Artículos

SIGNIFICACIÓN DE LA COMBINACIÓN LINEAL A TRAVÉS DE MEZCLAS DE PINTURAS

Meaning of linear combination through paint mixtures

Zúñiga Coronel, Francisco Agustín

Francisco Agustín Zúñiga Coronel
maestro_coronel@hotmail.com
Universidad de Los Altos de Chiapas, México

Investigación e Innovación en Matemática Educativa
Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C., México
ISSN-e: 2594-1046
Periodicidad: Frecuencia continua
vol. 7, 2022
revistaiime@redcimates.org

Recepción: 06 Mayo 2021
Aprobación: 14 Febrero 2022

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/302/3023915001/

DOI: https://doi.org/10.46618/iime.95

Resumen: Este trabajo presenta significaciones para la combinación lineal. Se parte de la problemática sobre la dificultad que tienen los estudiantes en la comprensión de la combinación lineal la cual se debe a un razonamiento abstracto. El contexto de significación aporta elementos teóricos para la situación de aprendizaje. La formación de colores mediante un sistema cartesiano tridimensional se considera como un contexto de significación para la noción de combinación lineal de vectores. En este sistema se representan colores pigmentos primarios y la mezcla entre ellos. Estos colores son parte del círculo cromático y se forman por medio del conteo de gotas. Como aspectos metodológicos se plantean cuatro momentos de una situación de aprendizaje. Se analiza el trabajo de una profesora y se identifica que los significados de una matriz y de un vector sobre el eje se refieren al número de gotas de un color de pintura. La combinación lineal de dos matrices significa la mezcla de pinturas que forman un color secundario. La combinación lineal de tres matrices significa la mezcla de pinturas que cambia el tono (claro u obscuro) del color secundario.

Palabras clave: Combinación lineal, Mezclas de pinturas, Significación.

Abstract: This paper presents some significations for the linear combination. It begins with the problem about the difficulty that students have in understanding linear combination due to abstract reasoning. The significance context provides theoretical elements for the learning situation. The formation of the colors by means of a three-dimensional cartesian system is considered as a context of significance for the notion of linear combination of vectors. In this system, primary pigment colors and the mixture between them are represented. These colors are part of the chromatic circle and are formed by counting drops. As methodological aspects, four moments of a learning situation are proposed. The work of a teacher is analyzed, and she identifies the meanings of a matrix and a vector on the axis as the number of drops of a paint color. The linear combination of two matrices means the mixture of paints forming a secondary color. The linear combination of three matrices means the mixture of paints changing the tone (lighter or darker) of the secondary color.

Keywords: Linear combination, Paint mixtures, Significance.

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una asignatura que se cursa en el nivel superior, específicamente en los primeros cursos de ingeniería (Oropeza y Lezama, 2016). Una de las principales problemáticas que se identifican es la deficiente comprensión de sus conceptos: espacio vectorial, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generador, base, dimensión, entre otros (Moreno, 2001). De acuerdo con Parraguez y Jiménez (2017) esta problemática se debe a un razonamiento abstracto al operar con letras, números y símbolos que provoca alejarse de lo tangible (manipulación de objetos-cosas).

La combinación lineal es parte de los contenidos del álgebra lineal que se establece en el plan de estudios del nivel superior, específicamente, de ingeniería civil y de ingeniería en sistemas computacionales (Universidad de Los Altos de Chiapas, 2004). Uno de los libros que se utiliza para la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal es el de Larson (2015). En él, la combinación lineal se aborda en el capítulo de espacios vectoriales y se establece que un vector se puede expresar como la suma de múltiplos escalares de otros vectores.

Por ejemplo, dados los vectores

$$\boldsymbol{X} = (-1, -2, -2)$$
$$\boldsymbol{U} = (0, 1, 4)$$
$$\boldsymbol{V} = (-1, 1, 2)$$
$$\boldsymbol{W} = (3, 1, 2)$$

el vector *X* se puede expresar en combinación lineal de los vectores **U, V** y **W** de la siguiente manera

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} - 2\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}$$

Entonces, en el contexto escolar se enseña la combinación lineal como la descomposición de un vector en la suma de otros vectores, arraigado principalmente a un tratamiento algebraico. Este tratamiento provoca que los estudiantes mecanicen y memoricen, en el mejor de los casos, procesos para la resolución de ejercicios y se enfrenten con problemas ficticios. Los docentes, por su parte, eligen ejercicios del libro (resueltos y propuestos) para ser explicados en el aula. La explicación se centra en el empleo de algoritmos ya establecidos.

En el trabajo de Oropeza y Lezama (2016) se muestra la articulación del concepto de combinación lineal con el diseño de un sistema de audio (amplificador). La problemática que establecen se refiere a que los estudiantes no vinculan los conceptos con su aplicación. Señalan que el uso de representaciones geométricas complementa la comprensión de la combinación lineal. En el estudio se identifican las siguientes expresiones analíticas

$$vx\boldsymbol{V_x} + ve\boldsymbol{V_E} = \boldsymbol{V}$$

$$i1\boldsymbol{I_1} + ic\boldsymbol{I_c} = \boldsymbol{V}$$

que representan combinaciones lineales del vector V. Se observa que vx, ve, i1 e ic son escalares mientras que V_x, V_E , I_1, I_c , V, son vectores. El contexto expresa magnitudes físicas: voltaje, corriente y resistencia.

En la investigación de Beltrán y Murillo (2016) se abordan los conceptos de espacio vectorial, combinación lineal de vectores y envoltura convexa a partir del modelo de color RGB (siglas en inglés de Red, Green, Blue). Establecen que los tres colores de luz primarios son el rojo, el verde y el azul; con la mezcla de estos tres colores se puede obtener cualquier otro. En este modelo RGB se identifica cada color con un vector en el sistema tridimensional, donde cada coordenada representa la intensidad de los colores rojo, verde y azul; la mezcla de colores se representa con la suma de vectores. Señalan que “todo color se puede expresar como combinación lineal de los vectores rojo, verde y azul” (p. 28-29). Entonces, se identifica la conexión de las matemáticas con el mundo real.

Moreno (2001) aborda el concepto de combinación lineal de vectores como la mezcla de colores pigmentos (sustancia tangible). Los colores primarios son el amarillo, el azul y el rojo y con su mezcla se puede obtener cualquier otro. El objetivo del trabajo es facilitar la comprensión de la combinación lineal mediante una analogía con un cuadro pintado por un personaje famoso. Se pretende que los alumnos reconozcan, en el cuadro, los colores primarios y la mezcla entre ellos (combinación lineal).

Como se planteó en párrafos anteriores, la combinación lineal puede tener diversos significados según el contexto. En la presente investigación, se retoma a la pintura como el contexto, que según la Secretaría de Educación Pública (2011) es un arte visual que tiene la finalidad de crear o proyectar imágenes a través de mezclas de pinturas. La pintura, desde el punto de vista físico, es un líquido que manifiesta un color. La mezcla de pinturas permite crear gran variedad de colores, considerándose como una actividad que realizan carpinteros, rotulistas, artesanos, hojalateros, pintores de obras de arte, estudiantes, entre otros, cuando se enfocan en pintar objetos: muebles, láminas, mantas, paredes, figuras de barro, coches, paisajes e imágenes en hojas.

l color es una manifestación de la pintura, que como señalan Sánchez y Caldera (2016) “es un elemento significativo, que es complicado de abordar de forma absoluta [...] es reinterpretado de acuerdo a la experiencia personal de cada individuo” (p. 558). Los colores se visualizan en imágenes digitales que proyectan las pantallas de televisión y de computadoras, las cuales están conformadas por un conjunto de pixeles (cuadritos) que expresan un color específico. Estas imágenes tienen dos dimensiones que se miden por el número de cuadritos horizontales (ancho) y el número de cuadritos verticales (alto). Por ejemplo, una imagen de se muestra en la figura 1.

