Artículos

Resultados de un análisis preliminar para el estudio de los criterios de la derivada

Results of a preliminary analysis for the study of the derivate tests

Jiménez Villalpando, Amaranta Viridiana; Zaldívar Rojas, José David

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando
amaranta.jimenez@uadec.edu.mx
Universidad Autónoma de Coahuila, México
José David Zaldívar Rojas
david.zaldivar@uadec.edu.mx
Universidad Autónoma de Coahuila, México

Investigación e Innovación en Matemática Educativa
Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C., México
ISSN-e: 2594-1046
Periodicidad: Frecuencia continua
vol. 7, 2022
revistaiime@redcimates.org

Recepción: 05 Noviembre 2021
Aprobación: 07 Abril 2022
Publicación: 25 Abril 2022

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/302/3023915004/

DOI: https://doi.org/10.46618/iime.122

Resumen: En este trabajo se presenta el análisis preliminar para un posterior diseño de situación sobre los criterios de la derivada, parte de una investigación más amplia. El propósito es discutir aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos que guiarán la realización de un diseño de situación propia para el nivel superior. Se adopta como metodología a la Ingeniería Didáctica y los hallazgos, en las dimensiones mencionadas, plantean una discusión que enfatiza la necesidad de rescatar aspectos variacionales y visuales que pudieran guiar el diseño de situación. Esto conlleva a la resignificación de los criterios de la derivada ya no como reglas para graficar funciones "complicadas", aspecto común del discurso Matemático Escolar, sino como aspectos esenciales al momento de analizar el comportamiento global de una función.

Palabras clave: Cálculo, Criterios de la derivada, Ingeniería didáctica.

Abstract: In this paper, the preliminary analysis is presented for a subsequent situation design on the derivative tests part of a broader investigation. The purpose is to discuss epistemological, didactic, and cognitive aspects that will guide the realization of a situation design for the college level. Didactic Engineering is adopted as a methodology and the findings, in the dimensions mentioned, raise a discussion that emphasizes the need to rescue variational and visual aspects that could guide the design of the situation. This leads to the resignification of the derivative tests, no longer as rules to graph "complicated" functions, a common aspect of the School Mathematical discourse, but as essential aspects when analyzing the global behavior of a function.

Keywords: Calculus, Derivative tests, Didactic engineering.

1. INTRODUCCIÓN

Los criterios de la derivada son un tema importante en los cursos de Cálculo; generalmente en cursos de nivel superior, se encuentran ubicados en la sección de "Aplicaciones". En estos cursos, parecería que la intención de los criterios de la derivada responde a la necesidad de graficar funciones "complicadas", hecho que se confirma en los análisis realizados en este reporte. Los criterios se fundamentan principalmente en la discusión de los teoremas de Rolle y del Valor Medio (TVM), criterios que validan la estrategia del llenado de tablas donde se analizan intervalos relevantes del recorrido de una función para graficar. Lo anterior provoca un trabajo memorístico de los estudiantes, quienes no alcanzan a significar los criterios de la derivada como la síntesis de un análisis variacional sobre el comportamiento global de una curva que representa a una función.

La principal motivación de este escrito es presentar los fundamentos que pudieran guiar un posterior diseño de una situación para el nivel superior, cuyo objetivo sea una resignificación de los criterios de la derivada. En este tenor se eligió el tipo de análisis preliminar que propone la Ingeniería Didáctica (ID) como guía para validar la inserción de variables didácticas y el diseño de una situación para el aula. Es común que al publicar los resultados de una investigación, este tipo de análisis no se evidencia ni se profundiza en las publicaciones. Por ello, este escrito parte de explorar la enseñanza y el aprendizaje de los criterios de la primera y segunda derivada y se discuten los hallazgos más relevantes de los análisis preliminares.

2. ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

2.1 Teoría Socioepistemológica y PyLVar

La concepción teórica bajo la cual se inscribe la investigación macro, de la que se desprende este escrito, se encuentra dentro de una perspectiva sociocultural sobre la naturaleza del pensamiento matemático que reconoce el *uso del conocimiento matemático en situaciones específicas* (Zaldívar y Briceño, 2019). Así, se asume que el pensamiento matemático está relacionado con *prácticas sociales*, las cuales permiten la emergencia de los objetos matemáticos. Este posicionamiento desde lo sociocultural, permite modelar los fenómenos didácticos desde lo sistémico y se denomina Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013). Particularmente, dentro de esta perspectiva teórica, se asume un tipo de investigación enmarcada en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar). El PyLVar se considera como parte del pensamiento matemático avanzado y trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio, además de los complejos procesos de pensamiento, es decir, se interesa por estudiar cómo las personas enfrentan *situaciones variacionales* y construyen significados de saberes matemáticos asociados. Para ello, el PyLVar estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos propios del cambio y de la variación, en el contexto social o educativo donde se encuentra inmerso. Además, estudia los procesos cognitivos involucrados en la adquisición de significados por medio de la utilización de diferentes estructuras y lenguajes variacionales de las personas cuando enfrentan situaciones cambiantes a partir del uso de los saberes matemáticos relacionados (Cantoral et al., 2000; Caballero, 2018).

Dentro del PyLVar, se asume una situación variacional como aquella que está comprendida por un conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados de cambio (Caballero, 2012). Al asumir un tipo de investigación enmarcada en el PyLVar, se propone afectar benéficamente el campo de situaciones didácticas para atender las nociones asociadas con los criterios de la derivada, donde estos últimos se resignifiquen en modelos explicativos para obtener máximos y mínimos de funciones a través del comportamiento global de la gráfica de una función y donde se organicen estrategias variacionales para tal fin. La construcción de la situación se plantea como un eslabón importante, por lo que se eligió a la ID como un medio metodológico para la validación de ciertas variables didácticas provenientes de los análisis preliminares enmarcados en la postura teórica asumida del PyLVar.

