

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO EN LA ENSEÑANZA DE LA LOCALIZACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO

Pedagogical Content Knowledge in the Teaching of Location in the Cartesian Plane

Pacheco-Muñoz, Ever; Juárez-Ruiz, Estela; Flores-Medrano, Eric

Ever Pacheco-Muñoz

ever.pacheco@alumno.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
México

Estela Juárez-Ruiz estela.juarez2000@gmail.com

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
México

Eric Flores-Medrano erflores@ucm.es

Universidad Complutense de Madrid, España

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.,
México

ISSN-e: 2594-1046

Periodicidad: Frecuencia continua

vol. 7, 2022

revistaiime@redcimates.org

Recepción: 23 Junio 2022

Aprobación: 01 Octubre 2022

Publicación: 10 Octubre 2022

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/302/3023915002/>

DOI: <https://doi.org/10.46618/iime.143>

Resumen: La presente investigación tuvo el objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico del contenido puesto en juego en el diseño de una planeación para la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. Para esto se tuvo en cuenta el modelo teórico Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) como herramienta de análisis para estudiar los conocimientos movilizados por la profesora. La metodología fue cualitativa mediante un estudio de caso instrumental con una profesora colombiana. La información se recolectó mediante el diseño de una planeación de clase y una entrevista semiestructurada. Como consecuencia del análisis, se obtuvieron descriptores que fundamentaron teóricamente los conocimientos movilizados por la profesora. La planificación de clase se mostró como un escenario propicio para estudiar el conocimiento didáctico empleado en la enseñanza de las matemáticas. El hecho de conocer diferentes estrategias de enseñanza, expectativas e intereses de los estudiantes y poseer conocimiento de las competencias matemáticas a desarrollar dejan ver las aportaciones didácticas de la profesora como un conocimiento adicional al conocimiento matemático.

Palabras clave: conocimiento didáctico del contenido, geometría, localización en el plano cartesiano, MTSK.

Abstract: The objective of this research was to characterize the pedagogical content knowledge put into play in the design of a plan for teaching location in the Cartesian plane. For this purpose, the theoretical model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) was used as an analytical tool to study the knowledge mobilized by the teacher. The methodology was qualitative through an instrumental case study with a Colombian teacher. The information was collected through the design of a lesson plan and a semi-structured interview. As a result of the analysis, descriptors were obtained that theoretically grounded the knowledge mobilized by the teacher. The lesson plan was shown to be a favorable scenario for studying the teacher's didactic knowledge used in the teaching of mathematics. The fact of knowing different teaching strategies, students' expectations and interests, and possessing knowledge of the mathematical

competences to be developed, allows the teacher's didactic contributions to be seen as additional knowledge to mathematical knowledge.

Keywords: didactic content knowledge, geometry, location in the Cartesian plane, MTSK.

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento del profesor de matemáticas ha sido foco de estudio e interés dentro de la línea de formación de profesores, centrándose en cómo desarrolla tanto la dimensión matemática como didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para Zakaryan et al. (2018), el conocimiento del profesor es visto como un pilar fundamental de su desempeño profesional para fomentar el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, el profesor de matemáticas debe desarrollar de forma adecuada el conocimiento del contenido, teniendo en cuenta las transformaciones e interacciones aplicadas al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino et al., 2016).

Existen diferentes perspectivas centradas en estudiar, analizar y caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas (e.g., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Silverman y Thompson, 2008); cada uno de ellas se centra en estudiar el conocimiento especializado que emplea el profesor de matemáticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje teniendo como punto de partida los dominios del Pedagogical Content Knowledge (PCK) y el Subject Matter Knowledge (SMK) establecidos por Shulman (1986; 1987). En esta investigación se optó por estudiar los elementos del PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido en español), el cual está conformado por tres subdominios que son: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas como se establece en el modelo teórico Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2013). Para Zakaryan et al. (2018), este modelo ha sido un instrumento para analizar el conocimiento del profesor en todas sus dimensiones de manera integrada. Para Scheiner et al. (2019), el foco de atención con respecto al conocimiento del profesor tiende a centrarse en diferentes facetas de su quehacer docente, ya sea en el conocimiento para la enseñanza o el que utiliza en el aula. Esta investigación se centra en el conocimiento para la enseñanza que se emplea en el diseño de una planeación de clase con la intención de enseñar la localización en el plano cartesiano (en adelante LPC).

Cabe resaltar que el tema de la LPC se ha introducido en los currículos escolares desde los primeros grados con el fin de que los estudiantes logren ubicarse en un espacio determinado y reconozcan las características del plano hasta llegar a localizar puntos, figuras y objetos. Para el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), al principio los niños aprenden la posición relativa como encima, detrás, cerca y entre, para luego localizar objetos y medir distancias entre puntos en una cuadrícula rectangular y, por último, en los grados medio y secundario, el plano cartesiano es útil para trabajar en el descubrimiento y análisis de las propiedades de las formas geométricas.

