondientes a cada objeto geométrico trazado. Así, la ecuación de la mediatriz del segmento AB es y = -6x +3.25, mientras que, la ecuación de la parábola es $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 4y = 2$. Los puntos de intersección de la mediatriz y la parábola, es decir, las coordenadas del centro de cada una de las dos circunferencias solución son, aproximadamente $C_1 = (0.43, 0.66)$ y $C_2 = (-0.41, 5.72)$, y las ecuaciones de las circunferencias solución son $\#_1: (\# - 0.43)^2 + (\# - 0.66)^2 = 2.49$ y $C^2: (\# + 0.41)^2 + (\# - 5.72)^2 = 33.05$.

Así pues, al resolver el problema con ayuda de GeoGebra, por una parte, se pone el énfasis en el contexto geométrico del problema, y por otra, se obtiene la solución algebraica (aunque tal vez no de manera exacta). Esto libera al alumno de arduos procedimientos algebraicos y se le da, en cambio, la posibilidad de verificar si la solución obtenida mediante los trazos con GeoGebra, efectivamente cumple con las condiciones pedidas.

4. LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PROBLEMA DE APOLONIO

Para tener una metodología geométrica aplicable a cada uno de los diez problemas de Apolonio, hay que obtener, en primera instancia, una expresión para el radio de la circunferencia buscada en términos de la distancia del centro de tal circunferencia al elemento conocido y, en su caso, al radio de la circunferencia dada, tal como se muestra en la tabla 1 y las correspondientes imágenes en la figura 4.

Tabla 1

Expresión simbólica para el radio de la circunferencia buscada, en función del elemento dado

Elemento	Elemento dado	Expresión para el radio de la circunferencia buscada (centro en C)
P	Un punto A de la circunferencia. (Figura 4 superior izquierda)	r = dist(C,A)
L	Una recta Importar imagen tangente. (Figura 4 superior derecha)	r = dist(C,L)
C ext	Una circunferencia C0 tangente exterior a la buscada con centro en C0 y radio r0 (Figura 4 al centro izquierda)	r = dist(C,C0) - r0
C Int_1	Una circunferencia C0 tangente interior a la buscada con centro en Importar imagen y radio Importar imagen (Figura 4 al centro derecha)	r = dist(C,C0) + r0
C Int_2	Una circunferencia C0 tangente interior a la buscada con centro en Importar imagen y radio r0 Importar imagen (Figura 4 inferior)	r = r0 – dist(C, C0)

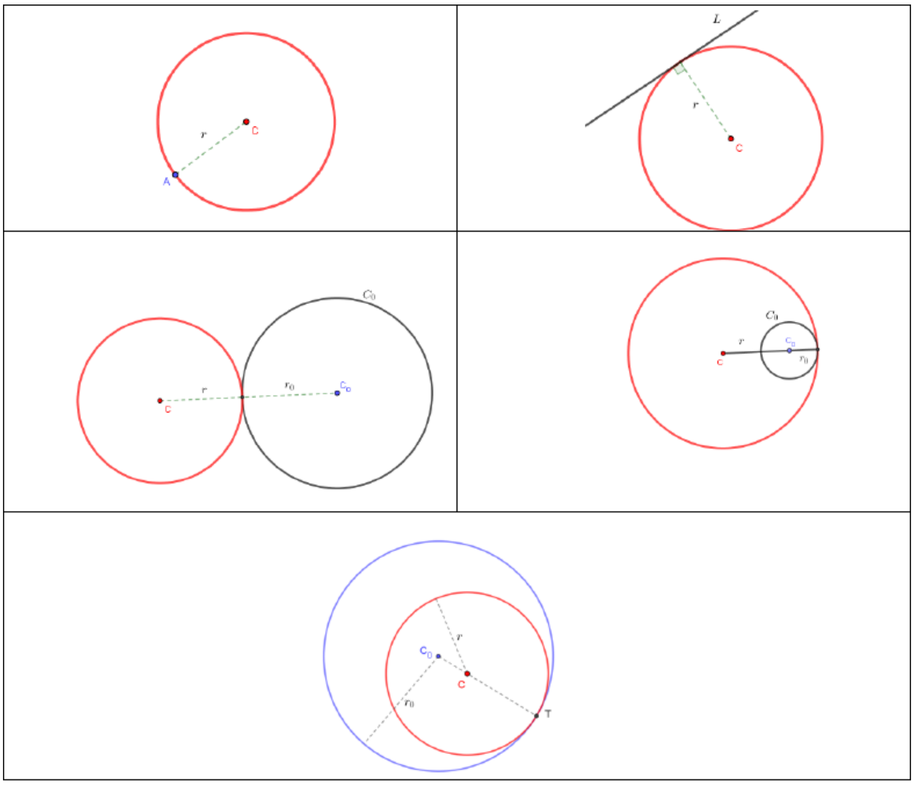

Figura 4

Situación gráfica de la circunferencia buscada, según de qué elemento dado se trate