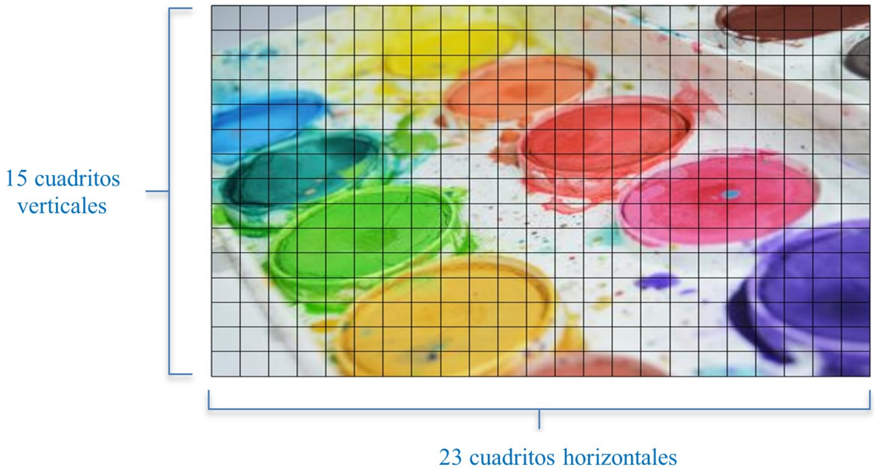


Figura 1
Representación (no exacta) de una imagen pixelada de 23 *x* 15

Las imágenes pixeladas están conformadas por cuadritos que se pintan de diversos colores; al visualizarse, en su conjunto, pueden ser interpretadas por el que pinta. Esto implica un acercamiento con la realidad por lo que se considera como un contexto de interés para los estudiantes.

1.1 Un contexto de significación para la combinación lineal

Una de las problemáticas que se reconocen en la enseñanza del álgebra lineal es la desconexión que existe entre sus contenidos y los contextos reales; como señala Gracia (2010): “la formación que recibe la mayoría de los docentes en las universidades latinoamericanas tiene un gran contenido disciplinar, que no permite siquiera reconocer la relación existente entre matemática y realidad” (p. 237). Los profesores deben buscar contextos de significación que permita que la combinación lineal adquiera significados a través de su uso en situaciones específicas (Buendía et al., 2020). Así, en el presente trabajo se propone la formación de colores a través de mezclas de pinturas que permiten el pintado de una imagen pixelada como un contexto donde la noción de *combinación lineal* adquiere significado desde su uso. Se considera entonces que la combinación lineal pudiera abordarse en el nivel básico o en el nivel medio superior procurando la transversalidad del conocimiento matemático de un nivel educativo a otro ya que los significados no recaen en un tratamiento puramente algebraico.

Hay que reconocer que, en el nivel superior, prevalece el razonamiento abstracto derivado del tratamiento algebraico. Esto permite repensar el discurso matemático escolar y generar propuestas de situaciones de aprendizaje para la construcción de conocimientos.

Así, en la presente investigación, se diseña una situación de aprendizaje con cuatro momentos cuyo objetivo es el uso de la noción de combinación lineal a través de mezclas de pinturas. Esta situación de aprendizaje se implementó experimentalmente con una profesora de nivel básico y se analizaron las producciones y significados que dicha profesora desarrolló durante la implementación de la situación de aprendizaje. La pregunta de investigación que guio el análisis de las producciones fue la siguiente: ¿cuáles son los significados que una profesora atribuye a la noción de combinación lineal de vectores cuando se trabaja en un contexto de formación de colores?

En la situación de aprendizaje implementada se considera un sistema cartesiano tridimensional puesto que permite representar tres colores y la mezcla entre ellos (Beltrán y Murillo, 2016). Resulta en una alternativa para atribuir significados a la noción de combinación lineal.

2. REFERENTES TEÓRICOS

Los objetos matemáticos pueden significarse con base en el contexto en que se ponen en juego. Como señala Reyes (2016), la significación de dichos objetos se da mediante su uso y con base en prácticas. La autora establece que hay dos tipos de contextos: el contexto situacional y el contexto de significación: "el primero se refiere a la manera de contextualizar la tarea y, el segundo, la manera de contextualizar la construcción del conocimiento matemático (basado en objetos o en prácticas)" (p. 58). También señala que, dentro del contexto situacional se identifica el contexto real "que articula a la situación de aprendizaje y el conocimiento matemático, con la noción de aprendizaje situado por parte del aprendiz" (p. 59) mientras que el contexto de significación:

Se caracteriza por hacer explícita la manera de construir el conocimiento matemático, ya sea mediante una evolución conceptual como producto del cambio de representación o la aplicación de algoritmos sucesivos, o bien, una evolución pragmática como producto de la significación mediante el uso y las prácticas (p. 59).

Como ejemplo de contexto de significación tenemos el trabajo de Buendía et al. (2020) que se refiere a la panificación (elaboración del pan) el cual puede formar parte del contexto sociocultural de los estudiantes y docentes de nivel medio superior. En la investigación mencionada, se analizan procesos de variación y el cambio del volumen de una masa de pan. La experimentación se da en el proceso de horneado donde el calor activa la fermentación de la levadura permitiendo el cambio de volumen de la masa. Los autores establecen tres momentos en la situación de aprendizaje: preparación de la masa, horneado y un análisis numérico (tablas) y gráfico. Las tablas y las gráficas se analizan para observar el comportamiento del volumen de la masa. Señalan que, "el conocimiento matemático adquiere significado a través de su uso situado y de la transversalidad que dicho escenario favorece" (p. 115).

Con base en lo anterior, en la presente investigación se toma en cuenta que el contexto de significación aporta elementos teóricos para el diseño de la situación de aprendizaje, con cuatro momentos, que permitan atribuir significados a la combinación lineal. Entonces, el contexto de significación es el pintado de una imagen pixelada. Las pinturas y su mezcla manifiestan colores que, como señala Beltrán y Murillo (2016), pueden ser representados en un sistema cartesiano tridimensional. En el caso de nuestra propuesta se pretende significar a la combinación lineal no nada más como un álgebra operatoria con vectores, sino que la combinación lineal implicará una cualidad del color, descrita por el arreglo y la combinación de diferentes colores y cantidades de estas.

El uso de la combinación lineal se reconoce en el estudio de Cuevas, Madrid y Orozco (2016) donde se analiza el procesamiento de imágenes digitales. Los datos que conforman a las matrices tienen significados en la edición de imágenes (fotografías, dibujos, pinturas, paisajes), es decir, los valores de las matrices representan una configuración de colores (verde, rojo y azul) que se requiere para editar la imagen. La combinación lineal se significa cuando se suman (o restan) dichas matrices que modifican las imágenes. El resultado de la suma de dos matrices es una fusión de imágenes (ver figura 2).

Figura 2
Fusión de imágenes

Los colores son percibidos a través de una sensación óptica (Sánchez y Caldera, 2016). En un contexto real se consideran al rojo, el amarillo y el azul como los colores pigmentos primarios (Moreno, 2001); al mezclar estos colores se observan cambios de percepción. Esta mezcla genera los colores secundarios: verde, anaranjado y violeta. Al mezclar el rojo con el amarillo se forma el anaranjado; el amarillo con el azul se forma el verde; y el azul con rojo se forma el violeta. El círculo cromático se considera una representación icónica de los colores (ver figura 3). Las figuras, en este caso, son sectores de coronas circulares y representan a un color primario o uno secundario. La visualización del círculo cromático permite el reconocimiento de los colores secundarios al observar que se encuentran entre dos primarios.

