Herramientas visuales para sucesiones numéricas

Caligaris, Marta G.; Rodríguez, Georgina B.; Laugero, Lorena F.

Marta G. Caligaris
gie@frsn.utn.edu.ar
Grupo Ingeniería & Educación Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
Georgina B. Rodríguez
Grupo Ingeniería & Educación Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
Lorena F. Laugero
Grupo Ingeniería & Educación Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Ingenio Tecnológico
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
ISSN-e: 2618-4931
Periodicidad: Frecuencia continua
vol. 2, 2020
ingenio@frlp.utn.edu.ar

Recepción: 21 Abril 2020
Aprobación: 18 Mayo 2020

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/266/2661113003/

Resumen: Son numerosas las dificultades que se detectan en los alumnos ingresantes durante el aprendizaje de Análisis Matemático. Para que se puedan superar estos inconvenientes, se deben detectar las concepciones erróneas que forman los estudiantes para poder generar ambientes de aprendizaje adecuados utilizando recursos tecnológicos que permitan la construcción de conceptos a través de distintos registros de representación. El uso de aplicaciones visuales, ayuda a pensar a la Matemática de manera más inductiva. Sin embargo, la sola presencia de aplicaciones visuales en los procesos de enseñanza de matemática no resuelve las dificultades que se detectan. El Grupo Ingeniería & Educación de la Facultad Regional San Nicolás viene trabajando desde el año 2010 en el desarrollo de distintas herramientas visuales para la enseñanza de diferentes temas de matemática. El objetivo de este trabajo es mostrar las aplicaciones visuales diseñadas para la enseñanza de sucesiones numéricas y algunas actividades propuestas.

Palabras clave: sucesiones, visualización recursos tecnológicos.

1. Introducción

Son numerosas las dificultades que se detectan en los alumnos ingresantes durante el aprendizaje de Análisis Matemático. Para solucionar tales inconvenientes, es necesario, por un lado, interpretar las concepciones erróneas que tienen los estudiantes y, por otro, generar ambientes de aprendizaje adecuados utilizando recursos tecnológicos que permitan la construcción de conceptos a través de los distintos registros de representación del objeto matemático en estudio (González, Medina, Vilanova y Astiz, 2010).

Duval (1998) afirma, con respecto a la construcción de conceptos matemáticos, que es necesario que el alumno sea capaz de interactuar entre diferentes registros de representación debido a que cada representación es parcial con respecto a lo que representa. La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece así como fundamental para la formación de conceptos.

Sin embargo, estas actividades de articulación entre registros de representación resultan difíciles para los estudiantes. Por ello, la visualización constituye un camino alternativo para poder realizar estas articulaciones. La visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como la habilidad para representar, transformar, comunicar, generar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende (Cantoral y Montiel, 2001).

El objetivo de este trabajo es mostrar las aplicaciones visuales diseñadas para la enseñanza de sucesiones numéricas y algunas de las actividades propuestas.

Las aplicaciones visuales, como las que se muestran en este trabajo, constituyen una poderosa herramienta debido a la interactividad que generan y a las posibilidades que ofrecen para trabajar con las diferentes representaciones del objeto matemático.

2. Visualización matemática

Briseño y Guzmán (2015) indican que la visualización ayudada por la tecnología facilita la construcción de conceptos matemáticos.

Para Arcavi (1999), la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.

A partir de esta definición, se puede deducir que la visualización es un medio con el que el alumno cuenta para construir o comprender un concepto matemático (Zimmermann y Cunningham, 1991).

En consecuencia, sería deseable que los docentes organicen sus clases priorizando actividades en las que los estudiantes deban hacer uso de la visualización matemática.

3. Sucesiones numéricas

Una sucesión numérica, que suele indicarse como , es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuya imagen está incluida en el conjunto de los números reales (Anton, 1995). En símbolos:

$$S: N \rightarrow R / \ \forall n \square N, S(n) a_n \tag{1}$$

Las sucesiones pueden graficarse de diversas maneras, por ejemplo, indicando los valores de los números a_n en un eje horizontal, o graficando los puntos (n, a_n) en el plano.