Asimismo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) de Colombia, incluye en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, el desarrollo de habilidades para relacionar los conceptos de dirección, distancia y posición en el espacio, sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales, y en los últimos grados, identificar las características de la localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

En términos generales, Valdespino (2017) establece que los elementos relacionados con la LPC son: representación gráfica cartesiana, ubicación espacial como: dirección y sentido sobre una línea horizontal (izquierda a derecha) o sobre una línea vertical (arriba para abajo), posición (anterior, posterior y laterales), puntos cardinales (sur-norte, oriente-poniente), ubicación de un punto en un mapa, croquis, distancia de un punto a otro, trazo y propiedades de las figuras planas (vértices, líneas y ángulos), ángulos (grados y giros), la recta (por su dirección: horizontal, vertical y oblicua; por su posición: paralelas y perpendicular) y segmentos.

Dada la importancia del desarrollo de este tema en los procesos de enseñanza-aprendizaje, en este artículo se tiene el objetivo de caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido puesto en juego en el diseño de una planeación para la enseñanza de la localización en el plano cartesiano.

2. MARCO TEÓRICO

El MTSK (Figura 1) es un modelo teórico que estudia, analíticamente, los conocimientos puestos en juego por el profesor de matemáticas (Flores et al., 2013). Para Carrillo et al. (2014), está estructurado por el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido, y las creencias y concepciones. Estas últimas se encuentran involucradas en todo el modelo, interactuando bidireccionalmente con los subdominios del modelo (Montes Navarro et al., 2018).

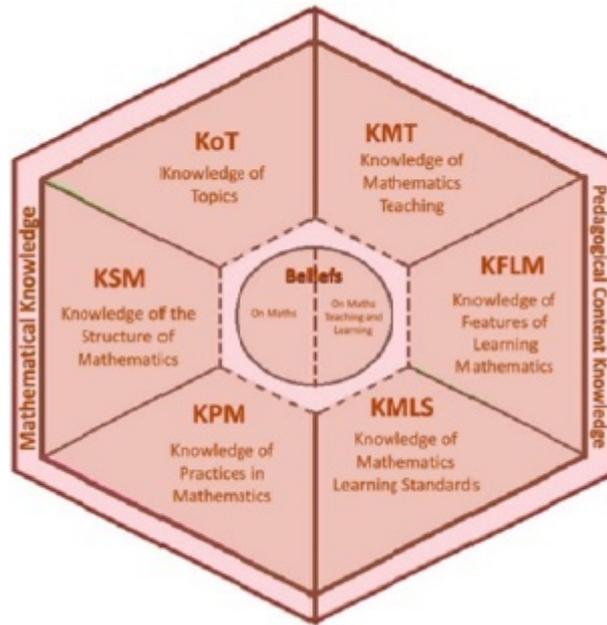


Figura 1

Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas

Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018, p. 241)

En este trabajo se describen los tres subdominios y categorías que conforman el Conocimiento Didáctico del Contenido, debido a que en el análisis de los datos recolectados solo emergieron descriptores de las categorías de este dominio. Para un estudio más completo de los otros subdominios ver (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): este subdominio incluye el conocimiento de las diferentes teorías de enseñanza, tanto institucionalizadas como personales; los recursos didácticos y los tipos de estrategias que fomentan el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales ligadas directamente al aula (Escudero, 2015; Flores et al., 2013). Para Carrillo-Yáñez et al. (2018), contiene las siguientes categorías: *teorías de la enseñanza de las matemáticas*, que incluyen el conocimiento de las teorías presentes en la literatura de los procesos de enseñanza que puede aplicarse en el diseño de oportunidades de aprendizaje; recursos didácticos (*físicos y digitales*), en esta categoría el profesor sabe la utilidad y limitaciones de los recursos para mejorar la enseñanza; y las *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, donde se tiene presente el potencial de las diferentes formas de presentar contenidos específicos, así como las posibles limitaciones y obstáculos que puedan surgir.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM): abarca el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, centrándose en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, más que en el alumno. Además, el profesor debe interpretar las producciones de los estudiantes, como el lenguaje, errores, dificultades y posibles obstáculos que pueden presentar al enfrentar un contenido (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Flores et al., 2013). Según Carrillo-Yáñez et al. (2018), tiene las siguientes categorías: *teorías del aprendizaje matemático*, que incluyen el conocimiento tanto de las