Si ahora se consideran dos de los elementos dados, se tendrán al menos diez combinaciones posibles, y a cada una de estas le corresponderá un determinado lugar geométrico. Aquí cabe indicar que algo que no suele hacerse en un curso de Geometría Analítica pero que vale la pena explorar debido a su carga conceptual, es relacionar la definición verbal de un objeto o lugar geométrico con una simbología genérica que no sea específica de un sistema de coordenadas utilizado.

Así, por ejemplo, como la mediatriz de un segmento AB (en el plano) es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento, entonces podemos decir que un punto P del plano estará en la mediatriz del segmento AB sí, y sólo si dist(P,A) = dist (P,B).

Análogamente, como la elipse puede verse como el conjunto de puntos (del plano) tales que la suma de sus distancias a los focos (F y F') es igual a la distancia entre sus vértices (V y V'), entonces, si la distancia entre los vértices es el *diámetro mayor* (*dm*) de la elipse, podemos decir que un punto P del plano estará en la elipse con focos F y F' y diámetro mayor Importar imagen , sí y sólo si dist (P,F) + dist(P,F') = *dm*.

Los lugares geométricos involucrados en los distintos casos del problema de Apolonio son: mediatriz de un segmento, bisectriz de un par de rectas que se cortan en un punto, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Se definen en términos de distancias entre puntos y rectas, como se indica en la tabla 2.

Tabla 2

Relación entre la definición verbal y su equivalente simbólico, de algunos lugares geométricos

Lugar geométrico	Descripción verbal	Descripción simbólica
Mediatriz de un segmento	Conjunto de puntos P que equidistan de dos puntos dados A y B	dist(P,A) = dist (P, B)
Bisectriz de un par de rectas	Conjunto de puntos P que equidistan de dos rectas dadas Importar imagen y Importar imagen	Importar imagen
Circunferencia con centro en C y radio Importar imagen	Conjunto de puntos P que equidistan de un punto dado C y del plano (la distancia común es Importar imagen)	dist(P,C) = a
Parábola con foco en Importar imagen y directriz en Importar imagen	Conjunto de puntos P que equidistan de un punto dado Importar imagen y de una recta dada Importar imagen	dist(P,F) = dist (P, L)
Elipse con focos en F y F' y diámetro mayor Importar imagen	Conjunto de puntos P tales que la suma de sus distancias a F y F' es siempre igual a Importar imagen	Importar imagen
Hipérbola con focos en F y F' y eje transversal Importar imagen	Conjunto de puntos P, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a F y F' es siempre igual a 2a	Importar imagen

Cada uno de estos lugares geométricos puede ser trazado mediante GeoGebra, obteniendo previamente los objetos requeridos en cada caso.

En la tabla 3 se muestran algunas de las posibles combinaciones de dos de los tres elementos dados. Por ejemplo, para la combinación PP; si conocemos dos puntos A y B de la circunferencia, el centro C debe ser equidistante de estos puntos, es decir dist(C,A) = dist (C,B), así que el centro debe ser un punto de la mediatriz del segmento AB.

Tabla 3
Lugar geométrico al que pertenece el centro de la circunferencia buscada determinado por la combinación de dos los tres elementos dados