Una sucesión , se dice convergente si existe un número real L tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número entero N_ε tal que:

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - L < \varepsilon| \tag{2}$$

Si no existe tal número, la sucesión diverge.

Una sucesión , se dice:

- creciente si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$
- no decreciente si $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$
- decreciente si $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$
- no creciente si $a_1 \geq a_2 \geq \ldots < a_n \geq \ldots$

Una sucesión que es no decreciente o no creciente se llama monótona. Una sucesión que es creciente o decreciente se llama estrictamente monótona.

Es sencillo demostrar que tanto las sucesiones decrecientes o no crecientes, acotadas inferiormente son convergentes, como también, las sucesiones crecientes o no decrecientes, acotadas superiormente son convergentes (Anton, 1995).

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión que converge al número L, con $a_n \neq L$ para todo n #, y α y λ son dos constantes positivas, entonces si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}, -, L|}{|a_n, -, L|^{\alpha}} = \lambda \tag{3}$$

se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L con orden α (Mathews & Fink, 2000).

Cuanto mayor sea el valor de α, mayor será la velocidad de convergencia de la sucesión. Esta propiedad cobra importancia en los métodos numéricos para aproximar la solución de ecuaciones no lineales.

3.1. Aplicaciones visuales para la enseñanza de las sucesiones numéricas

Utilizando las posibilidades que brinda el software Scilab para elaborar recursos didácticos de diseño propio, se diseñaron aplicaciones visuales para utilizar en secuencias didácticas durante la enseñanza de las sucesiones numéricas. La elección del software se basó fundamentalmente en el hecho de que los alumnos tienen acceso libre al mismo, ya que se encuentra disponible en forma gratuita en Internet.

Algunas de las características que presentan las aplicaciones visuales diseñadas se detallan a continuación:

- **interactivas:** pues permiten un diálogo y un intercambio de información entre los estudiantes y las mismas. Con ellas los alumnos pueden obtener resultados rápidamente.
- **facilitadoras de la individualización del trabajo de los alumnos:** debido a que cada uno puede resolver la cantidad de ejemplos que necesite. De esta forma, cada estudiante tiene su ritmo de aprendizaje, más allá del ritmo que desarrolle el resto de la clase.
- **fáciles de usar:** ya que los conocimientos para utilizarlas son mínimos.

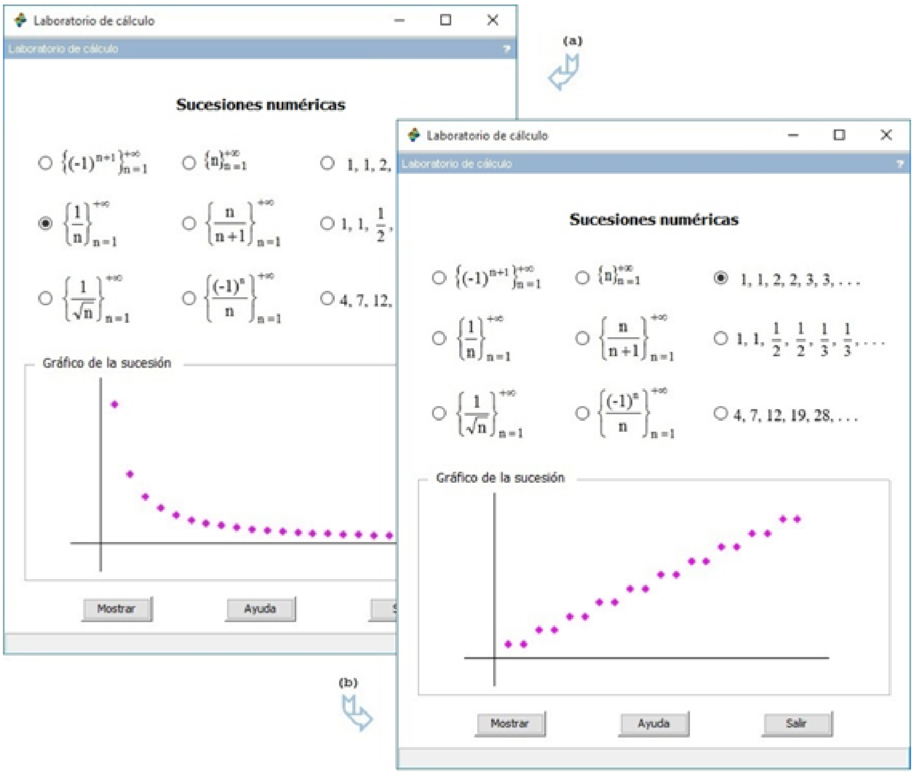

FIGURA 1
Herramienta que permite visualizar los primeros elementos de algunas sucesiones numéricas