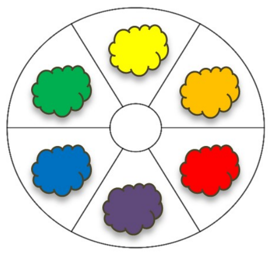


Figura 3
Círculo cromático

Esta mezcla de colores permite crear gran variedad de tonalidades dependiendo del tipo de pinturas que se consigan. La combinación lineal se puede representar con expresiones analíticas al sumar dos o más matrices. Así también, se representa con expresiones geométricas al visualizar un vector (flecha) en el sistema cartesiano tridimensional. Usando esta idea se pretende significar a la combinación lineal como un arreglo que permita combinar colores y obtener tonalidades.

2.1 Aspectos matemáticos

El sistema cartesiano tridimensional está formado de tres ejes perpendiculares entre sí. Sobre los ejes se ubican puntos que representan números reales. De acuerdo con Larson (2015) los vectores se pueden representar sobre uno de los ejes coordenados o como una resultante de dos o tres vectores (suma de vectores). Los vectores se presentan de forma analítica al operar con escalares y matrices y de forma geométrica al trabajar con vectores (flechas).

En el trabajo de Oropeza y Sánchez (2015) se hace un estudio sobre la articulación de argumentos analíticos y geométricos en combinación lineal de matrices. Establecen, como ejemplo, que una matriz se expresa como combinación lineal C= de las matrices y de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$-2A = -2\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Los vectores columna son:

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

y representan puntos que generan vectores en el plano:

$$A_1\,(-12, 4)\ \text{ y }\ A_2\,(4, 10)$$

Su representación geométrica se observa en la figura 4

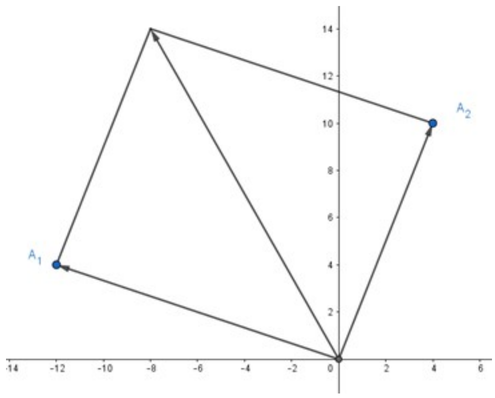


Figura 4
Representación geométrica de los vectores A_1 y A_2

Para

$$2B = 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

los vectores columna son

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Representan los siguientes puntos que generan vectores en el plano

$$B_1\,(6,\ 2)\ \text{y}\ B_2\,(8,\ 14)$$

y su representación geométrica se observa en la figura 5

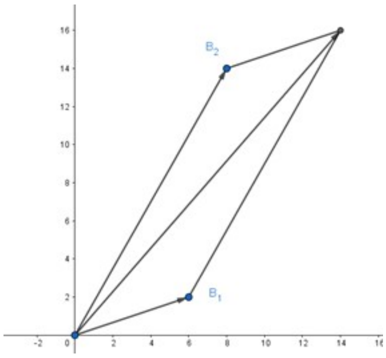


Figura 5
Representación geométrica de los vectores B_1 y B_2

Por lo tanto, la combinación lineal representa el paralelogramo generado por las resultantes de los vectores de las matrices y como se muestra en la figura 6.

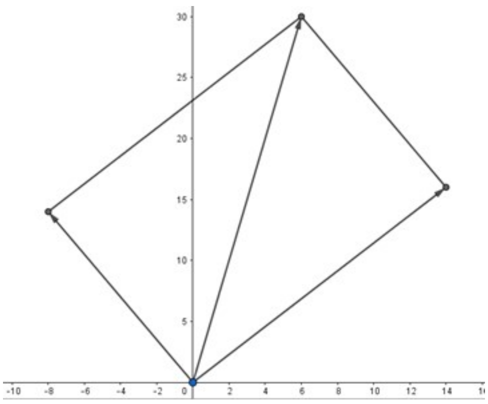


Figura 6
Representación geométrica de la suma de dos vectores

Se visualiza la combinación lineal es la suma de dos vectores (resultantes) que se genera a partir de dos matrices. El vector resultante es su representación geométrica.

Entonces, el diseño de la situación de aprendizaje retoma el tratamiento analítico al representar los colores con matrices y el tratamiento geométrico al representar vectores en un sistema coordenado tridimensional.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se presentan los cuatro momentos en el diseño de la situación de aprendizaje que se trabajó en la presente investigación con una profesora de nivel básico primaria (estudiantes de 6 a 12 años). Ella cursó con una licenciatura en Matemáticas y una licenciatura en la Enseñanza Primaria; cuenta además con treinta y ocho años de servicio. La profesora es parte del grupo de Difusión de la Investigación en Matemática Educativa (DIME) en el que se dio a conocer la situación de aprendizaje y con gusto aceptó realizar las actividades.

Se utilizó la plataforma Classroom para compartir las actividades y la recolección de datos. Los materiales planteados en la situación de aprendizaje fueron conseguidos por la profesora participante y el trabajo lo realizó desde su casa (a distancia), de manera individual, en el transcurso de quince días. Sus anotaciones fueron directamente realizadas en las hojas de trabajo de la situación de aprendizaje y fueron enviadas en archivos PDF a través de la plataforma al investigador para su posterior análisis.

3.1 Aspectos de la situación de aprendizaje

La situación de aprendizaje se centra en los significados de la combinación lineal mediante representaciones analíticas y geométricas en el contexto de formación de colores a través de mezclas de pinturas que permitan el pintado de una imagen pixelada (figura 7). La situación de aprendizaje se organiza en 4 momentos: el momento uno busca significar las matrices y la combinación lineal de matrices con la mezcla de pinturas. El momento dos tiene por objetivo significar vectores (representación geométrica) con base en las matrices y en la combinación lineal de matrices. Mientas que el objetivo del momento tres es pintar zonas de una imagen pixelada con base en los significados de las matrices y de la combinación lineal. Por último, el momento cuatro pretende significar la representación analítica y geométrica de la combinación lineal en un proceso de degradado del color.

Para el desarrollo de las actividades se requiere de los siguientes materiales: un papel cascarón de ; tres jeringas de mililitros cada una (quitar las agujas); modelo del círculo cromático; un frasco de pintura "Politec" (o de su preferencia) de 100 mililitros para cada color: azul, rojo y amarillo; una bolsa de algodón; seis tapitas (de cualquier color) de refresco; un pincel; un recipiente con agua para limpiar el pincel; cinta adhesiva; plantillas descargadas de la plataforma y aceite de cocina.

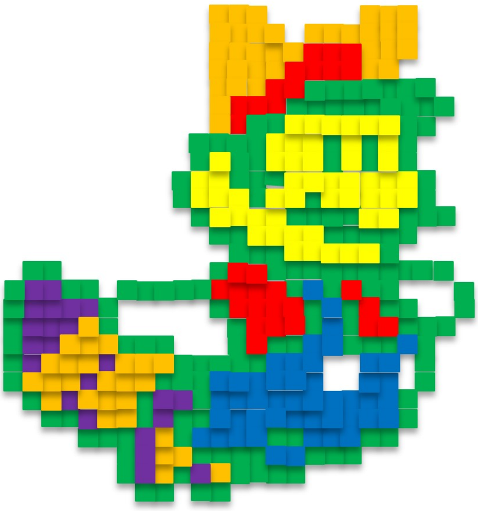


Figura 7
Imagen pixelada

3.1.1 Momento 1. Los colores y el círculo cromático

1. Coloca el papel cascarón de sobre la mesa de trabajo. Imprime la plantilla 1 (figura 8) y colócala sobre el papel cascarón. Pega los bordes con cinta adhesiva.