Comb	Ecuación Importar imagen lugar geométrico	Figura
P-P	dist(C,A) = dist (C,B) Dados dos puntos, A y B de la circunferencia, el centro C está en la mediatriz del segmento AB	Importar imagen
L-L	Importar imagen Dadas dos rectas Importar imagen y Importar imagen, tangentes a la circunferencia buscada, el centro de tal circunferencia será un punto de la bisectriz de las rectas	Importar imagen
P-L	Importar imagen Dado un punto A de la circunferencia, y una recta Importar imagen, tangente a la circunferencia buscada, el centro C está en la parábola con foco en A y directriz en Importar imagen	Importar imagen
P-C ext	Importar imagen Importar imagen Dado un punto A de la circunferencia, y una circunferencia Importar imagen (tangente a la buscada), con centro en Importar imagen y radio Importar imagen, el centro C de la circunferencia buscada está en la hipérbola con focos en Importar imagen y A y eje transversal igual a Importar imagen	Importar imagen
P-C Int_2	Importar imagen Importar imagen Dado un punto A de la circunferencia buscada e interior a una circunferencia Importar imagen (tangente interiormente a la buscada) con centro en Importar imagen y radio Importar imagen. El centro C de la circunferencia buscada está en la elipse con focos en A y Importar imagen y diámetro mayor a Importar imagen	Importar imagen
L-C ext	Importar imagen Dada una recta Importar imagen (tangente a la circunferencia buscada) y una circunferencia Importar imagen (tangente exteriormente, a la buscada) con centro en Importar imagen y radio Importar imagen . El centro C de la circunferencia buscada está en la parábola con foco en Importar imagen y directriz en Importar imagen, recorrida Importar imagen unidades en la dirección contraria al foco	Importar imagen

De la misma manera se procede para el resto de los casos. Según la situación particular, el centro se encuentra en un lugar geométrico determinado, ya sea una recta (mediatriz o bisectriz), una parábola (en algunos casos desplazada), una elipse o una hipérbola.

Una vez identificada la situación específica del caso, el radio podrá expresarse de tres maneras diferentes debido a que se dan tres elementos para resolver cualquiera de los diez casos del problema de Apolonio; esto da lugar a una igualdad de la forma:

Expresión 1 = Expresión 2 = Expresión 3

A partir de ella, se eligen dos cualesquiera de las tres combinaciones posibles (1 y 2, 1 y 3 o 2 y 3) para obtener dos ecuaciones (la tercera es redundante). En ellas, el centro de la circunferencia buscada, es decir el punto C = (h,k), es el punto cuyas coordenadas verifican las dos ecuaciones.

Como se ha explicado, cada una de estas ecuaciones corresponde a un lugar geométrico, de manera que, al ser trazados, cada punto de intersección entre ellos puede corresponder al centro de una de las circunferencias que buscamos. Algebraicamente, esto corresponde a un sistema de dos ecuaciones en las variables h y k. En el cuadro algebraico de GeoGebra aparecerán las coordenadas de cada uno de estos centros y al trazar la circunferencia con centro en alguno de esos puntos y que satisfaga alguna de las condiciones dadas, aparecerá también la ecuación de la circunferencia buscada.

5. ALGUNOS EJEMPLOS

A continuación, se describe el procedimiento de solución para algunos casos particulares del problema de Apolonio, resultado de aplicar la metodología descrita.

5.1 Caso PLL: un punto y dos rectas

Si A es el punto dado, L_1 y L_2 las rectas (tangentes) dadas, y r y C el radio y el centro de la circunferencia buscada, tendremos entonces que:

r =dist(C,A) = dist(C,L_1) = dist (C,L_2)

Si elegimos la primera y la segunda condición, tendremos que dist(C, A) = dist(C, #1), de manera que C estará en la parábola con foco en A y directriz en la recta L1 . Si se elige la segunda y la tercera, tendremos que dist(C, $\#_1$) = dist(C, $\#^2$), y C será un punto de la bisectriz de las rectas L_1 y L_2. Así pues, el centro de cada una de las circunferencias buscadas será un punto de intersección entre la bisectriz y la parábola.

Para el ejemplo mostrado en la figura 5, el punto dado es A = $(-1,-1)$ y las rectas dadas son $L_1: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ y $L_2: y = -2x + 2$, todos en azul. La bisectriz y la parábola requeridas para la solución se muestran en verde con línea punteada y sus ecuaciones son, respectivamente: $-0.95x + 0.32y = -0.32$ y $x^2 + xy + 0.25\,y^2 + 2x + 3.5y = -2.25$.