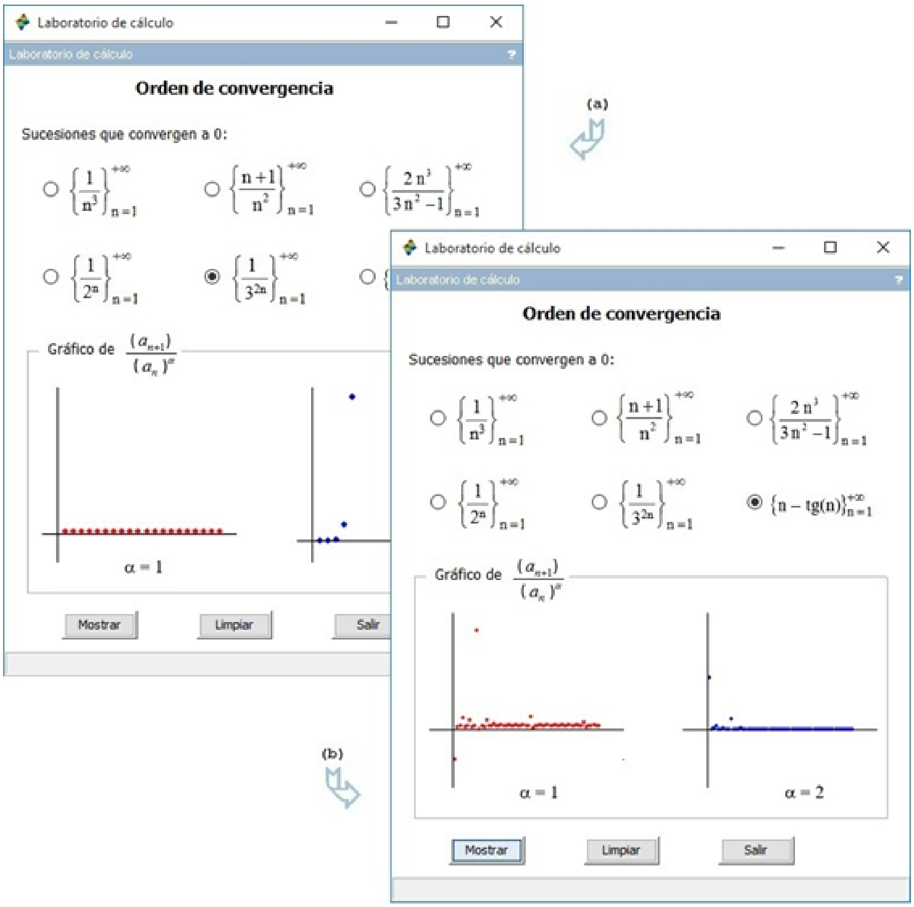

FIGURA 2
Sucesiones numéricas y orden de convergencia

La Figura 1 muestra la herramienta diseñada para graficar los primeros veinte términos de una sucesión numérica. A pesar de que para analizar la convergencia de una sucesión no interesan los primeros términos, sino que lo que importa en realidad es el comportamiento para valores de n grandes, las sucesiones elegidas muestran su comportamiento en los veinte términos graficados.

La Figura 2 presenta otra herramienta que permite analizar el orden de convergencia de una sucesión. Por simplicidad, se usan sucesiones que convergen a cero, pero el análisis es válido para sucesiones que converjan a cualquier otro valor. Esta aplicación está diseñada para, a partir de la elección de sucesión, analizar en la gráfica las sucesiones $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (graficada en rojo) y $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{(a_n)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (graficada en azul).