2.2 Análisis preliminares desde la perspectiva de la ID

La ID surgió en los ochenta en Francia como una forma de encontrar una relación entre la investigación y la realización didáctica, sobre lo cual Artigue precisó: "se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico" (Artigue, 1995, p. 33). Lo anterior implica que la problemática abordada en este enfoque es el diseño y evaluación de intervenciones didácticas (experimentación en el aula) y que se tomen en consideración, para la acción en el sistema de enseñanza, elementos científicos con base en la investigación empírica realizada; posteriormente se realiza una puesta en escena utilizando ciertas variables de control (Artigue, 1998; Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta, Wilhelmi, 2013). Puede decirse que la ID posee como características las siguientes: i) se basa en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza en clase y, ii) su validación es esencialmente interna a partir de la confrontación de los análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1998). Consta de cuatro fases principales: el análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la experimentación o puesta en escena y, por último, el análisis a posteriori y evaluación.

En este reporte se dará cuenta de los resultados encontrados en la primera fase de la ingeniería: el análisis preliminar respecto al cuadro didáctico general y los conocimientos didácticos relacionados con el tema de los criterios de la derivada. En este análisis preliminar se hacen dialogar entre sí tres dimensiones del saber: la dimensión didáctica (asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza), la cognitiva (asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza) y la dimensión epistemológica (asociada a las características que permitieron la constitución del saber puesto en juego) (Artigue, 1995).

Dicho análisis preliminar sobre los criterios de la derivada se realizó considerando lo siguiente:

a) Un análisis cognitivo que de cuenta de las dificultades de los estudiantes en el estudio de los criterios de la derivada a través de una revisión bibliográfica no exhaustiva. La técnica que se emplea es de tipo documental y se ubicaron reportes de investigaciones en revistas especializadas que abordaran específicamente las nociones de los criterios de la derivada o en su defecto, donde se presentaban resultados relacionados con el tema de la derivada. La elección de los reportes no se limitó a un rango de años, sino que fuera explícito el contenido abordado y que expusieran dificultades o alguna propuesta didáctica.

b) El análisis de la enseñanza tradicional, específicamente a través de un análisis de libros de texto de Cálculo donde se aborda el tema de los criterios. La elección de las obras de texto atendió en particular a lo que se marca en el plan y programa de estudios de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral de la Licenciatura en Matemáticas Aplicada (LMA) de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila.

c) El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. Específicamente para el caso de los criterios, se escogieron las obras de MacLaurin (1742) y Agnesi (1748) como fundamentales, puesto que presentan aspectos relevantes sobre los criterios y la discusión sobre propiedades y la forma en la que se abordan los máximos y mínimos son explícitas.

3. RESULTADOS: EL ANÁLISIS PRELIMINAR

En la presente sección se muestran los resultados alcanzados en este reporte y que se centran en la discusión de los análisis preliminares asociados a los criterios.

3.1 Dimensión Cognitiva

La derivada es uno de los conceptos más importantes del Cálculo, pero también es uno de los que más dificultades presenta tanto en el aprendizaje, como en su enseñanza (Briceño et al., 2018; Ponciano y Sosa, 2018). Dentro de la literatura especializada, se han reportado dificultades con el excesivo tratamiento algebraico de los cursos de Cálculo o la búsqueda de hacer cursos con rigor matemático (Artigue, 1998; Arcos, 2004; Bressoud et al., 2016, Zambrano et al., 2019).

Zandieh (2000) reporta que los estudiantes pueden usar “pseudo-objetos”; el objeto que utiliza una persona no hace referencia al proceso subyacente del objeto verdadero debido a que no tiene un entendimiento completo del objeto o porque no hay la necesidad de hacer referencia al proceso en el contexto en el que se encuentra trabajando. En este sentido puede decirse que existen múltiples pseudo-objetos para el concepto de derivada, de modo que los estudiantes tienen un conocimiento parcial de dicha noción y, además, tienen significados diferentes para el mismo concepto. Lo anterior habla de la polifacética manera en la cual la noción de derivada pudiera presentarse y las dificultades que tal abanico de posibilidades presentaría en la comprensión de dicha noción. Además, se menciona que dicho concepto puede ser representado de varias maneras: gráficamente como la pendiente de la recta tangente en un punto; verbalmente como la razón de cambio instantánea; físicamente como la rapidez o velocidad y simbólicamente como el límite del cociente de diferencias. Esto provoca entonces una variedad de significados que el estudiante debe diferenciar según el contexto de estudio; sin embargo, en varias ocasiones en estas representaciones se privilegia el cálculo de límites y lo algorítmico (Bressoud et al., 2016).

Salazar, Díaz y Bautista (2009) analizaron los niveles de comprensión del concepto de derivada en estudiantes de matemáticas y encontraron una tendencia para interpretarla como un proceso algorítmico y también tienen una dependencia de la expresión algebraica de la función. Además, los autores reportan dificultades para que los estudiantes transiten de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada. Los autores mencionan que la justificación de los estudiantes en cuanto al uso de las reglas de derivación se basa en la descripción de pasos a seguir para la resolución de problemas. Además, señalan que a partir de la gráfica los estudiantes pueden determinar el signo de la derivada en cada punto y son capaces de aplicar el criterio de la primera derivada para indicar los puntos críticos; sin embargo, no son capaces de obtener la gráfica de la función derivada. Por su parte Briceño et al. (2018) destacan que el proceso a seguir por los estudiantes requiere de expresiones algebraicas y procesos algorítmicos de por medio, siendo así incapaces de realizar una gráfica a partir de otra.

Salazar et al. (2009) reportan que cuando se suministra información a través de una representación gráfica, los estudiantes tienen dificultad para asociar la pendiente de la recta tangente con la razón de cambio instantánea en un punto. Además, estos autores mencionan que los estudiantes consideran los contextos gráficos y algebraicos de forma separada.

Por otro lado, Selden et al. (1989) reportan dificultades de estudiantes al resolver problemas no rutinarios. Por ejemplo, para el problema:

¿Tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ *alguna raíz entre -1 y 0? ¿Por qué si o por qué no?* (Selden *et al*, 1989, p. 48).

se reporta que ningún estudiante logró dar una solución acertada, lo cual implica que los estudiantes no pudieron utilizar herramientas del Cálculo incluso si ya habían aprobado un curso.