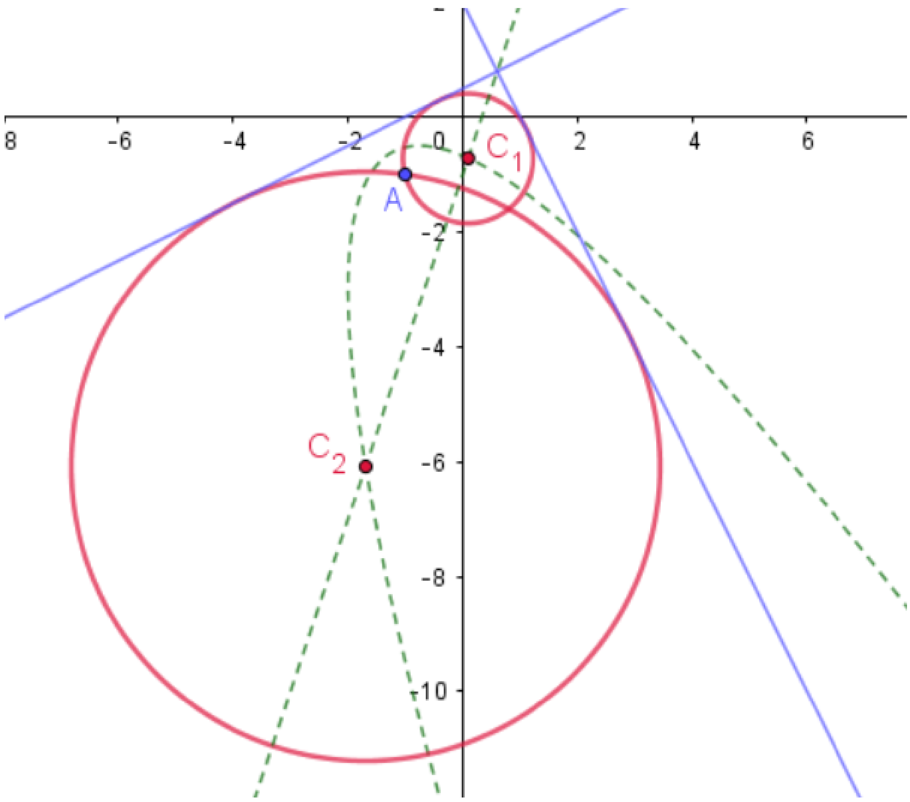

Figura 5
Solución, con GeoGebra, del caso PLL

Los puntos de intersección entre la bisectriz y la parábola (centros, marcados en rojo) son $C_1 = (0.0944,-0.7167)$ y $C_2 = (-1.6944,-6.0833)$; la ecuación de la circunferencia C_1 con centro en C_1 y que pasa por A es $(\# - 0.0944)2 + (\# + 0.7167)2 = 1.278$; y la de la circunferencia C_2 con centro en C_2 y que pasa por A es $(\# + 1.6944)^2 + (\# + 6.0833)^2 = 26.322$. La exploración con GeoGebra puede sugerir al usuario (profesor o alumno) escoger, a partir de la situación dada, cuál de las dos bisectrices es la que ha de trazarse.

5.2 Caso PPC: dos puntos y una circunferencia que no contiene en su interior a ninguno de los puntos

Digamos que la circunferencia dada tiene radio $\#_0$ y su centro en C_0 y que los dos puntos dados (A y B) están en el exterior de la circunferencia dada (trazada en azul en la figura 6).

Considerando los puntos dados, el centro es un punto de la mediatriz del segmento que tiene por extremos a esos puntos; si se considera uno de los puntos y la circunferencia, pueden presentarse dos situaciones. La primera, que la circunferencia buscada y la dada sean tangentes exteriormente (como ocurre con la circunferencia C_1, con centro en C_1). En tal caso, tendremos que $\mathrm{dist}(C, C_0) = \# + \#_0$, pero B es un punto de la circunferencia buscada, así que $r = \mathrm{dist}(C,B)$ y $\# = \mathrm{dist}(C, C_0) - \#_0 = \mathrm{dist}(C, B)$. De donde:

$$\mathrm{dist}(C, C_0) - \mathrm{dist}(C, B) = \#_0$$

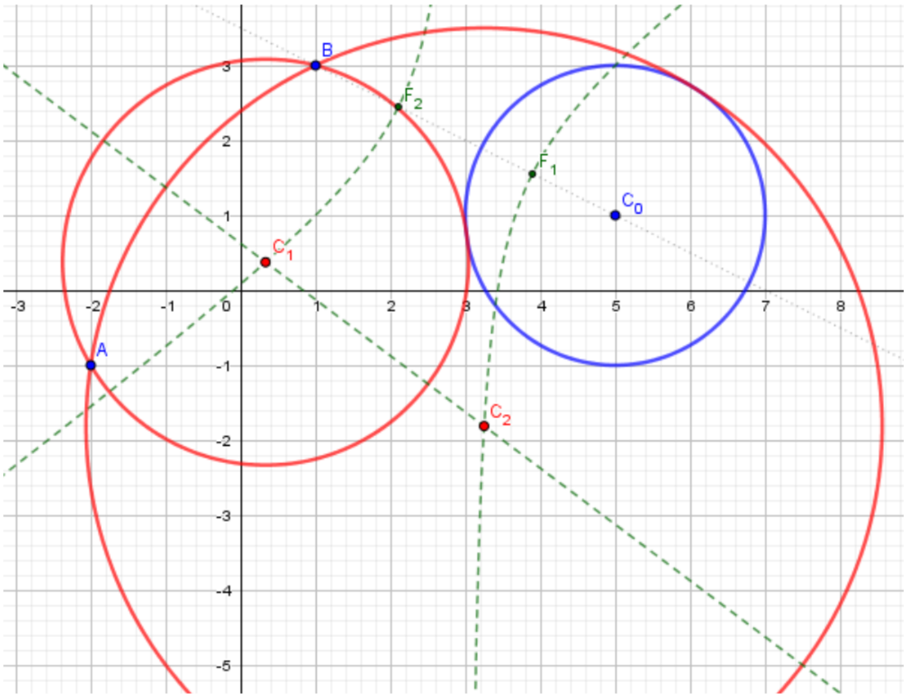

Figura 6

Solución con GeoGebra del caso PPC (puntos exteriores a la circunferencia)

Por lo tanto, C está en la hipérbola con focos en C_0 y B , y eje transversal igual a $\#_0$.

La otra situación es que la circunferencia buscada sea tangente a la circunferencia dada pero que la contenga en su interior, como ocurre con la circunferencia $\#_2$, con centro en C_2. En tal caso, tendremos que dist(C, C0) + #0 = #, pero B es un punto de la circunferencia buscada, así que # =dist(C, B), y # = dist(C, C_0) + $\#_0$ = dist(C, B), de donde dist(C, B) − dist(C, C_0) = $\#_0$.

Vemos entonces que las ecuaciones obtenidas para las dos situaciones planteadas solo difieren en el orden en el que aparecen los dos términos del lado izquierdo, por lo que, al considerar el valor absoluto de la definición de la hipérbola, se obtiene que las ecuaciones corresponden a la misma hipérbola (aunque cada una a una de sus ramas), es decir, aquella que tiene sus focos en B y C_1, y eje transversal igual a $\#_0$.

En la figura 6, los puntos dados son A = (-2,-1) y B = (1,3) y la circunferencia dada es $(\# - 5)^2 + (\# - 1)^2 = 4$, es decir, C_0 = (5,1) y $\#_0 = 2$. Al trazar con GeoGebra la mediatriz del segmento AB, se obtiene que su ecuación es 3x + 4y = 2.5. Para la hipérbola, primeramente, se obtiene el eje focal (recta que pasa por B y C_0), cuya ecuación es $\# + 2\# = 7$, luego su centro (punto medio de B y C_0) que es el punto (3,2) y luego se traza la circunferencia con centro en este punto y radio, que intersecará al eje focal en los vértices V_1 = (2.1056, 2.4472) y V_2 = (3.8944 ,1.5528). Así pues, al trazar la hipérbola con focos en B y C_0 y que pasa con cualquiera de los vértices, se obtendrá que su ecuación es $48x^2 - 64xy - 160x + 192y = 16$.

Finalmente, al ubicar los puntos de intersección de la mediatriz y la hipérbola se obtiene que los centros de las circunferencias solución son C_1 = (0.3333,0.375) y C_2 = (3.25, -1.8125).

5.3 Caso PPC: dos puntos y una circunferencia que contiene en su interior a los dos puntos

Digamos que la circunferencia dada tiene radio $\#_0$ y su centro en C_0 y que los dos puntos dados (A y B) están en el interior de la circunferencia dada (trazada en azul en la figura 7).