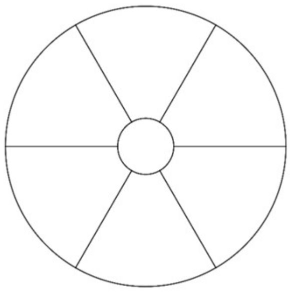


Figura 8
Modelo del círculo cromático

2. Con la cinta adhesiva pega seis tapitas en una hoja de papel, a manera de que no se muevan.
3. Considera el siguiente arreglo de colores, llamado "matriz de referencia"

$$\begin{bmatrix} \text{Azul} \\ \text{Amarillo} \\ \text{Rojo} \end{bmatrix}$$

4. Analiza la siguiente tabla

Indicadores	Descripción
1	Indica la elección de un color: azul, amarillo o rojo
0	Indica la no elección de un color.
	Indica la colocación del número de gotas que va a un lado de la matriz

5. Toma el frasco de color amarillo. Con una jeringa succiona un poco de pintura y en una tapita coloca cierto número de gotas de acuerdo con la siguiente expresión

$$\boxed{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Número de gotas

Color elegido

6. Con el pincel pinta cualquier zona del círculo cromático.

7. Coloca un bote con agua. Sumerge el pincel y con un pedazo de algodón límpialo. En el círculo cromático deja un espacio en blanco en cualquier sentido (horario o anti-horario) y pinta de azul la siguiente zona con base en la siguiente expresión

$$\boxed{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Número de gotas

Color elegido

8. Limpia el pincel. Deja un espacio en blanco en el sentido que elegiste y pinta de rojo la siguiente zona con base en la siguiente expresión

$$\boxed{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Número de gotas

Color elegido

9. Mezcla (fusiona) dos colores de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\boxed{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \boxed{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Con el pincel pinta la zona entre los dos colores mezclados. Posteriormente, responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué color es? ¿Qué cambia? ¿Por qué cambia?

10. Mezcla (fusiona) dos colores de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\boxed{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \boxed{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Con el pincel pinta la zona entre los dos colores mezclados. Posteriormente, responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué color es? ¿Qué cambia? ¿Por qué cambia?

11. Mezcla (fusiona) otros dos colores de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\boxed{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \boxed{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Con el pincel pinta la zona entre los dos colores mezclados. Posteriormente, responde los siguientes cuestionamientos:

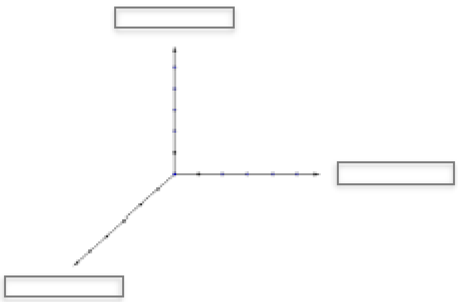
¿Qué color es? ¿Qué cambia? ¿Por qué cambia?

12. Con base al círculo cromático que pintaste responde lo siguiente:

¿Cuáles son los colores primarios? ¿Cuáles son los colores secundarios?

3.1.2 Momento 2. Los colores y su representación geométrica

1. En el sistema coordenado tridimensional coloca (en cada recuadro) un color primario distinto para cada eje.

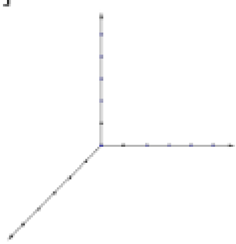


2. Cada punto en el eje indica el número de gotas para cada color. Un vector se dibuja con una flecha del origen hacia el punto correspondiente.

En el sistema coordenado pinta un vector que represente la siguiente expresión:

¿Qué color es?

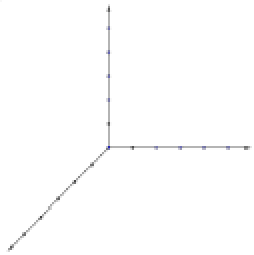
$$\boxed{4}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$



3. En el sistema coordenado pinta un vector que represente la siguiente expresión:

¿Qué color es?

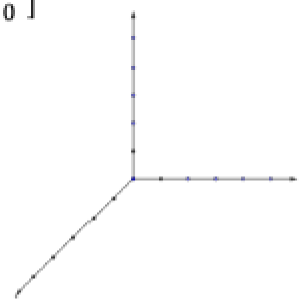
$$\boxed{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$



4. En el sistema coordenado pinta un vector que represente la siguiente expresión:

¿Qué color es?

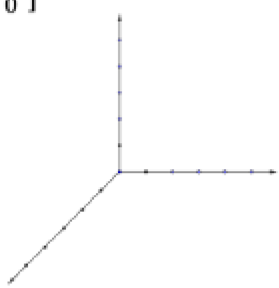
$$\boxed{5}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$



5. En el sistema coordenado pinta un vector que represente la siguiente expresión:

¿Qué color es?

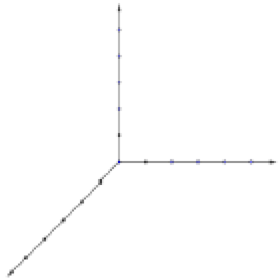
$$\boxed{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \boxed{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$



6. En el sistema coordenado pinta un vector que represente la siguiente expresión:

¿Qué color es?

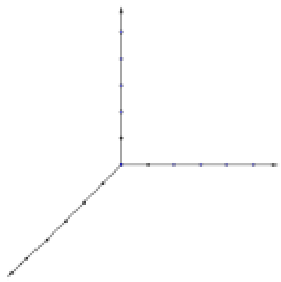
$$\boxed{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \boxed{5}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$



7. En el sistema coordenado pinta un vector que represente la siguiente expresión:

¿Qué color es?

$$\boxed{3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \boxed{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$



3.1.3 Momento 3. Los colores en una imagen pixelada

1. Imprime la plantilla base (figura 9) y las plantillas: uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis.

2. Voltea el papel cascarón y con cinta adhesiva pega los bordes de la plantilla base.

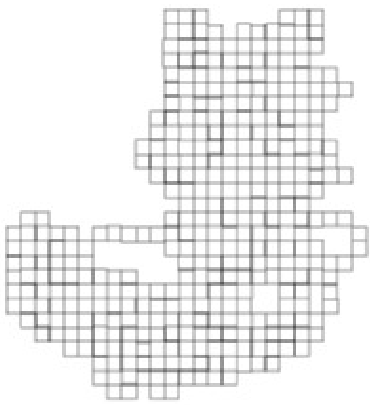


Figura 9
Plantilla base (Imagen pixelada)

3. Sobre la mesa de trabajo coloca la plantilla uno (figura 10). Pon aceite en un pedazo de algodón y pásalo sobre ella. Espera dos minutos. Coloca la plantilla uno sobre la plantilla base para ubicar la zona A. Con algún objeto señala los pixeles (cuadritos) a pintar. Con el pincel pinta esa zona de acuerdo con la siguiente representación:

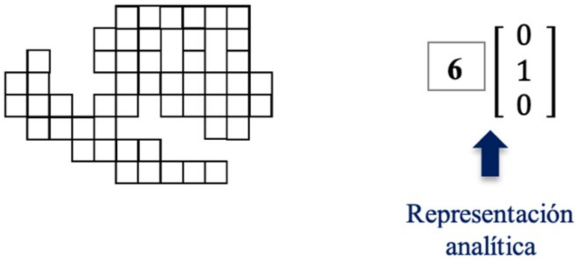


Figura 10

Plantilla uno (zona A)

Nota. Espera cinco minutos para que la pintura seque.

4. Sobre la mesa de trabajo coloca la plantilla dos (figura 11). Pon aceite en un pedazo de algodón y pásalo sobre ella. Espera dos minutos. Coloca la plantilla uno sobre la plantilla base para ubicar la zona B. Con algún objeto señala los pixeles (cuadritos) a pintar. Con el pincel pinta esa zona de acuerdo con la siguiente representación

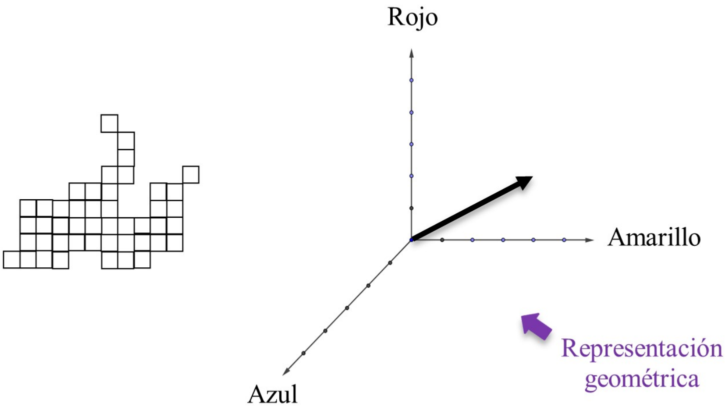


Figura 11

Plantilla dos (zona B)

Nota. Espera cinco minutos para que la pintura seque.