teorías personales como institucionalizadas que tiene el profesor para el proceso de aprendizaje; fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas, incluyen la conciencia de saber las fortalezas, errores, obstáculos y debilidades que el estudiante puede presentar al enfrentar cierto contenido matemático; *formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático*, consiste en las diferentes formas en que el estudiante puede interactuar (procedimientos y estrategias, tanto convencionales como no convencionales) con el objeto matemático; y *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, en esta categoría el profesor conoce los hechos o situaciones que son de interés para los estudiantes, incluyendo cosas cotidianas.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS): hace referencia al conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales y planes de estudio que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso determinado (Escudero, 2015; Flores et al., 2013). Por ejemplo, en este subdominio el estándar que usan los profesores de Colombia en el grado séptimo de básica secundaria es: “identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica” (MEN, 2006). Para Carrillo-Yáñez et al. (2018), el KMLS está conformando por las siguientes categorías: *resultados de aprendizaje esperados*, que hace referencia al conocimiento de los contenidos matemáticos que se enseñan en cualquier nivel en particular, especificaciones curriculares y habilidades específicas que es necesario desarrollar en los estudiantes; *nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental*, que involucra la secuenciación de niveles conceptuales y procedimentales del tema que se desarrolla en un momento determinado; secuencia de temas, en donde la exigencia de una determinada tarea lleva al profesor a ubicar los temas tanto retrospectivamente, en función de los conocimientos adquiridos previamente, como prospectivamente, en función de los conocimientos que será necesario adquirir posteriormente.

3. MÉTODO

La investigación es cualitativa con un estudio de caso instrumental. Stake (2007) plantea que esta modalidad se enfoca en comprender un tema particular y permite ciertas conclusiones; en nuestro caso, del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la LPC. La informante es una profesora (Nydia, en los fragmentos de entrevista) que atiende a estudiantes de 7° grado (10 a 12 años) de educación básica secundaria en Colombia. Es licenciada en matemáticas y magister en docencia de las matemáticas, y en el momento del estudio contaba con 22 años de experiencia docente en este nivel. Para la recolección de los datos, se contó con el diseño de una planeación de clase para el tema “Localización en el plano cartesiano”. Cabe resaltar que dicha planeación no fue ejecutada y que utilizó un formato dividido en momentos de la clase (Inicio, Desarrollo y Cierre) teniendo en cuenta los lineamientos, estándares y derechos básicos de aprendizajes planteados en el MEN (2006).

En esa misma línea, se realizó una entrevista semiestructurada para profundizar en los indicios u oportunidades de conocimiento didáctico evidenciados por la profesora en la planeación de clase, mediante preguntas basadas en las categorías de los subdominios del modelo MTSK, que permitieron ampliar

en la comprensión del conocimiento identificado (Moriel-Junior y Carrillo, 2014). La entrevista se realizó mediante la plataforma Google Meet, debido al confinamiento generado por la pandemia Covid-19, tuvo una duración de una hora y media, fue grabada y transcrita.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presentan los resultados evidenciados por la informante acerca del Conocimiento Didáctico del Contenido en la enseñanza de la LPC, así como su análisis y discusión. Primero se describen los momentos de la clase, teniendo en cuenta los fragmentos que evidenciaron indicios de conocimiento. Seguidamente, estos fragmentos del diseño de planeación son apoyados por extractos de entrevista, donde se realizaron preguntas para profundizar en ellos y, por último, como resultado del análisis emergió un conjunto de descriptores creados por el grupo de investigadores, que permitieron describir claramente los conocimientos movilizados por la profesora. Cabe resaltar que estos descriptores tomaron en cuenta las categorías de los subdominios del PCK.

En el momento Inicio de la planeación de clase, Nydia emplea el juego “batalla naval” para introducir el tema de la LPC, explicando las reglas y resaltando la importancia de saber dar las coordenadas de los puntos donde debe ir cada barco, como se muestra en la Figura 2.

MOMENTOS DE LA CLASE	
INICIO:	<p>Motivación: se iniciará jugando por grupos con el juego de batalla naval, primero se explicará en que consiste el juego, cuáles son las reglas del juego. También se recalcará la importancia de dar bien la coordenada donde se ubica cada barco, iniciando por el número (que indica la abscisa y luego la letra que indica la ordenada). Como consulta se deja indagar sobre el plano cartesiano y la ubicación de puntos para socializar en la próxima sesión.</p>

Figura 2

Momento de inicio del diseño de planeación de clase

Fuente: Fragmento de planeación de clase de la profesora

Cabe resaltar que este juego se tomó como un indicio de conocimiento, por lo cual, durante la entrevista se le preguntó:

Investigador: ¿Qué propósito tiene el juego “batalla naval” en la enseñanza de la LPC? Nydia: Nos ayuda a mirar más o menos cómo ellos están, o sea cómo se ubican en ese plano pues que también es el primer cuadrante prácticamente [...] para que ellos empiecen a acostumbrarse a que primero cuando uno da una posición en el plano le da la componente horizontal y luego la vertical (Nydia, Extracto de la entrevista, 9 de febrero de 2022).