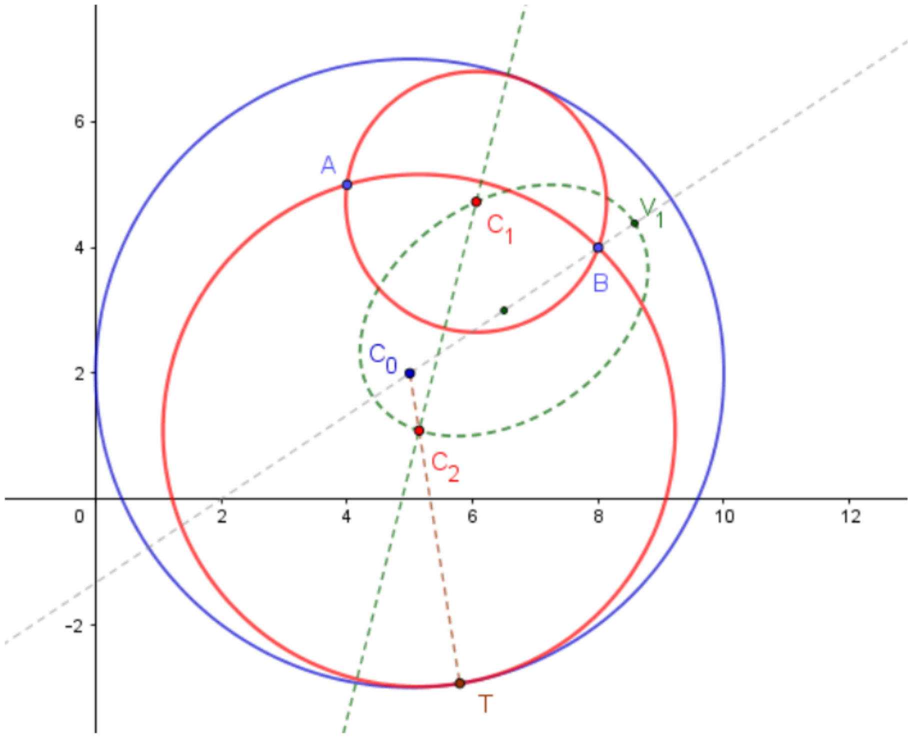

Figura 7
Solución con GeoGebra del caso PPC (puntos interiores a la circunferencia)

Al considerar los dos puntos obtenemos que el centro de la circunferencia buscada está en la mediatriz del segmento AB. Por otra parte, al considerar la circunferencia y uno de los puntos (digamos B), obtenemos que dist(C,C_0) + r = r_0 , pero r = dist(C,B) así que dist(C,C_0) + dist(C,B) = r_0. Por lo tanto, C debe ser un punto de la elipse con focos en C_0 y B cuyo diámetro mayor es r_0 y por lo tanto, C es un punto de intersección entre esta elipse y la mediatriz de AB.

En el ejemplo ilustrado en la figura 7, los puntos son A = (4,5) y B = (8,4) y la circunferencia $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$, así que $C_0 = (5,2)$ y $r_0 = 5$. Al trazar la mediatriz se obtiene que su ecuación es $4x - y = 19.5$. Para la elipse, ubicamos el eje focal (recta que pasa por C_0 y B) cuya ecuación es $2x - 3y = 4$, luego el centro (punto medio del segmento C_0B) cuyas coordenadas son (6.5, 3) y, finalmente, una circunferencia con centro en este punto y radio , que intersecará al eje focal en los vértices de la elipse, uno de los cuales es V_1 (8.58, 4.39). Ahora sí, se traza la elipse con focos en C_0 y B y que pasa por V_1, cuya ecuación resulta ser $16\#^2 -12\#\# + 21\#^2 - 172\# - 48\# = -556$.

Los puntos de intersección de la mediatriz y la elipse son $C_1 = (6.06, 4.73)$ y $C_2 = (5.15, 1.09)$ y las ecuaciones de las circunferencias con centros en C_1 y C_2

que pasan por B son $(\# - 6.06)^2 + (\# - 4.73)^2 = 4.31$ y $(\# - 5.15)^2 + (\# - 1.09)^2 = 16.62$.

5.4 Caso CCC: tres circunferencias tangentes

Este es el caso que corresponde al enunciado del problema de Apolonio de manera general.