5. Sobre la mesa de trabajo coloca la plantilla tres (figura 12). Pon aceite en un pedazo de algodón y pásalo sobre ella. Espera dos minutos. Coloca la plantilla uno sobre la plantilla base para ubicar la zona C. Con algún objeto señala los pixeles (cuadritos) a pintar. Con el pincel pinta esa zona de acuerdo con la siguiente representación:

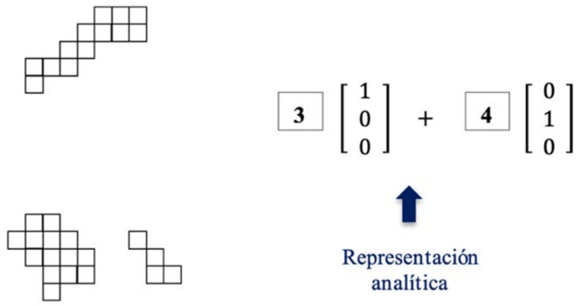


Figura 12
Plantilla tres (zona C)
Nota. Espera cinco minutos para que la pintura seque.

6. Repite el procedimiento anterior para ubicar la zona D.

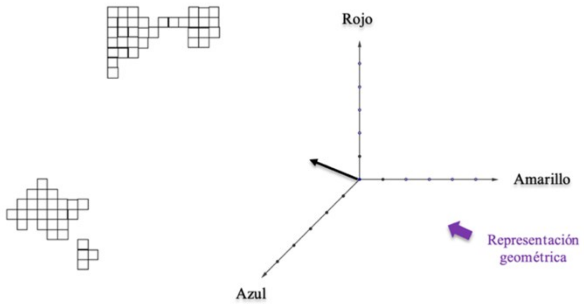


Figura 13
Plantilla cuatro (zona D)

7. Repite el procedimiento para ubicar la zona E.

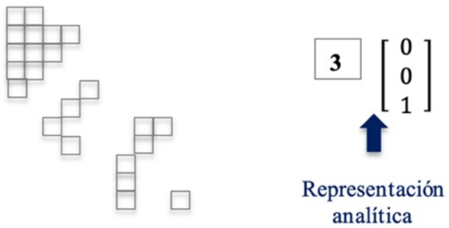


Figura 14
Plantilla cinco (zona E)

8. Repite el procedimiento para ubicar la zona F

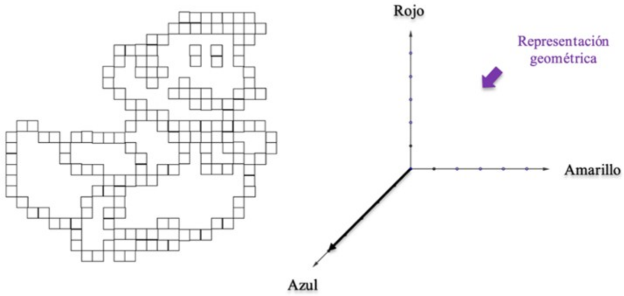


Figura 15

Plantilla seis (zona F)

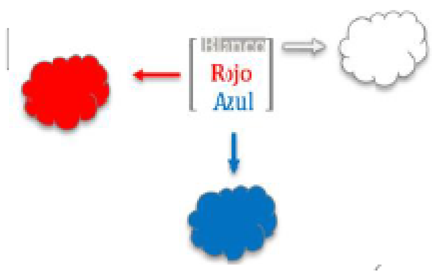
Nota. Espera a que las pinturas sequen.

9. Visualiza la imagen pintada y responde lo siguiente:

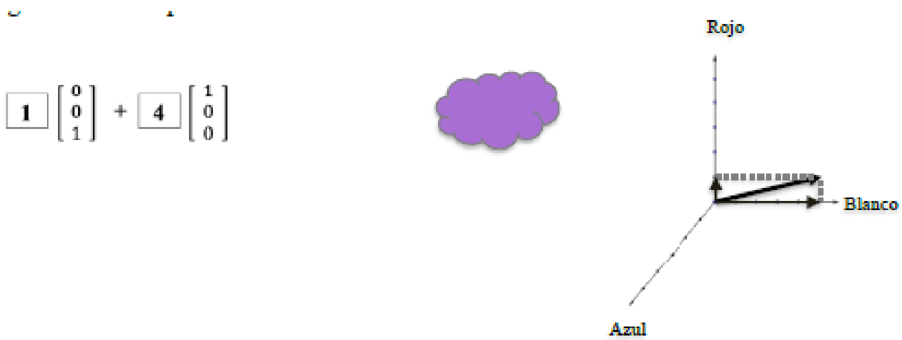
¿Qué imagen es? ¿Cuáles son los colores primarios? ¿Cuáles son los colores secundarios?

3.1.4 Momento 4. La combinación lineal y sus representaciones

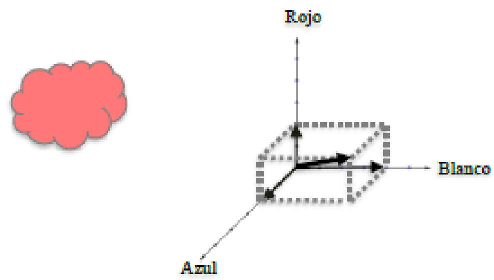
1. Considera la siguiente matriz de referencia:



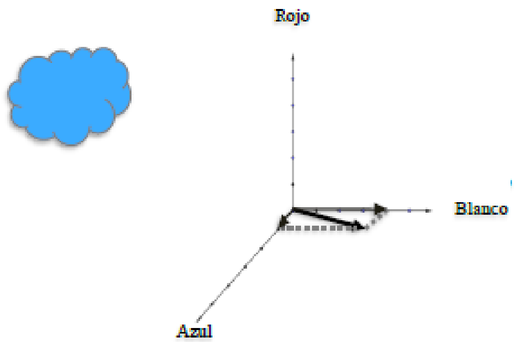
Con base en los colores que representa la matriz de referencia anterior relaciona con una línea la mancha de color con su respectiva representación analítica y con su representación geométrica. Argumenta tus respuestas.



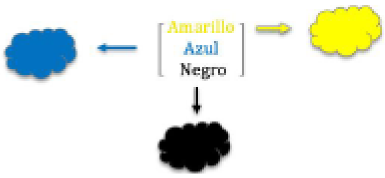
$$\boxed{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\boxed{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\boxed{4}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$