En Selden et al. (1994) se reporta que incluso los "buenos estudiantes" tienen dificultades al resolver problemas no rutinarios. Además, sugieren que una reforma del Cálculo necesita concentrarse no solo en aumentar la tasa de éxito de todos los estudiantes, sino también en mejorar su capacidad para aplicarlo de forma creativa.

La adquisición de conceptos matemáticos que les permitan a los estudiantes resolver problemas no rutinarios requiere de una correcta articulación de los registros de representación de un mismo concepto. En Hitt (2003) y Briceño et al. (2018) se menciona que se debería promover la visualización que acompañe al tratamiento algebraico como una de las acciones a favor del entendimiento de los conceptos del Cálculo. Los estudiantes suelen realizar manipulaciones algebraicas y cuando surge un error, no pueden darse cuenta dónde se encuentra debido a que sus recursos visuales se encuentran limitados.

Un antecedente matemático importante para los criterios de la derivada son los teoremas de Rolle y TVM. Respecto al TVM, Vinner (1989) realizó una investigación donde se solicitó a los estudiantes que realizaran un dibujo del mismo y que escribieran la prueba, puntualizando que la prueba podría ser visual o algebraica basándose en el teorema de Rolle:

Tome la secante AB y desplácela paralelamente a sí misma hasta que sea tangente a la curva. Denote por α a la primera coordenada del punto común a la curva y la tangente. La pendiente de AB es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y por lo tanto es la pendiente de la tangente en α que es) $f'(x)$.

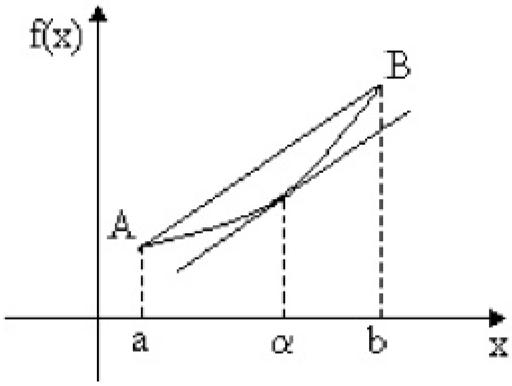


Figura 1
Hitt (1998)

Los alumnos trabajaron con la Figura 1. Para demostrar el teorema, debían de trabajar con una función auxiliar y aplicarle a esta última el Teorema de Rolle. Hitt (1998) menciona que utilizar ideas geométricas puede ser de utilidad para reconstruir la función auxiliar. De esta manera, la función auxiliar se puede construir con la ayuda de una función lineal que representa en un primer caso a la recta que pasa por los puntos$(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ y . Esta tiene que ver con la construcción de una función auxiliar que se visualiza en la Figura 2 y posteriormente a dicha función aplicarle el Teorema de Rolle. Para tal construcción se tiene que la función auxiliar es$g(x)=y(x)-f(x)$. Estas construcciones geométricas son de suma importancia pues al recordar una de ellas, lo que sigue son procesos algebraicos rutinarios. Así la función auxiliar será en este caso:

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x)$$

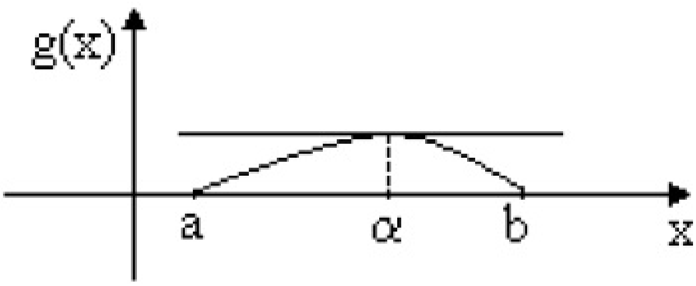


Figura 2
Hitt (1998)

En este sentido Hitt (1998) nos invita a reflexionar si es más fácil recordar de memoria la expresión algebraica de la función auxiliar $g(x)$ o reconstruirla a través de una interpretación geométrica y de la visualización de las relaciones.

Los resultados de la prueba de Vinner (1989) muestran que las oportunidades de obtener una respuesta correcta usando argumentos algebraicos es casi nula: sólo un estudiante obtuvo una respuesta correcta, mientras que 27 erraron. En cambio, con una aproximación visual, 20 estudiantes obtuvieron la respuesta correcta y 19, incorrecta. Es importante considerar que el 58% de los estudiantes, en la investigación de Vinner, eligieron la prueba visual.

Los análisis de las investigaciones anteriores ponen de manifiesto que las dificultades que presentan muchos estudiantes, con relación a las nociones de la derivada, recaen en el uso excesivo de la algoritmia y de ejercicios rutinarios. Además, existe poca vinculación entre las representaciones algebraicas y las visuales provocando una visión parcial de conceptos. Es decir, se privilegia más un significado asociado al cálculo de límites, hay una reducción a un trabajo memorístico y algebraico y, por último, existe una resistencia al uso de las consideraciones visuales.

3.2 Dimensión Didáctica

En la presente sección se decidieron analizar libros de texto. Dicha decisión obedeció principalmente a que el libro de texto es uno de los medios por los cuales se logra el consenso educativo dentro de un sistema didáctico. Además, representa qué contenidos se encuentran legitimados y exhiben formas específicas del conocimiento matemático escolar (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015). Se revisaron los siguientes textos: Stewart (2012), Larson et al. (2006) y Spivak (1996), que fueron elegidos de acuerdo a los planes de estudio de Cálculo vigente para la LMA. Una de las intenciones de esta revisión es ver la forma en la cual los libros organizan los saberes, es decir, en qué orden aparecen las nociones asociadas a los criterios de la derivada, y el tipo de ejemplos y ejercicios que plantean al lector.