Se puede observar que la profesora evidencia conocimiento del juego “batalla naval” como una estrategia de enseñanza que además de introducir al estudiante en la temática, le permite saber cómo los estudiantes se ubican en el primer cuadrante, la forma de localizar puntos en el plano cartesiano. Por tanto, la informante sabe la potencialidad del juego expresando que cuando se da una posición en el plano primero se debe dar la horizontal y luego la vertical, es decir, la forma como se localizan puntos, cómo el juego fortalece la localización de puntos en el plano cartesiano. Partiendo de lo anterior, el descriptor que sustenta el conocimiento movilizado por la profesora es: *Saber de la potencialidad del juego como estrategia de enseñanza para propiciar el aprendizaje de la LPC.*

4.1 KMT movilizado por la informante

La profesora evidencia conocimiento acerca de estrategias útiles para llevar a cabo el proceso de enseñanza, es decir, ve al juego como una forma que le ayuda a adentrarse en la temática (*estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT*). En consonancia con Flores Alejandro (2014), el juego como estrategia didáctica se hace necesario para enseñar matemáticas y facilita el aprendizaje matemático para que sea constructivo y fácil de adquirir por el educando. Por consiguiente, el docente debe tener claro sus conocimientos con el fin de facilitar el uso de estrategias didácticas dentro del aula permitiendo al estudiante un abordaje de los aprendizajes (Viloria y Godoy, 2010).

Al cierre final del momento de Inicio y comienzo del momento de Desarrollo del diseño de planeación de clase, la profesora emplea la tarea “consulta” para que los estudiantes indaguen sobre el plano y la ubicación de puntos, para luego realizar un compartir de ideas en el aula de clase (Figura 3). Es decir, la profesora explica que a partir de lo consultado por los estudiantes se abrirá un espacio donde expondrán las ideas que indagaron y al final conceptualizar qué es el plano cartesiano, sus elementos y ubicación dada su coordenada.

INICIO:	Como consulta se deja indagar sobre el plano cartesiano y la ubicación de puntos para socializar en la próxima sesión.
DESARROLLO:	Explicación: a partir de la consulta de los estudiantes se realizará una puesta en común donde se buscará conceptualizar qué es el plano cartesiano, sus elementos, la ubicación de un punto dada su coordenada.

Figura 3

Momento de inicio y desarrollo del diseño de planeación de clase

Fuente: Fragmento de planeación de clase de la profesora

En este sentido, la consulta como tarea se tomó como un indicio de conocimiento por parte de la profesora, por lo cual se le preguntó en la entrevista:

Investigador: ¿Con qué propósito coloca la tarea de consulta, indagar acerca del plano cartesiano y la ubicación de los puntos?

Nydia: Muchos llevan un montón de investigación sin entender nada de lo que escriben. Sin embargo, hay otros que ya tienen más o menos ideas. Uno dice plano cartesiano y llevan la gráfica, ubicando sus elementos, el origen, sus ejes y uno que otro ejemplo y con base en lo que ellos van diciendo uno va interactuando, corrigiéndolos, como institucionalizando ya lo que es el plano cartesiano, cómo ubicar los puntos, cuáles son sus elementos.

Investigador: Digamos en ese interactuar de ideas ¿hay una construcción del concepto de plano cartesiano? ¿Usted la da?

Nydia: Después de que ya socializamos entonces bueno empezamos, concretemos en sí el plano cartesiano, cómo está formado, para qué nos sirve, cómo se ubican los puntos, cuáles son sus elementos, retomar eso que ellos dijeron y que complementen lo que tienen ahí o aclarar de pronto esas dudas que les surgieron cuando hicieron la consulta (Nydia, Extracto de la entrevista, 9 de febrero de 2022)

En este fragmento de entrevista, se evidencia que la profesora utiliza la tarea “consultar acerca del plano cartesiano” como una estrategia de enseñanza para familiarizar a los estudiantes con los elementos y características del plano cartesiano. Además, mediante esta tarea, la profesora realiza un compartir de

ideas con el fin de ir institucionalizando el conocimiento que se manifiesta en la puesta en común, es decir, conceptualizando lo que es el plano cartesiano, cómo ubicar los puntos y cuáles son sus elementos. También se observa que la profesora prevé las formas en que los alumnos interactuarán con el objeto matemático la LPC, cuando presenten la tarea, tanto de sus características como de las dudas que pueden surgir. Finalmente, utiliza la tarea como una oportunidad para que los estudiantes interactúen con el concepto, tanto fuera como dentro del aula.