Pensemos que se trata de una situación como la que se ilustra en la figura 8, de manera que para la circunferencia situada entre las tres dadas, la distancia entre el centro de la circunferencia buscada y el centro de cada una de las circunferencias dadas es la suma del radio de la circunferencia buscada y el de la circunferencia considerada.

Así, si $\#_1$, $\#_2$ y $\#_3$ son las tres circunferencias dadas, con centros en C_1, C_2 y C_3, y con radios $\#_1$, $\#_2$ y $\#_3$, respectivamente, y si $\#_i$ es la circunferencia buscada, con centro en C_i y radio $\#_i$, entonces:

$\mathrm{dist}(C_i, C_1) = \#_i + \#_1$, $\mathrm{dist}(C), C_2) = \#_i + \#_2$ y $\mathrm{dist}(C_i, C_3) = \#_i + \#_3$

De donde:

$\#i = \mathrm{dist}(C_i, C_1) - \#_1 = \mathrm{dist}(C_i, C_2) - \#_2 = \mathrm{dist}(C_i, C_3) - \#_3$

De aquí, si consideramos las dos primeras expresiones para $\#_i$, tendremos que $\mathrm{dist}(C_i, C_1) - \mathrm{dist}(C_i, C_2) = \#_1 - \#_2$, obteniendo ecuaciones similares en las otras dos combinaciones. Así pues, el centro de la circunferencia buscada deberá ser el punto de intersección de un par de hipérbolas, con focos en los centros de dos de las tres circunferencias dadas y eje transverso de longitud igual al valor absoluto de la diferencia de los radios de las circunferencias elegidas.

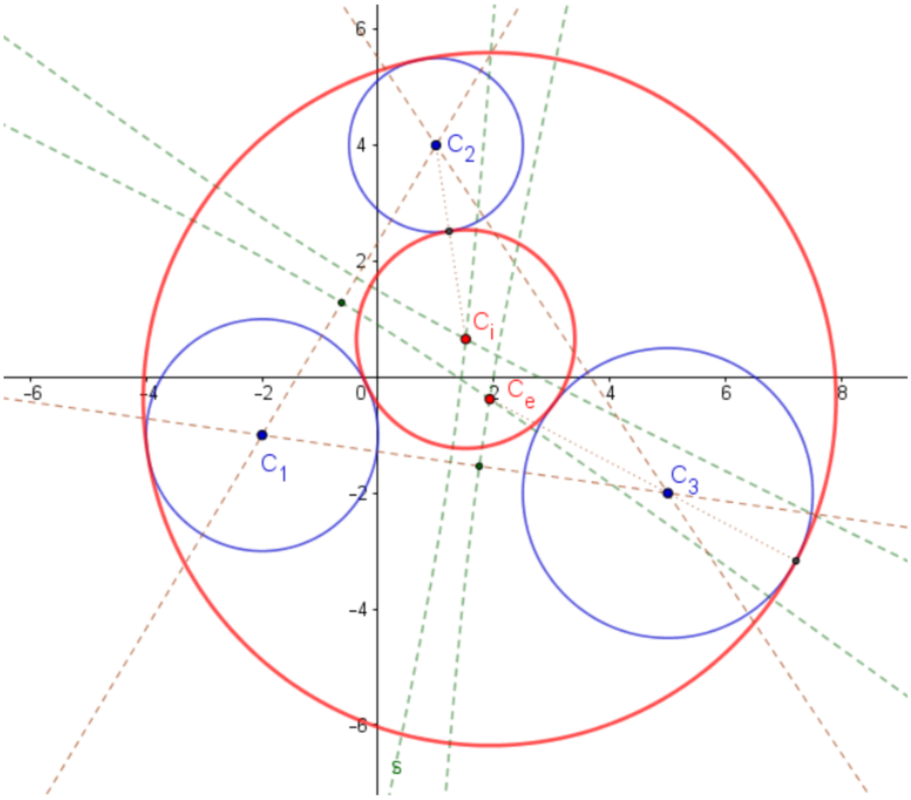

Figura 8
Ejemplo de solución con GeoGebra del caso CCC

En el caso de la circunferencia que envuelve a las tres circunferencias dadas, tendremos que la suma de la distancia entre los centros más el radio de la circunferencia dada será igual al radio de la circunferencia buscada. De manera que si $\#_e$ es la circunferencia buscada, con centro en C_e y radio $\#_e$, tendremos que:

$\#e = dist(C_e, C_1) + \#_1 = dist(C_e, C_1) + \#_2 = dist(C_e, C_3) + \#_3$

Si consideramos las dos primeras expresiones para $\#_e$, tendremos que:

$dist(C_e, C_1) - dist(C_e, C_2) = \#_2 - \#_1$

Obteniendo ecuaciones similares en las otras dos combinaciones; se llega a la misma hipérbola (la otra rama) que en la situación antes planteada.