El primer texto que se presenta es el texto "Cálculo de una Variable" de Stewart. El texto muestra la siguiente organización: Teorema de Rolle, el TVM y posteriormente aborda los criterios de la primera y segunda derivada. A continuación se presentan figuras con extractos tomados del texto analizado y la forma en la que aparecen las nociones:

Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Figura 3

Stewart (2012, p. 284)

Posterior a la definición, el autor provee ejemplos de funciones típicas que cumplen con las tres hipótesis marcadas en el Teorema de Rolle como se muestra en la Figura 4.

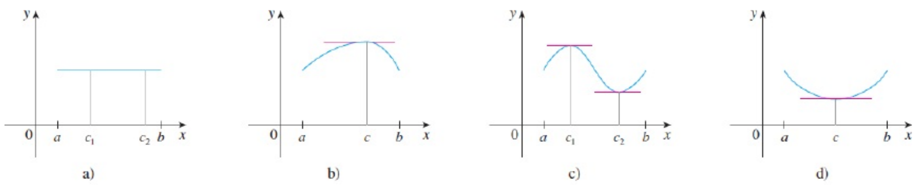


Figura 4
Stewart (2012, p. 284)

Después se presenta el TVM con su respectiva demostración:

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Figura 5
Stewart (2012, p. 285)

A continuación, Stewart (2012) menciona los criterios:

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

Figura 6
Stewart (2012, p. 291)

En la Figura 6 se puede observar que la hipótesis de derivabilidad es omitida, dando como resultado una presentación del concepto de una forma incompleta e imprecisa. Esto puede provocar en el estudiante dificultades o errores en la adquisición del concepto. Posteriormente se muestra el criterio de la segunda derivada:

Prueba de la segunda derivada Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

Figura 7
Stewart (2012, p. 295)

El tipo de ejercicios que maneja Stewart es del tipo algorítmico, como se muestra en el siguiente ejemplo: se pide al estudiante que utilice la primera y la segunda derivadas de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ junto con las asíntotas para esbozar la gráfica. Después, analiza por intervalos y se presenta el esbozo de dicha gráfica. En la Figura 8 se observa el proceso de graficación propuesto por Stewart quien concluye con una gráfica realizada en una computadora para poder comprobar.

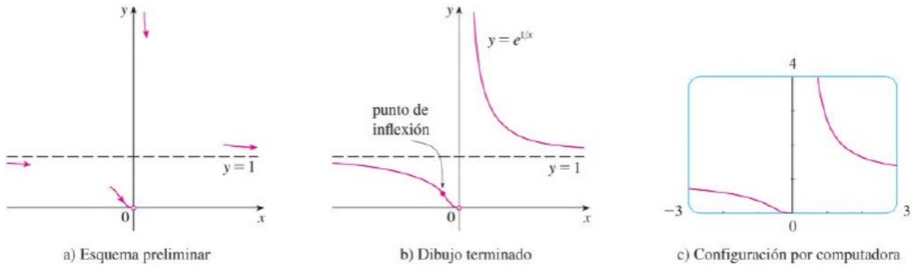


Figura 8
Stewart (2012, p. 297)

En el texto de "Cálculo Infinitesimal" de Michael Spivak (1996), aunque la organización para llegar a los criterios no difiere de otros textos, el autor no le da una relevancia a los criterios. Además, muestra la información de una manera muy condensada.

(TEOREMA DE ROLLE)

Si f es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

Figura 9
Spivak (1998, p. 265)

Posteriormente se presenta la demostración del teorema de Rolle, apoyándose de elementos gráficos y haciendo especial énfasis en la hipótesis de derivabilidad; menciona que el teorema de Rolle puede considerarse un caso particular del TVM. A continuación el autor lo muestra:

(TEOREMA DEL VALOR MEDIO)

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figura 10
Spivak (1998, p. 266)

Se proporciona la demostración del TVM utilizando el teorema de Rolle. Posteriormente se define una función creciente y decreciente, se usan argumentos similares a los de los textos anteriores y se proporcionan las Figuras 11 y 12.

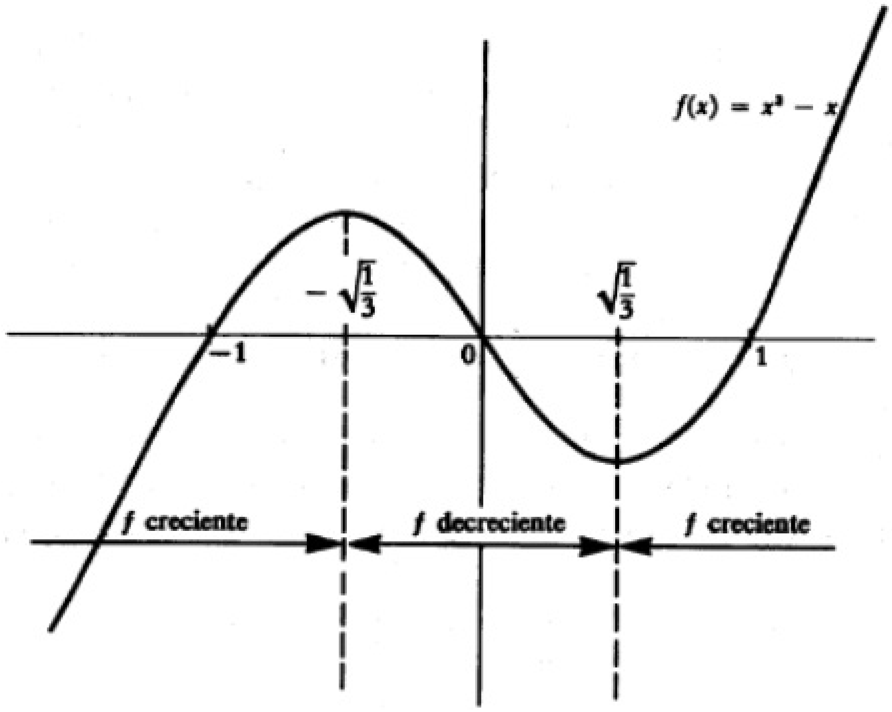


Figura 11
Spivak (1998, p. 271)

Spivak (1998) señala que si $f'(x)$ es continua, entonces el signo de $f'(x)$ en el intervalo entre dos puntos singulares adyacentes puede determinarse sencillamente hallando el signo de $f'(x)$ para cualquier x de este intervalo.