De esta manera, los descriptores que sustentan el conocimiento de la profesora acerca de la tarea de consulta son los siguientes: *saber de la potencialidad de la consulta como estrategia de enseñanza que propicia el aprendizaje de la LPC y saber de la potencialidad de la tarea como una oportunidad para que los estudiantes interactúen con las características del plano cartesiano.*

4.2 KMT y KFLM movilizado por la informante

Nydia emplea la tarea “consulta” como una estrategia para familiarizar a los estudiantes con las características del plano cartesiano (*estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT*). Sabe de las limitaciones y potencialidades que esta tarea puede brindar, es decir, sabe que algunos alumnos cuando consulten acerca del plano cartesiano traerán mucha información que pueden no van a entender o en caso contrario, alumnos que se van a familiarizar con la temática fácilmente por el hecho de tener ideas relacionadas con el mismo (*formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático, KFLM*). En este sentido, una de las funciones que debe desarrollar el profesor se centra en la selección y desarrollo de tareas útiles con el propósito de facilitar la comprensión matemática, competencias e intereses de los estudiantes (Godino et al., 2004).

En una parte del momento *Desarrollo* de la planeación de clase, la profesora emplea una actividad que consiste en entregar a los estudiantes un plano cartesiano con la ubicación de algunos objetos, con el propósito de dar solución a ciertas situaciones o interrogantes, como se muestra en la Figura 4.

DESARROLLO:

Finalmente, se dará un plano cartesiano con la ubicación de algunos objetos para que los estudiantes respondan algunas preguntas de ubicación de los objetos según ciertas condiciones.

Figura 4

Momento *Desarrollo* del diseño de planeación de clase

Fuente: Fragmento de planeación de clase de la profesora

Dicha actividad es titulada “trabajando con los cuatro cuadrantes” y fue tomada de la página web LiveWorksheets (<https://es.liveworksheets.com>), pero la profesora la modifica (Figura 4), agregando una serie de preguntas (parte inferior derecha) para orientar al estudiante.

3. Observa el plano cartesiano y escribe la coordenada de cada objeto:

Cangrejo	(,)	Circulo	(,)
Triangulo	(,)	Carita	(,)
Reloj	(,)	Búho	(,)
Caracol	(,)	Cuadrado	(,)
Avión	(,)	Sapo	(,)
Manzana	(,)	Pez	(,)

Responde las preguntas:
 ¿Qué objetos se ubican en la misma ordenada?
 ¿Qué objetos se ubican con la misma abscisa?
 ¿Cuáles objetos tienen abscisa negativa?
 ¿Cuáles objetos tienen ordenada positiva?
 ¿Qué objetos se encuentran sobre el eje x?
 ¿Qué objetos se encuentran sobre el eje y?
 ¿Qué objetos se encuentran en el cuadrante I?
 ¿Qué objetos se encuentran en el cuadrante II?
 ¿Qué objetos se encuentran en el cuadrante III?
 ¿Qué objetos se encuentran en el cuadrante IV?

Imagen tomada de <https://es.liveworksheets.com/gr1856598cs>

Figura 5

Actividad para la enseñanza de la LPC (Carrillo, (s.f))

Esta actividad se tomó como un indicio de conocimiento, por lo cual se le preguntó en la entrevista:

Investigador: ¿Cuál es el propósito de esta actividad?

Nydia: Esas preguntas buscan que ellos distingan cuáles con los cuadrantes, o sea ¿cómo se divide el plano? ¿cuál es la región que corresponde al cuadrante uno, dos? Y por eso algunas preguntas dicen ¿qué objetos se encuentran en el cuadrante I? ¿qué objetos se encuentran en el cuadrante II? O sea, que distingan los elementos que hacen parte del plano cartesiano. En otras, dicen ¿qué objetos se ubican en la misma ordenada? O ¿cuáles se ubican en la misma abscisa? O ¿cuáles están con abscisa sobre el eje o sobre el eje? Entonces empiezan a mirar qué elementos son propios del plano cartesiano y que ellos los empiecen a identificar.

Investigador: ¿Qué competencia quiere desarrollar en esta actividad de enseñanza en la LPC?

Nydia: La idea no es solo que ubique el punto, sino que trate de resolver situaciones que a partir de esa ubicación de los puntos él pueda responder. De pronto aquí es más complejo porque generalmente la resolución de problemas se centra en la parte numérica. Venga ¿cuál es el problema? ¿cuál es la operación, la respuesta y el análisis más o menos? En el plano cartesiano uno trata de ver que esa resolución sea como una resolución a ciertas situaciones que se le colocan al estudiante y por medio del plano cartesiano o la ubicación de puntos en ese plano, él pueda dar respuesta a las preguntas que aparecían en la planeación en el primer anexo. Hacia referencia a esa parte de la resolución del problema, donde se pregunta ¿cuál es el objeto que se ubica allí? ¿cuáles se encuentran sobre el eje x y sobre el eje y? como en ese sentido la resolución de situaciones (Nydia, Extracto de entrevista, 9 de febrero de 2022).