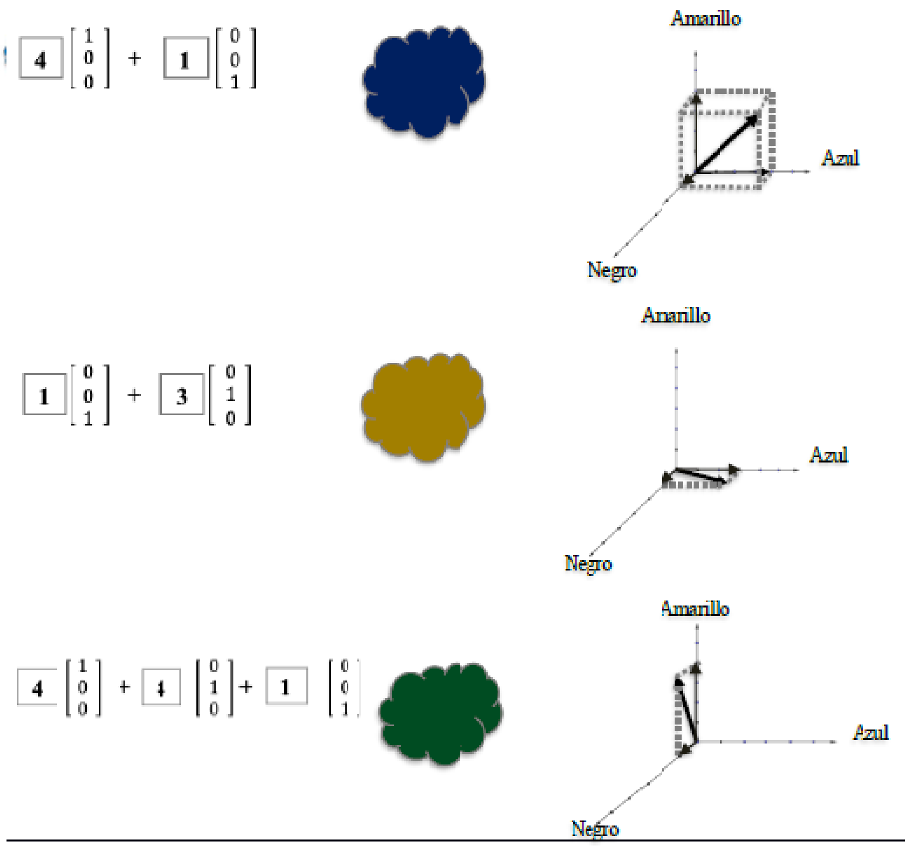
$$\boxed{5}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\boxed{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$



2. Considera la siguiente matriz de referencia:



Con base en los colores que representa la matriz de referencia anterior relaciona con una línea el color con su representación analítica y geométrica. Argumenta tus respuestas.



4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados obtenidos de la implementación de las actividades de la situación de aprendizaje se describen a continuación.

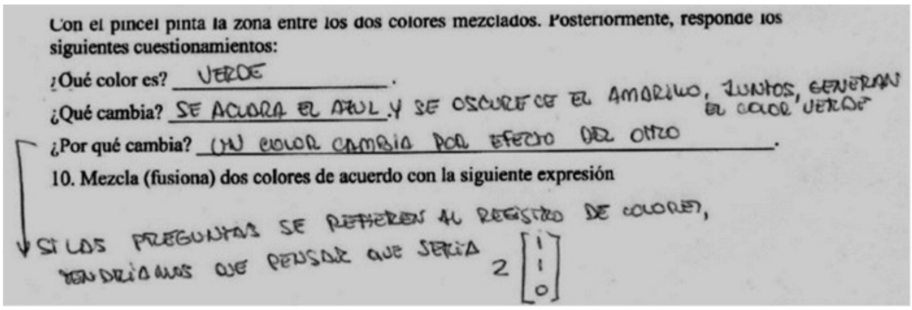
4.1 Resultados del momento 1

La profesora coloca las tapitas en forma rectangular (ver figura 16). Se observa que algunas tapitas las utiliza para los colores primarios y otras para la mezcla de colores. Señala que, "resultó muy cómodo trabajar con las tapitas pegadas al papel, permitió organizar los colores (como se ve) y aprovechar las gotas que iban sobrando".

Figura 16
Colocación de tapitas

Al trabajar con jeringas señala que, "no resultó tan sencillo trabajar con jeringas, aunque se pudo aprovechar al formato de los frascos del acrílico para hacer caer las gotas. En algunos casos los colores no cambian demasiado al ser colores demasiado precisos e intensos (azul FTALO, rojo NAVIDAD, amarillo de CADMIO)". Esto indica que los colores primarios pueden variar dependiendo de la percepción de cada persona.

Reconoce que al mezclar el azul con el amarillo se crea el verde (ver figura 17). Argumenta que el azul se aclara y se obscurece el amarillo reconociéndose una comparación. Señala que el color cambia por el efecto del otro. Establece que "si las preguntas refieren al registro de colores, tendríamos que pensar que sería$2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$", Esta reflexión es interesante porque al sumar las dos matrices se genera una matriz con dos unos en el vector columna. Este argumento puede ser un elemento para ser considerado en un rediseño de la situación de aprendizaje.



Con el pincel pinta la zona entre los dos colores mezclados. Posteriormente, responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué color es? VERDE.

¿Qué cambia? SE ACLARA EL AZUL Y SE OSCURECE EL AMARILLO, JUNTOS, GENERAN EL COLOR VERDE

¿Por qué cambia? UN COLOR CAMBIA POR EFECTO DEL OTRO.

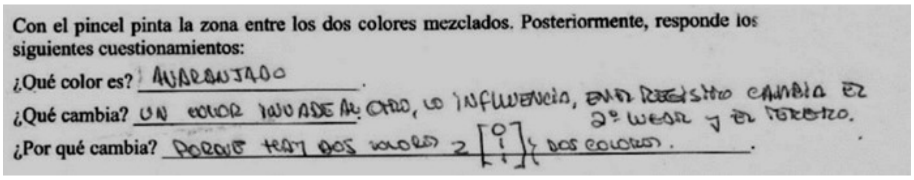
10. Mezcla (fusiona) dos colores de acuerdo con la siguiente expresión

SI LAS PREGUNTAS SE REFIEREN AL REGISTRO DE COLORES, TENDRÍAMOS QUE PENSAR QUE SERÍA $2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

Figura 17

Formación del color verde

Reconoce que al mezclar el color rojo con el amarillo se crea el anaranjado (ver figura 18). Señala que, "un color invade al otro, lo influencia". Argumenta que cambia porque hay dos colores. Plantea el registro $2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ que se refiere a la elección de dos colores con base en la matriz de referencia.



Con el pincel pinta la zona entre los dos colores mezclados. Posteriormente, responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué color es? ANARANJADO.

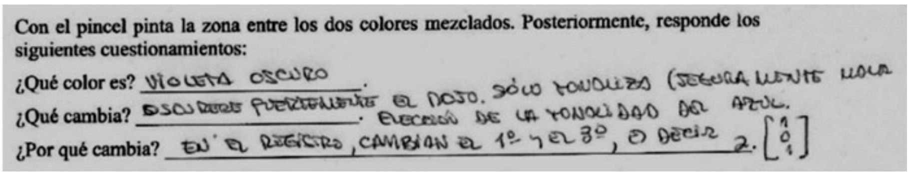
¿Qué cambia? UN COLOR INVADE AL OTRO, LO INFLUENCIA, EN EL REGISTRO CAMBIA EL 2º LUGAR Y EL TERCERO.

¿Por qué cambia? PORQUE HAY DOS COLORES $2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 2 DOS COLORES.

Figura 18

Formación del color anaranjado

Reconoce que al mezclar el color rojo con el azul se crea el violeta obscuro (ver figura 19). Señala que, "oscurece fuertemente el rojo (seguramente por la tonalidad del azul)". Plantea el registro $2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ que se refiere a la elección de dos colores con base a la matriz de referencia.



Con el pincel pinta la zona entre los dos colores mezclados. Posteriormente, responde los siguientes cuestionamientos:

¿Qué color es? VIOLETA OSCURO.

¿Qué cambia? OSCURECE FUERTEMENTE EL ROJO. SÓLO TONALIZA (SEGURAMENTE HUBO ELECCIÓN DE LA TONALIDAD DEL AZUL.