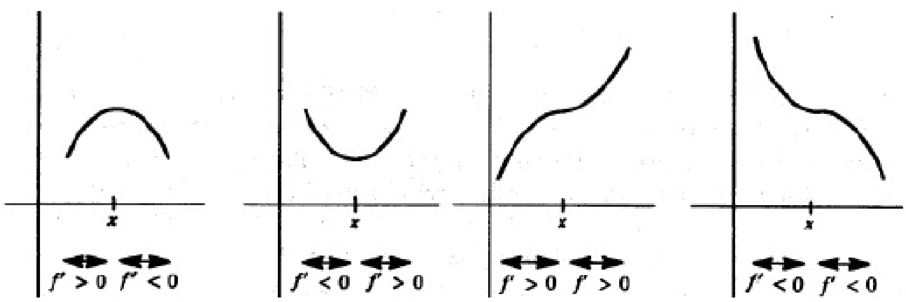


Figura 12
Spivak (1998, p. 271)

Posteriormente se presenta el criterio de la primera derivada sin mencionar explicitamente su nombre y, además, sin definir las funciones crecientes y decrecientes.

(1) Si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto máximo local.
(2) Si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto mínimo local.
(3) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de x que en algún intervalo a la derecha, entonces x no es punto máximo ni punto mínimo local.

(No hace falta aprenderse de memoria estas reglas; siempre puede uno mismo hacerse el dibujo.)

Figura 13
Spivak (1998, p. 272)

En la Figura 13 el autor hace un comentario entre paréntesis, el cual sugiere la visualización de la función y el análisis de la función derivada, para no recurrir a la memorización. El autor menciona que las funciones polinómicas pueden analizarse de esta manera y es incluso posible describir la forma general de la gráfica de tales funciones. De igual manera se presentan ejemplos de tipo operacional para la graficación de funciones polinómicas.

Posteriormente se presenta el criterio de la segunda derivada (ver figura 14).

Supongamos $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Figura 14
Spivak (1998, p. 277)

Se procede inmediatamente a la demostración del mismo, de manera similar al texto anterior, y se presenta un ejemplo de tipo operativo.

El siguiente libro analizado fue el de Larson et al. (2006), el cual muestra una organización didáctica muy similar a la presentada por Stewart. Se inicia el recorrido didáctico por una presentación de los teoremas de Rolle y TVM, para posteriormente definir en qué consisten cada uno de los criterios de la derivada y por último presenta ejercicios de aplicación directa de los mismos. A continuación mostramos el desarrollo de las nociones en el texto analizado:

TEOREMA 3.3 Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si

$$f(a) = f(b)$$

entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Figura 15
Larson et al. (2006, p. 172)

Inmediatamente después de presentar el teorema se procede a la demostración. Se pide al estudiante que encuentre las dos interseccíones de una función cuadrática bien definida y posteriormente que demuestre que $f'(x) = 0$ en algún punto entre dichas intersecciones.

Se presenta a continuación el TVM y su demostración (figura 16).

TEOREMA 3.4 El teorema del valor medio

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

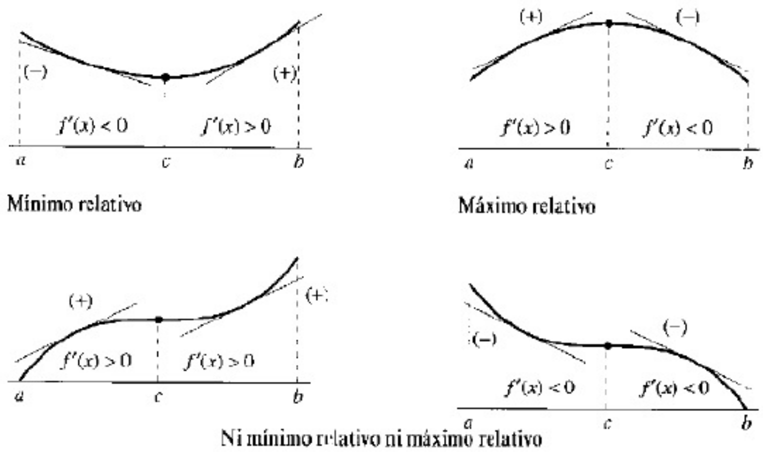
Figura 16
Larson et al. (2006, p. 174)

Posteriormente se definen las funciones crecientes y decrecientes y se presenta un criterio para dichas funciones. Después de lo anterior se presenta el criterio de la primera derivada.

TEOREMA 3.6 Criterio de la primera derivada

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Figura 17
Larson et al. (2006, p. 181)

En la Figura 17 se puede observar que Larson et al. (2006) utiliza el lenguaje gráfico directamente en la presentación del concepto, lo cual es importante ya que le muestra al estudiante la representación gráfica y algebraica, proporcionando así una visión más amplia del concepto. Por último, presenta el criterio de la segunda derivada como sigue:

TEOREMA 3.9 Criterio de la segunda derivada

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo en c, un mínimo relativo en $(c, f(c))$ o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.

Figura 18
Larson et al. (2006, p. 194)

Además, se observa que los textos contienen ejemplos que involucran el llenado de tablas a partir de un análisis de signos en la primera o segunda derivada según corresponda (Figuras 19 a la 22).

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	creciente sobre $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	decreciente sobre $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	creciente sobre $(4\pi/3, 2\pi)$

Figura 19
Stewart (2012, p. 292)

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	hacia arriba
$(0, 2)$	$-$	hacia abajo
$(2, \infty)$	$+$	hacia arriba

Figura 20
Stewart (2012, p. 295)

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba

Figura 21
Larson et al. (2006, p. 182)

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba

Figura 22
Larson et al. (2006, p. 194)

Estas tablas analizan intervalos donde la función es continua y derivable, acotados por los puntos críticos, y tienen énfasis en el uso de los criterios para la graficación de funciones que pudieran parecer "complicadas". Cabe señalar que en el texto de Spivak (1998) no vemos este tipo de tratamiento por medio de tablas.