Aquí se observa que la profesora emplea recursos virtuales relacionados con la LPC. Sin embargo, conoce las limitaciones y potencialidades que esta actividad le puede aportar a los procesos de enseñanza-aprendizaje. Es decir, no utiliza la actividad como se muestra en la página web, sino que agrega una serie de preguntas para favorecer la identificación de los elementos propios del plano cartesiano, como los cuadrantes que lo conforman, los ejes, el nombre de la abscisa y la ordenada. Asimismo, la profesora toma la actividad como una estrategia de enseñanza para la LPC con el propósito de que sus estudiantes logren saber las coordenadas de un punto dado y distingan los cuatro cuadrantes

del plano y cómo se localiza un punto en ellos. Por consiguiente, tiene presente que el incorporar interrogantes a la actividad le permite plantear situaciones más complejas de ubicación y así desarrollar la competencia de resolución de problemas establecida en los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

En este sentido, los descriptores que sustentan el conocimiento de la profesora acerca de los recursos didácticos, el conocimiento de actividades como estrategia de enseñanza y el conocimiento de los estándares de competencias matemáticas se describen a continuación: *saber de la potencialidad de la página web como un recurso virtual que propicia el aprendizaje de la LPC, saber del potencial de actividades que propician el aprendizaje de la LPC y saber de los estándares curriculares en particular la resolución de problemas en la LPC.*

4.3 KMT y KMLS movilizado por la informante

En este momento de la planeación diseñada por la profesora, se evidencia conocimiento de los recursos virtuales como medio para favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por consiguiente, sabe qué tanto le pueden aportar estas actividades a los estudiantes y además sabe utilizar los propósitos de la clase para hacer adaptaciones a la misma sin perder el sentido de lo que se quiere (*recursos didácticos, KMT*). Para Mora (2003), la computadora y sus respectivos programas han sido un medio de divulgación de diferentes temas matemáticos, los cuales ayudan al docente para un buen desempeño en el desarrollo de aprendizaje y enseñanza.

Nydia reconoce la actividad, complementada con un conjunto de preguntas, como una estrategia útil para abordar la LPC, y sabe que lleva a los estudiantes a distinguir los elementos propios del plano (*estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT*). Para Vilorio y Godoy (2010), en la enseñanza de la matemática el docente debe tener presente diferentes estrategias que lleven al estudiante a redescubrir y buscar nuevos caminos para solucionar problemas e integrar los conocimientos nuevos en un sistema de relaciones y aplicación de estos. Por consiguiente, Nydia, mediante la ubicación de puntos en el plano y preguntas relacionadas, tiene presente que el estudiante puede llegar a desarrollar o resolver situaciones complejas, competencia establecida en los estándares básicos de matemáticas expedido por el MEN (1998), expresando que con esta actividad no solo busca que el estudiante ubique puntos en el plano, sino que logre dar respuesta a situaciones planteadas, mostrando la complejidad y rigurosidad del caso (*resultados de aprendizaje esperados, KMLS*). Así, la resolución de problemas no es vista como el hecho de desarrollar en los estudiantes la capacidad de comunicarse matemáticamente y utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel, sino como una interacción con situaciones problemáticas con fines didácticos (MEN, 1998).

Al final del momento de *Desarrollo* del diseño de la planeación, Nydia explica la actividad a realizar resaltando que los estudiantes deben iniciar ubicando los puntos en el plano proporcionado y luego trazar la figura que surja después. Asimismo, da a conocer que, para la segunda parte de la tarea, el estudiante debe diseñar el plano, ubicar el conjunto de puntos y trazar el polígono correspondiente, como se muestra en la Figura 6.

DESARROLLO:

Posteriormente, los estudiantes realizarán la actividad, donde inicialmente deben ubicar los puntos dada la coordenada y luego trazar la figura (en esta parte se les da el plano cartesiano) La segunda parte los estudiantes deben trazar el plano, ubicar el grupo de puntos y trazar el polígono resultante al unir los puntos.

Figura 6

Momento de desarrollo del diseño de planeación de clase

Fuente: Fragmento de planeación de clase de la profesora

Este fragmento se tomó como indicio de conocimiento de la profesora, por lo cual en la entrevista se le preguntó:

Investigador: ¿Qué le aporta esta actividad a la enseñanza de la LPC?