En la figura 8, la circunferencia C_1 tiene su centro en $C_1 = (-2,-1)$ y radio de 2 unidades, $\#_2$ tiene su centro en $C_2 = (1, 4)$ y radio de 1.5 unidades, y $\#_3$ tiene su centro en $C_3= (5,-2)$ y radio de 2.5 unidades. La situación de las circunferencias en el plano fue intencional, para que se obtuviera una circunferencia que fuera tangente a las tres dadas, exteriormente (en la figura es la que tiene su centro en C_i) y otra que lo fuera interiormente con las tres (en la figura es la que tiene su centro en C_e).

También pueden explorarse otras posibilidades como que la circunferencia buscada sea tangente interiormente a dos de las circunferencias dadas y exteriormente a la tercera.

6. CONCLUSIÓN

Lo anteriormente expuesto constituye una propuesta a los docentes de cursos de geometría analítica para explorar, desde una perspectiva más cercana a la geometría que al álgebra, un conjunto de conceptos relacionados con la línea recta y las secciones cónicas.

La manera como tradicionalmente se presenta en las aulas es más cercana al álgebra y por lo general soslaya el contexto geométrico, lo que da lugar a que el alumno "se pierda" en complicados procedimientos algebraicos y no puede verificar la certeza de la solución así obtenida. Al proceder con la ayuda de un software como GeoGebra se posibilita utilizar el tiempo para atender la parte conceptual, así como habilidades para la modelación y solución de problemas; además, ambas soluciones, geométrica y algebraica, se obtienen con el software.

Además, también es posible estimular el trabajo colaborativo, al proponer alguno(s) de los 10 casos del problema de Apolonio para trabajar en pequeños grupos y aprovechar mejor todo ese tiempo que se dedica a realizar arduos procesos algebraicos o intentar hacer trazos geométricos con lápiz y papel.

Estas sugerencias podrían resultar improcedentes para un profesor que está convencido de que la matemática escolar está bien, tal y como se presenta actualmente en las aulas, en un contexto internacional que promueve una evaluación de los aprendizajes basada en exámenes estandarizados, con un claro énfasis en el aspecto operativo algorítmico.

Lo anteriormente expuesto, más bien, pretende estar en concordancia con lo establecido en el Marco Curricular de la Educación Media Superior (SEP, 2022), en donde, al referirse al área del Pensamiento matemático (PM), se indica lo siguiente:

[…] es una forma de razonamiento fundamentalmente de naturaleza lógica, sin embargo, no excluye a la intuición y a la creatividad. Está asociado con metodologías deductivas, analíticas y de tipo cuantitativo, mantiene una relación dinámica con el lenguaje matemático, en su creación, desarrollo y expresión. Este tipo de pensamiento involucra la ejecución de operaciones, procedimientos, algoritmos y procesos mentales abstractos que permiten al estudiante participar del quehacer matemático al comprender y plantear problemas de la matemática misma, de índole personal, cotidianos o de otras áreas del conocimiento. Los diferentes procesos del PM se describen y organizan, como un recurso, en cuatro categorías: procedural, procesos de razonamiento, solución/modelación de problemas, interacción y lenguaje matemático y permiten comprender otras áreas del conocimiento, tomar mejores decisiones, construir su proyecto de vida y valorar la matemática tanto por su utilidad como por su belleza (p.29).

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial

Courant, R. y Robbins, H. (2002) *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*.

Descartes, R. (1997). *La Geometría*. Ciudad de México: Limusa.

Lehmann, C. (1942). *Analytic geometry*. New York: Wiley.

Secretaría de Educación Pública. SEMS (2022). Fundamentos del Marco Curricular Común de Educación Media Superior 2022. Disponible en:http://desarrolloprofesionaldocente.sems.gob.mx/convocatoria4_2022/files/Fundamentos%20del%20MCC%20de%20Educaci%C3%B3n%20Media%20Superior.pdf