Tras este análisis se puede observar que se privilegia el tratamiento algebraico y los criterios se usan sobre todo para construir gráficas de funciones no tan sencillas de visualizar y en las que se requiere un análisis más cuidadoso; a partir de ello se determina dónde las gráficas son crecientes, decrecientes, dónde se ubican sus puntos máximos, mínimos o de inflexión, y en ocasiones la concavidad de la curva en ciertos intervalos. Sin embargo, aunque este último análisis gráfico de funciones a través de los criterios es importante, consideramos que no promueven un análisis a través de situaciones variacionales ni la discusión del comportamiento de las funciones, sino que todo pudiera verse como una serie de "pasos" para hacer una gráfica.

En ninguno de los textos analizados se pudo encontrar una reflexión sobre los criterios donde no se obviara el privilegio de los métodos algebraicos por sobre los visuales. Este tipo de enseñanza entonces resultará en una visión restringida en los estudiantes sobre la importancia de los criterios y sobre todo un acercamiento más bien memorístico de los mismos y donde los criterios posteriormente son usados para concluir sobre problemas donde se tiene que maximizar o minimizar una función objetivo en problemas de optimización.

3.3 Dimensión Epistemológica

El Cálculo como campo de conocimiento, tardó más de un siglo en desarrollarse. Su formalización no fue una tarea trivial; las pruebas ε-δ fueron introducidas en los trabajos de Agustin-Louis Cauchy, aunque no son siempre reconocidas, ya que él dio una versión verbal del límite y no una versión tal y como la conocemos ahora.

El Cálculo en el siglo dieciocho fue utilizado para el desarrollo de notables ideas científicas, aún y cuando la manipulación de los infinitesimales carecía de demostración rigurosa. A finales del siglo XVIII aumentó el interés por parte de los matemáticos hacia ofrecer demostraciones rigurosas debido a la necesidad de enseñar. El álgebra de desigualdades era una herramienta usada en la aproximación de soluciones y es aquí donde Cauchy le dió un giro a la utilización de esta herramienta ya que el álgebra de desigualdades sienta las bases de la rigurosidad del Cálculo (Grabiner, 1983).

El objetivo del análisis epistemológico es la de indagar acerca de los indicios del uso de los criterios de la derivada por matemáticos en la antigüedad. Se halló evidencia del uso de los criterios en dos trabajos: el método de máximos y mínimos en *"Instituzioni Analitiche ad uso de la giuventu italiana"* de Maria Agnesi (1748) y el criterio de la segunda derivada hallado en el texto *"A treatise on fluxions"* publicado por Colin Maclaurin.

Uno de los primeros textos de Cálculo fue escrito por la italiana Maria Gaetana Agnesi del cual existe una traducción al inglés realizada en 1801. El concepto de máximo o mínimo, según Agnesi, es un poco diferente a las nociones que se manejan en la actualidad en los libros de texto, ya que no existía el marco de referencia cartesiano actual, sino que la argumentación se hacía desde un punto de vista geométrico mientras se trabajaba con "curvas". Se ilustra el método utilizado para encontrar máximos y mínimos con un ejemplo propuesto por Agnesi (Figura 23).

ESEMPIO I.

75. Sia la curva dell' equazione $2ax - xx = yy$, e ſi voglia ſapere, a quale punto dell' aſſe dell' aſſiſſe x corriſponda la maſſima ordinata y, e coſa ella ſia.

Figura 23

Ejemplo del método de máximos y mínimos (Agnesi, 1748)

En la figura 23 se tiene un primer ejemplo donde se utiliza el método propuesto por Agnesi. Se propone lo siguiente: *"Sea la curva con ecuación $2ax - xx = yy$ se quiere conocer en qué punto del eje, o de la abscisa x, corresponde la mayor ordenada y cuál es esta ordenada"* (nuestra traducción). Como se puede observar, el problema dentro de este ejemplo era el de hallar un máximo de la curva.

Para Agnesi, la ecuación fluxional (derivada implícita de la función original) de esto es $2a\dot{x} - 2x\dot{x} = 2y\dot{y}$, de aquí se tiene que: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a-x}{y}$. Suponiendo que $\dot{y} = 0$, el numerador de la fracción debe desaparecer, o $a - x = 0$ de donde $x = a$. Este valor es sustituido en la variable x en la ecuación propuesta, lo cual será $2aa - aa = yy$ que es $y = \pm a$. Por lo tanto la mayor ordenada positiva y negativa (para Agnesi la mayor ordenada se refiere al valor absoluto de la misma), será igual a.

Suponiendo que $\dot{y} = \infty$, el denominador de la fracción debe ser nulo y, por lo tanto, corresponde a $y = 0$, porque sustituyendo este valor en vez de y en la ecuación propuesta, debemos tener $x = 0$, y $x = 2a$. Es tanto como decir que $x = 0$ será la mínima y $x = 2a$ la máxima. O más propiamente que, cuando $x = 0$ y $x = 2a$, será infinita respecto a x: la subtangente será nula o la tangente será paralela a la ordenada y.

La ecuación propuesta corresponde a un círculo de radio a, y el cálculo de la máxima ordenada corresponde a los valores $y = \pm a$ tanto positivos como negativos. El procedimiento realizado sería el equivalente moderno para encontrar los puntos críticos de la ecuación, los cuales se encuentran cuando se anula la primera derivada.

Agnesi encuentra además los valores donde la tangente es paralela al eje de las x y encuentra el valor máximo y mínimo para la ordenada, de ahí que lo anterior sea expresado como $\dot{y} = \infty$. Agnesi argumenta por medio de la recta tangente cuando esta alcanza un punto máximo de la curva y ya no hay un corte con el segmento AM (eje x).