En la Figura 2a) se deduce a partir del gráfico, que la sucesión elegida es de orden de convergencia lineal, ya que la sucesión en azul diverge. En cambio, en la Figura 2b), la sucesión elegida es de orden de convergencia al menos dos, ya que ambas sucesiones son convergentes.

3.2. Actividades propuestas

Al utilizar las aplicaciones visuales diseñadas, los alumnos podrán:

- construir y/o afianzar el concepto de sucesión numérica.
- comprender la clasificación de las sucesiones numéricas (creciente, no creciente, decreciente, no decreciente, acotada, convergente, divergente, oscilante).

- deducir algunas relaciones teniendo en cuenta las características que presenta una sucesión numérica (por ejemplo, una sucesión creciente, acotada superiormente, es convergente).
- estimar el límite de una sucesión numérica.
- analizar el orden de convergencia de una sucesión numérica a partir de representaciones gráficas de sucesiones adecuadas.

A continuación, se muestran algunas de las actividades con las que se podrá trabajar con los estudiantes y el objetivo que persigue cada una de ellas.

Actividad 1

Objetivos

- Determinar el conjunto imagen de la sucesión.
- Calcular el límite de una sucesión numérica en forma gráfica y algebraica.

Dada la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

a) Graficar los primeros veinte términos de la sucesión. ¿Cuál es la imagen de la sucesión?
b) A partir de la observación de la gráfica, ¿a qué valor se aproximan los términos de la sucesión a medida que el valor de n es cada vez mayor?
c) Calcular a_{100}, a_{1000} y a_{10000}.
d) ¿Cuál es el límite de la sucesión dada? Justificar la respuesta en forma algebraica.

Actividad 2

Objetivos

- Analizar el orden de convergencia de una sucesión, a partir de la observación de la representación gráfica de la sucesión que se utiliza para definir este concepto.

Dadas las siguientes sucesiones:
$\left\{\frac{1}{3^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{n, -, t, g, (n)\}_{n=1}^{\infty}$:

a) Comprobar algebraicamente que el límite de ambas sucesiones es cero.
b) Determinar si el orden de convergencia de dichas sucesiones es lineal o al menos cuadrático
c) ¿Cuál de las dos sucesiones converge más rápido a cero?

4. CONCLUSIONES

En el proceso de enseñanza de la matemática, es importante trabajar con actividades que permitan que los alumnos adquieran habilidades en el tratamiento de distintos registros semióticos y la correspondiente conversión entre ellos, como condición necesaria para lograr un verdadero aprendizaje.

El uso de aplicaciones visuales, como las presentadas en este trabajo, ayuda también a pensar a la Matemática de manera más inductiva. La interacción del alumno con este tipo de recursos permite generar situaciones donde el estudiante pueda enunciar propiedades a partir de la observación de ciertas regularidades o definir conceptos sencillos.

En la Facultad Regional San Nicolás, las herramientas mostradas serán utilizadas en los cursos de Análisis Numérico y se pondrán a disposición de los profesores de Análisis Matemático I, en el próximo año lectivo.

Sin embargo, la sola presencia de aplicaciones visuales en los procesos de enseñanza de matemática no resuelve las dificultades que se detectan. Es el docente quien, por medio de su adecuada intervención pedagógica, ayudará al alumno en el aprendizaje de los distintos conceptos.

Referencias

Anton, H. (1995). *Calculus*. John Wiley & Sons, Inc.

Arcavi, A. (1999). *The role of visual representations in the learning of Mathematics*. Proc. of the North American Chapter of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 55 – 80). Morelos, México.

Briseño, C. & Guzmán, J. (2015). *Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica*. XIV Conferencia Interamericana de educación Matemática, Chiapas, México.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático. México*: Prentice Hall & Pearson Educación.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, p. 173 – 201. México. Cinvestav.

Gonzalez J., Medina P., Vilanova S. & Astiz M. (2010). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*. Número especial: trabajos de investigación y propuestas de enseñanza. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/issue/view/947.

Mathews, J. & Fink, K. (2000). *Métodos numéricos con Matlab*. Prentice Hall.

Zimmermann, W. & Cunningham S. (1991). *What is mathematical visualization?* In W. Zimmermann and Cunningham, S. (Eds), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, D.C: The Mathematical Association of America.