¿Por qué cambia? EN EL REGISTRO, CAMBIAN EL 1º Y EL 3º, O DECIR 2. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

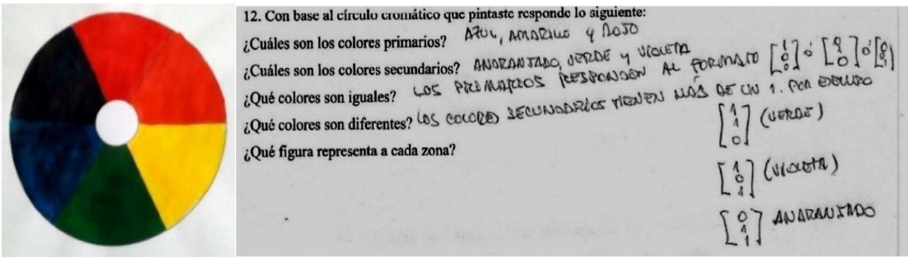
Figura 19
Formación del color violeta

Con base en las expresiones analíticas pinta el círculo cromático (figura 20). Se visualiza que los colores secundarios están entre dos colores primarios. Reconoce que los colores primarios son el azul, el amarillo y el rojo; los colores secundarios son el anaranjado, el verde y el violeta. Establece que los colores primarios responden al formato (un solo uno en la columna):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}]$$

Y los colores secundarios al formato (dos unos en la columna):

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$



12. Con base al círculo cromático que pintaste responde lo siguiente:

¿Cuáles son los colores primarios? AZUL, AMARILLO Y ROJO

¿Cuáles son los colores secundarios? ANARANJADO, VERDE Y VIOLETA

¿Qué colores son iguales? LOS PRIMARIOS RESPONDEN AL FORMATO $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

¿Qué colores son diferentes? LOS COLORES SECUNDARIOS TIENEN MÁS DE UN 1. POR EJEMPLO

¿Qué figura representa a cada zona?

$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ (VERDE)

$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (VIOLETA)

$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ANARANJADO

Figura 20
Formación del círculo cromático

Como se puede observar en las respuestas de la profesora, fue capaz de construir con base en las indicaciones, el círculo cromático, reconociendo los arreglos vectoriales como un color determinado y la combinación lineal como la formación de otro color. Es importante mencionar que la profesora reconoció que la formación de un color primario se podía representar por un vector con dos entradas diferentes de cero.

4.2 Resultados del momento 2

En el análisis de las producciones de la profesora, se observa que la profesora asigna un color para cada eje del sistema coordenado (figura 21). Relaciona la representación analítica con un vector unitario sobre el eje de color rojo.

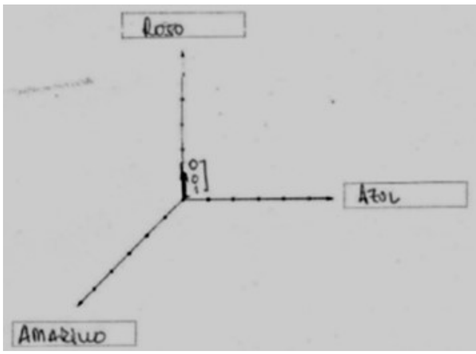


Figura 21

Vector unitario que representa el color rojo

Retoma el vector unitario para formar un vector de magnitud cuatro que expresa el número de gotas de color rojo (figura 22).

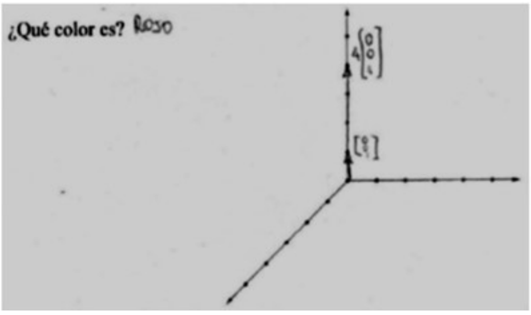


Figura 22

Vector que representa cuatro gotas de color rojo

Relaciona la representación analítica con la geométrica. Dibuja un vector con magnitud dos sobre el eje de color azul y un vector con magnitud tres sobre el eje de color amarillo (figura 23). Argumenta que el color que se obtiene es verde claro.

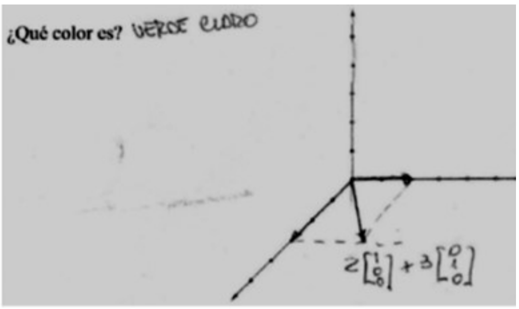


Figura 23

Vector que representa la formación del color verde claro.

Dibuja un vector con magnitud uno sobre el eje de color azul y un vector con magnitud cinco sobre el eje de color rojo (figura 24). Argumenta que el color que se obtiene es violeta (casi lila).

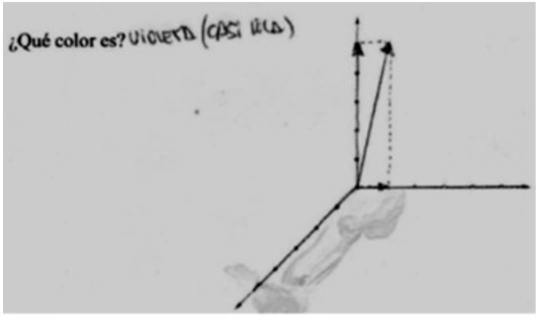


Figura 24
Vector que representa la formación del color violeta

Dibuja un vector con magnitud tres sobre el eje de color amarillo y un vector con magnitud tres sobre el eje de color rojo (figura 25). Argumenta que el color que se obtiene es anaranjado.

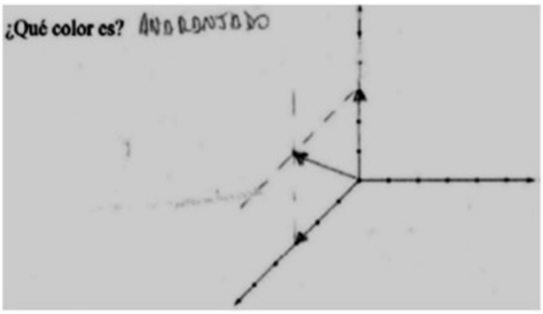


Figura 25
Vector que representa la formación del color anaranjado

De acuerdo con las producciones de la profesora en este momento 2, se puede observar que fue capaz de representar geométricamente, acorde a las indicaciones, los vectores que representar colores primarios, así como reconocer un color secundario como una combinación de los colores que se encuentran sobre los ejes del plano cartesiano. De manera que la formación de un color tiene que ver con la suma geométrica de los vectores sobre los ejes.

4.3 Resultados del momento 3

La profesora reconoce que la matriz significa seis gotas de color amarillo (figura 26).

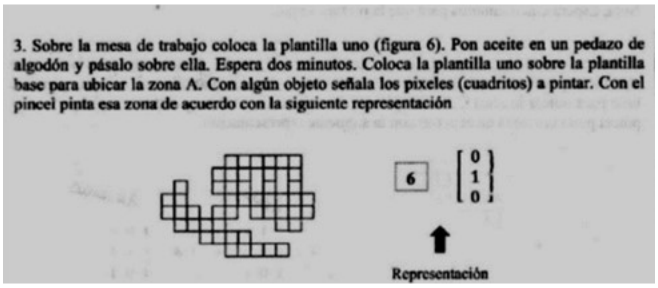


Figura 26

La matriz significa seis gotas de color amarillo

Hace la relación con la representación analítica y reconoce que significa mezclar cuatro gotas de color amarillo con dos gotas de color rojo (figura 27).