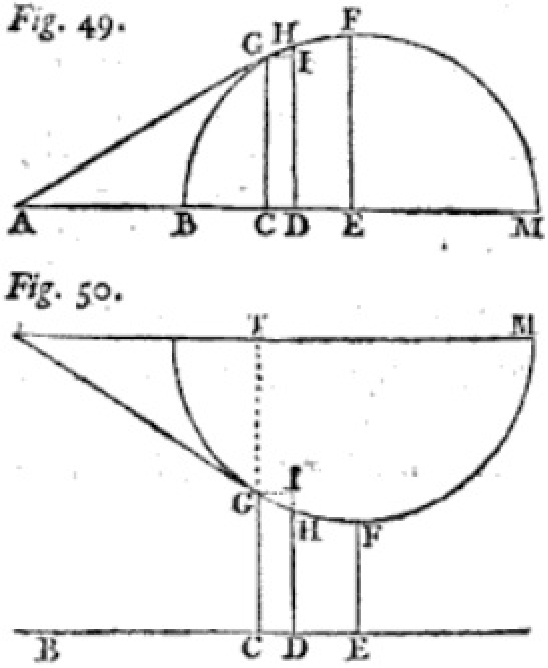


Figura 24
Figura 49 y 50 (Agnesi, 1748)

Para Agnesi, el método de máximos y mínimos se refería a un procedimiento para encontrar los límites del dominio y el rango de la curva en cuestión (Figura 24). Con base en lo anterior podemos decir que el argumento central de las explicaciones de Agnesi era geométrico basado en las propiedades de las tangentes y subtangentes a la curva estudiada.

En 1742 Colin Maclaurin publicó su *Treatise of Fluxions* el cual presenta una forma del criterio de la segunda derivada, basándose en la serie de Taylor. Maclaurin presenta el criterio de la segunda derivada como se observa en la Figura 25:

Cuando la primer fluxión de la ordenada desaparece, si al mismo tiempo la segunda fluxión es positiva, la ordenada es entonces un *mínimo*, pero es un *máximo* si la segunda fluxión es negativa, esto es, es menor en el primero, y mayor en el segundo caso que las ordenadas de las partes adyacentes de esa rama o la curva a cada lado (Traducción propia)

858. When the first fluxion of the ordinate vanishes, if at the same time its second fluxion is positive, the ordinate is then a *minimum*, but is a *maximum* if its second fluxion is then negative; that is, it is less in the former, and greater in the latter case than the ordinates from the adjoining parts of that branch of the curve on either side. This follows from what

Cuando la primer fluxión de la ordenada desaparece, si al mismo tiempo la segunda fluxión es positiva, la ordenada es entonces un *mínimo*, pero es un *máximo* si la segunda fluxión es negativa, esto es, es menor en el primero, y mayor en el segundo caso que las ordenadas de las partes adyacentes de esa rama o la curva a cada lado (Traducción propia)

Figura 25

Forma en que Maclaurin presenta el criterio de la segunda derivada. (Maclaurin, 1742)

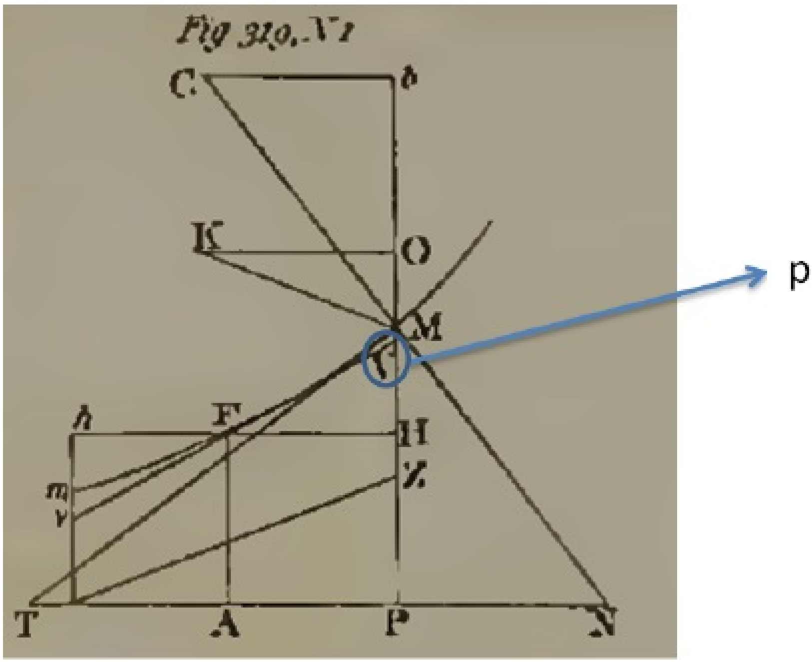


Figura 26

Figura 319 (Maclaurin, p. 282)

Sea la ordenada $AF = E$, $AP = x$, (Figura 26) y se supone que la base fluya uniformemente. La ordenada según el desarrollo de Taylor como una herramienta predictiva se expresaría como:

$$PM = E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \cdots$$

Además, tenemos la ordenada:

$$pm = E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} - \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \cdots$$

Suponga ahora que $\dot{E}=0$, entonces su las distancias AP y Ap son suficientemente pequeñas, PM y pm excederán ambos la ordenada AF cuando $\ddot{E}$ es positiva; pero serán ambos menores que AF si $\ddot{E}$ es negativa. Pero si $\ddot{E}$ es igual a cero, al igual que $\dot{E}$, y $\dddot{E}$ es diferente de cero, alguna de las ordenadas adjuntas PM o pm deberán ser mayores que AF, y la otra menor que ella; en este caso la ordenada no es ni un máximo ni un mínimo. Siempre supondremos la expresión de la ordenada positiva.