Nydia: Son actividades que a ellos les gustan, porque además de tener la operación, nos permiten hacer el grafo y mirar qué muñeco me va a salir, qué figura me va a salir. Entonces aquí aproveché la ubicación de los puntos, unan los puntos en forma consecutiva y miren qué figura les sale, esta es un poquito más compleja y luego se hacen los dibujos más sencillos. Por ejemplo; el triángulo y allí se aprovecha para mirar el perímetro, tipos de polígonos. (Nydia, Extracto de entrevista, 9 de febrero de 2022).

En este fragmento de entrevista la profesora tiene en cuenta actividades del agrado de los estudiantes, actividades que despiertan el interés y la motivación para aprender matemáticas. Dicha actividad la profesora la emplea como estrategia de enseñanza con el fin que los estudiantes una vez que localicen los puntos en el plano, puedan trazar la figura correspondiente mediante su unión secuenciada. Para fundamentar los conocimientos movilizados por la profesora se tienen en cuenta los siguientes descriptores: *saber de los aspectos emocionales e interés de los estudiantes en el aprendizaje de la LPC y saber de la potencialidad de actividades que propician el aprendizaje de la LPC.*

4.4 KFLM y el KMT movilizado por informante Nydia

En este momento del diseño de planeación, Nydia conoce actividades que les agradan a los estudiantes, las cuales son útiles para despertar, motivar y favorecer la LPC (*aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, KFLM*). En ese sentido, Farias y Pérez (2010) plantean que una de las funciones del docente se relaciona con la tarea de buscar formas de mantener al estudiante motivado e interesado en la clase y en los contenidos matemáticos a desarrollar. Además, el hecho de incluir este tipo de actividades resalta el potencial que tiene la profesora al momento de saber escoger materiales o recursos didácticos adecuados para su enseñanza (*estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT*). Es decir, plantea actividades de localizar puntos en el plano y luego trazar diferentes figuras, dejar ver una de las potencialidades que puede brindar dicha actividad. Para Ramírez (2016), las estrategias de enseñanza guían la práctica pedagógica del profesor teniendo en cuenta el qué y cómo se va a enseñar.

En resumen, los resultados descritos en este artículo evidencian el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) de una profesora de matemáticas en la LPC. En el análisis surgieron descriptores acerca del conocimiento de la enseñanza, de las características del aprendizaje y del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, al momento de

planificar el proceso de enseñanza para la LPC, los cuales se sintetizan y describen en forma general en la Tabla 1.

Tabla 1

Descriptores del conocimiento que provienen de la explicación de los momentos del diseño de planeación de clase

Dominio	Subdominios	Categorías	Descriptor
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	ü Saber de la potencialidad del juego como estrategia de enseñanza para propiciar el aprendizaje del objeto matemático. ü Saber de la potencialidad de la consulta como estrategia de enseñanza que propicia el aprendizaje del objeto matemático. ü Saber de la potencialidad de actividades que propician el aprendizaje del objeto matemático que se quiere enseñar.
		Recursos didácticos	ü Saber de la potencialidad de la página web como un recurso virtual que coadyuva en el aprendizaje de un objeto matemático.
	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático	ü Saber de la potencialidad de tareas de consulta como una oportunidad para que los estudiantes interactúen con el objeto matemático, fuera y dentro de la clase.
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	ü Saber de la importancia de considerar en las actividades propuestas aspectos emocionales e interés de los estudiantes, para el aprendizaje del objeto matemático.
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS)	Resultados de aprendizaje esperados	ü Saber de los estándares curriculares en particular la resolución de problemas.

5. CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo evidencian la movilización de algunos elementos del conocimiento didáctico que se emplean en el diseño de una planeación de clase para enseñar la LPC. En dichos conocimientos se resalta saber diferentes estrategias de enseñanza como situaciones problemáticas específicas y cómo son tratadas, saber la utilidad de páginas web como recurso virtual potente para la enseñanza-aprendizaje, saber de actividades que despiertan el interés y la motivación, conocer las expectativas e intereses de los estudiantes y saber de los estándares de competencias matemáticas que se requiere desarrollar.

Estos resultados dejan ver que la planeación de clase es un instrumento de recolección de datos propicio para estudiar elementos del conocimiento didáctico del contenido involucrados en la enseñanza y el aprendizaje, al igual que en las investigaciones de Paternina-Borja et al. (2021) y Pacheco-Muñoz et al. (2021). En comparación, otras investigaciones (e.g., Cayo y Contreras-González, 2020; Flores et al., 2013; Zakaryan y Ribeiro, 2016; Zakaryan et al., 2018) el escenario que se utilizó fue el aula de clase.