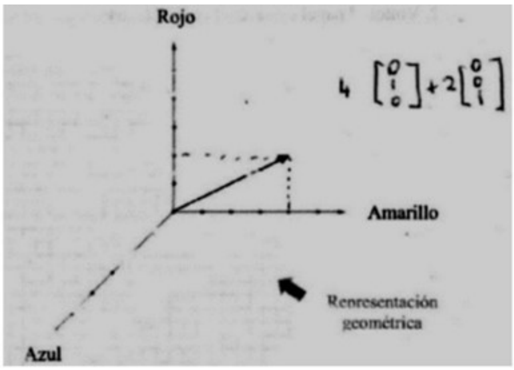


Figura 27

La combinación lineal significa mezclar cuatro gotas de color amarillo con dos gotas de color rojo

Relaciona la representación analítica y reconoce que significa mezclar dos gotas de color rojo con tres gotas de color azul (figura 28).

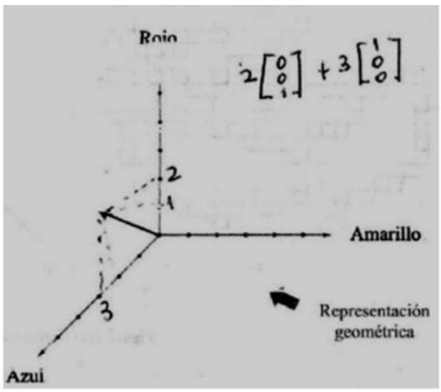


Figura 28

La combinación lineal significa mezclar dos gotas de color rojo con tres gotas de color azul

La profesora no reconoce la imagen de Mario Bros. Sin embargo, plantea que los colores primarios son de la forma $A\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}$ con $A \neq 0$. Los secundarios de la forma $A\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$. Expresa que la combinación lineal puede ser con la suma de tres matrices (figura 29).

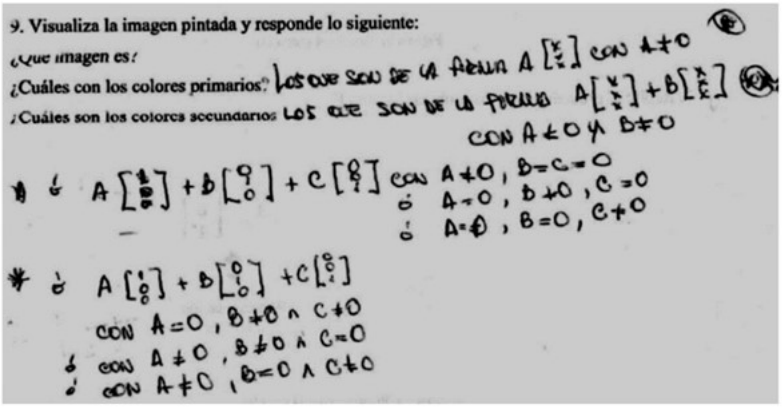


Figura 29
Combinación lineal de tres matrices

Al comprender los colores que representa cada representación analítica y geométrica, pinta los pixeles (cuadritos) de la imagen de Mario Bros (figura 30). Se observa que hay cuadritos sin pintar.

Figura 30
Mario Bros

La formación de colores con tratamientos analíticos y geométricos se da a partir de colores pigmentos primarios y las diferentes tonalidades de color se logran con combinaciones lineales mediante el conteo de gotas (representadas por vectores), aspectos que la profesora logra significar y construir con base en las indicaciones de la situación.

4.4 Resultados del momento 4

De acuerdo con los análisis realizados sobre las producciones realizadas por la profesora, en este momento se observa que logra relacionar el color con su representación analítica y geométrica colocando números. Considera la matriz de referencia para reconocer el color y el número de gotas. Se observa que comprende de mejor manera las representaciones analíticas, ya que las establece en varias actividades. Reconoce el degradado de cada color. Identifica que la suma de tres matrices se puede representar en el sistema coordenado (figura 31).

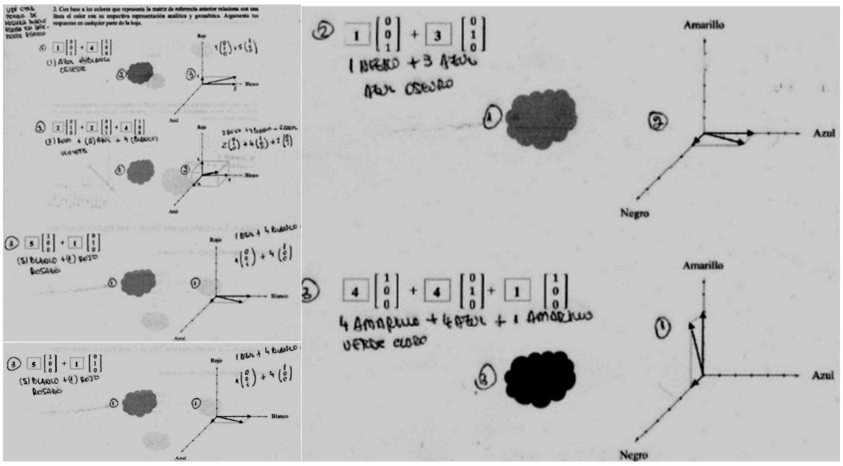


Figura 31
Resultados del momento 4

6. REFLEXIONES FINALES

El trabajo de la profesora evidencia que la situación de aprendizaje permite acercarse a un contexto real, centrándose en lo concreto al significar la combinación lineal como una formación de un color. En el sistema cartesiano tridimensional se representan los colores primarios y su mezcla. La formación de colores mediante este sistema es considerada como contexto de significación para la combinación lineal de vectores. La representación geométrica tal y como se trabajó en la situación de aprendizaje, le permitió a la profesora reconocer que los significados de una matriz y de un vector sobre el eje se refieren al número de gotas de un color de pintura. Así, el vector que se genera a partir de dos vectores representa la combinación lineal referida a la mezcla de dos colores primarios; el vector que se genera a partir de tres vectores representa la combinación lineal que expresa el degradado de un color secundario. En el uso de la combinación lineal como formación de un color, la profesora logra significar a la representación analítica de un vector como la manifestación de un color.

Se espera que la situación de aprendizaje pueda ser implementada con otros profesores o con alumnos de secundaria, para enriquecer los resultados.

Agradecimientos

A la Dra. Diana del Carmen Torres Corrales y al Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos por sus comentarios y sugerencias.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beltrán, M. J., y Murillo, M. (2016). Coloreando el álgebra lineal. *Modelling In Science Education and Learning*, 9(2), 25-33. https://doi.org/10.4995/msel.2016.3909

Buendía, G., Lezama, F. J., Mata, A., y Romero, T. (2020). ¿Ya está el pan? Una propuesta didáctica de variación y cambio para el aula de matemáticas. *Práctica docente*, 2(3), 115-131.

Cuevas, C. A., Madrid, H. y Orozco, J. (2016, julio 11-15). Procesamiento de imágenes digitales como proyecto de acción práctica para introducir significados en conceptos del álgebra lineal, como: matriz, combinación lineal y espacio vectorial [conferencia]. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, Monterrey, México.

Gracia, M. (2010). Formando docentes de matemática para la enseñanza del álgebra lineal. *Integra Educativa*, 3(2), 235-261.

Larson, R. (2015). *Fundamentos de algebra lineal*. Cengage Learning.

Moreno, M. (2001). Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul. *Suma*, (37), 75-82.

Oropeza, C. y Sánchez, J. (2015). Estudio que promueve la articulación de argumentos analíticos y geométricos en combinación lineal de matrices. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28* (pp. 846-855). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Oropeza, C., y Lezama, J. (2016). Un sistema de audio asociado al concepto de combinación lineal. En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29* (pp. 668-679). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parraguez, M. y Jiménez, R. (2017). Matices en la tematización del esquema conceptos básicos del álgebra lineal. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30* (664-662). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas*. Gedisa.

Sánchez, M. y Caldera, D. (2016). La significación del color y su importancia para la divulgación de la ciencia. Un enfoque cualitativo. *Opción*, 32(13), 540-559.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programa de estudios 2011. Artes*. Secretaría de Educación Pública.

Universidad de Los Altos de Chiapas. (2004). *Actualización del plan de estudios*. Universidad de Los Altos de Chiapas.