Es notable que la noción de máximo y mínimo sea distinta para ambos autores. Maclaurin posee una noción más cercana a la actual, aunque sus argumentos descansan en un análisis de la variación y de las inflexiones con un notable apoyo en recursos visuales. Agnesi carece del marco de referencia cartesiano, dejando los máximos y los mínimos como una cuestión de dominio y rango de la función. Es importante destacar que los puntos críticos en la obra de Agnesi son hallados tanto cuando la derivada es igual a cero, como cuando no existe. Este aspecto en ocasiones, en los libros de texto se obvia al dar un énfasis a funciones derivables y no incluir ejemplos paradigmáticos.

Los textos analizados destacan la importancia del uso de las representaciones gráficas para argumentar sobre los conceptos matemáticos, pero sobre todo, como dejó ver Agnesi, existe un argumento donde la noción de límite es intuitiva a la luz de un comportamiento con tendencia. En ambos casos, el interés no descansaba en graficar funciones "complicadas", sino caracterizar un comportamiento a través de sus variaciones; aspecto que en los libros de texto podría pasar desapercibido y que justificaría la ausencia de significados en los estudiantes, de acuerdo con el análisis cognitivo. Además, en el caso del trabajo de Maclaurin, el criterio de la segunda derivada se encuentra bajo un argumento predictivo, donde el desarrollo de Taylor permitiría predecir un instante posterior y el comportamiento de dicha curva a través de conocer sus variaciones de segundo orden; es decir, *la variación de la variación*.

4. REFLEXIONES FINALES

El objetivo principal del presente escrito fue exponer un análisis preliminar alrededor de una noción que, desde nuestra revisión, no ha sido abordada con profundidad previamente dentro de la literatura especializada: los criterios de la derivada. Al inscribir el análisis dentro de una ID como metodología experimental, se espera que el análisis preliminar presentado sirva de justificación para producir una situación de aprendizaje experimental que tome como hipótesis los análisis realizados con la intención de tratar didácticamente la problemática asociada a la comprensión de los criterios de la primera y la segunda derivadas. Lo anterior dentro del contexto de los primeros semestres donde se imparte la asignatura de Cálculo.

Las investigaciones de corte cognitivo permiten afirmar que una mejor comprensión de los contenidos está ligada a la construcción de significados a través de la visualización y de una articulación de dichos significados a través de diferentes registros de representación. Además, es relevante la inclusión de estrategias de visualización para poder construir ideas matemáticas más allá de la formalización, ya que es una herramienta que permite analizar, interpretar, transformar y explicar información visual, lo cual es más valioso que la mera memorización.

Las obras originales revisadas dan cuenta de una transposición didáctica que se ha realizado a lo largo del tiempo en la que las ideas geométricas y variacionales tienen un papel secundario; también se evidenciaron argumentos más intuitivos asociados a la tendencia (límite) y al uso de la variación para explicar el comportamiento. Antiguamente las gráficas tenían un papel central en las demostraciones de los conceptos matemáticos; en la actualidad, dichos conceptos matemáticos son demostrados desde una perspectiva algebraica y de consistencia en el aparato formal de la matemática, siendo la gráfica un producto secundario. Otra hipótesis que es posible generar a partir del análisis de las obras originales versa sobre la importancia del análisis de puntos de inflexión lo cual estaría relacionado con el estudio de la concavidad de la curva a partir de un análisis gráfico y variacional.

A partir del análisis de los libros de texto se puede afirmar que el tratamiento didáctico que se privilegia es algebraico. Es decir, la gráfica y su uso solamente atienden a un tratamiento ecuación-tabla de análisis a partir de los criterios-gráfica; esto obscurece un análisis variacional y visual del comportamiento de la curva a través de sus puntos de inflexión y de sus concavidades, lo cual estaría relacionado con un análisis de cómo se comporta una curva cuando es creciente o decreciente.

Como prospectiva del presente reporte, se propondrá el diseño de una situación didáctica que pretende resignificar los criterios de la derivada a la luz de los hallazgos. Esta situación se diseñará tomando en cuenta la visualización como un elemento para generar discusiones en torno a la gráfica; además se propondrá un diseño donde se discutan distintas estrategias variacionales, con la finalidad de generar significados alrededor de los criterios y que posibiliten una resignificación de los mismos.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agnesi, M. G. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*. Milán: Regia Ducal Corte.

Agnesi, M. G. (1801). *Analytical Institutions in Four Books*. Londres: Taylor y Wilks.

Arcos, J. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las Matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal. *Tiempo de Educar, 5*(10), 77-110.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, pp. 33-59. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Bressoud, D.; Ghedamsi, I.; Martínez-Luaces, V. & Törner, G. (2016). Teaching and Learning of Calculus, *ICME-13 Topical Surveys.* DOI 10.1007/978-3-319-32975-8_1

Briceño, E.; Hernández, J.; Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 10, 31- 47.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje Variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa, S.A.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepestemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9 – 28.

Grabiner, J. V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90(3):185–194.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8 (Turquía, 2013) con el título: "Didactic engineering as design-based research in mathematics education". Recuperado el 22 de junio de 2019 de: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista educación matemática*, 10(2):23–45.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. XI Encuentro de Profesores de Matemáticas de Nivel Medio Superior. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometria analítica*. México: Mc-Graw Hill Interamericana.

Maclaurin, C. (1742). *A Treatise of fluxions in two books*. Edinburgh, T.W. and T. Ruddimans.

Ponciano, E. y Sosa, L. (2018). Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática,* 11, 53- 66.

Salazar, C., Díaz, H., y Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis, 26*, 62–82. doi: 10.17227/ted.num26-421.

Selden, J., Mason, A., y Selden, A. (1989). Can average calculus students work nonroutine problems? *The Journal of Mathematical Behavior, 8*:45–50.

Selden, J., Selden, A., y Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. *MAA notes*, pp. 19–28.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. México: Reverté.

Stewart, J. (2012). *Cálculo, trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on learning problems in mathematics, 11*, 149–56.

Zaldívar, J. y Briceño, E. (2019). ¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas. *Educación Matemática, 31*(2), 212-240. DOI: 10.24844/EM3102.09.

Zambrano, R.; Escudero, D.; Flores, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258-280.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103–127.