Asimismo, el modelo MTSK permite estudiar el conocimiento del profesor en diversas tareas relacionadas con la docencia, desde la preparación de clases, hasta el proceso mismo de enseñanza-aprendizaje en el aula (Advíncula et al., 2021). Además, el hecho de crear descriptores particulares permitió analizar y sustentar los conocimientos en la LPC y dio pie a inferir que estos descriptores se pueden utilizar como instrumento para analizar el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS) del profesor de matemáticas al enseñar otros objetos matemáticos geométricos relacionados, como por ejemplo rectas y figuras en el plano cartesiano.

Así, desarrollar un conocimiento didáctico como algo adicional al conocimiento matemático y saber estructurar los momentos de la clase con propuestas idóneas para la enseñanza-aprendizaje, dejan ver el carácter especializado del conocimiento que puede tener el profesor de matemáticas. Especializado significa que aparte del conocimiento de la materia, hay que saber cómo organizar la enseñanza de la misma y conocer la materia de una manera diferente a la de otros profesionales de las matemáticas (Scheiner et al., 2019).

Por otra parte, la planeación de clase fue una pieza clave para identificar los indicios de conocimiento de la profesora, para luego convertirlos en evidencias mediante preguntas de profundización llevadas a cabo en la entrevista. Así, el conocimiento que emplean los profesores en la preparación de la clase es una de las facetas del quehacer docente, donde se puede estudiar, analizar y caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido que se pone en juego.

Finalmente, diseñar descriptores para interpretar los conocimientos movilizados por la profesora, fortalece la identificación de los elementos de conocimiento en cada categoría de los subdominios del PCK. Queda pendiente la tarea de constatar si estos descriptores permiten caracterizar el Conocimiento Didáctico de Contenido en otros profesores de matemáticas, teniendo en cuenta las diferentes facetas del quehacer docente, tanto en la planeación de clase como en la enseñanza en el aula.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional Ciencia y Tecnología de México, mediante la beca de maestría asignada con CVU: 1100973

7. REFERENCIAS

- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12>
- Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Carrillo, V. (s.f.). *Plano cartesiano*. Liveworksheets. <https://es.liveworksheets.com/gr1856599os>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in mathematics Education*, 8 (pp. 2985-2994). Antalya: ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano, E. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones. <http://dx.doi.org/10.13140/2.1.3107.4246>
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Cayo, H. y Contreras-González, L. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación Matemática*, 32(2), 39-68. <https://doi.org/10.24844/em3202.02>
- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis de doctorado). Universidad de Huelva <http://hdl.handle.net/10272/11456>
- Farias, D. y Pérez, J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración. *Formación Universitaria*, 3(6), 33-40. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062010000600005>
- Flores Alejandro, M. (2014). Estrategias didácticas para un aprendizaje constructivista en la enseñanza de las matemáticas en los niños y niñas de nivel primaria. *Perspectivas docentes*, 52, 43-58. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6349169>
- Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, (pp. 275-282). SEIEM. <https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2004). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas En D. Godino (Ed.), *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros* (pp. 55-86). Granada, España: Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández,

- C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*, (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. MEN.
- Montes Navarro, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (13), 5–20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.226>
- Mora, D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 24(70), 181-272. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_issuetoc&pid=0798-979220030002&lng=es&nrm=iso
- Moriel-Junior, J. G., y Carrillo, J. (2014). Explorando indicios de conocimiento especializado para enseñar matemática como modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII*, (pp. 465-474). SEIEM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM, 2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA.
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. y Flores-Medrano, E. (2021, del 3 al 5 de noviembre). Relaciones entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la localización en el plano cartesiano [conferencia], (pp. 121-128). *V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Brasil.
- Paternina-Borja, O., Juárez-Ruiz, E. y Zakaryan, D. (2021, del 3 al 5 de noviembre). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: caracterización de relaciones en tema de simetrías [conferencia], (pp. 296-303). *V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Brasil.
- Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552>
- Ramírez, P. (2016). *Estrategias y métodos del docente para el aprendizaje significativo de las Matemáticas segundo grado de Educación Primaria*, (Tesis de Maestría). Tecnológico de Monterrey. <http://hdl.handle.net/11285/626490>
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Shulman, L. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), 499-511. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5>
- Stake, R. A. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

- Valdespino, E. (2017). *El conocimiento especializado de maestros mexicanos de primaria sobre el plano cartesiano*. (Tesis de maestría). Universidad Internacional de Andalucía. <http://hdl.handle.net/10334/3887>
- Viloria, N. y Godoy, G. (2010). Planificación de estrategias didácticas para el mejoramiento de las competencias matemáticas de sexto grado. *Investigación y Postgrado*, 25(1), 95-116. <https://revistas.upel.edu.ve/index.php/revinpost/article/view/1356>
- Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321. <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095>
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>