

 José Lezcano

jose.lezcano4@utp.ac.pa

Ministerio de Educación, Panamá

 Jorge Hernández

jorge.hernandez8@utp.ac.pa

Universidad de Panamá, Panamá

### Visión Antataura

Universidad de Panamá, Panamá

ISSN: 2309-6373

ISSN-e: 2520-9892

Periodicidad: Semestral

vol. 7, núm. 1, 2023

[Luis.rodriguez@up.ac.pa](mailto:Luis.rodriguez@up.ac.pa)

Recepción: 17 Febrero 2023

Aprobación: 10 Abril 2023

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/225/2254439009/>

DOI: <https://doi.org/10.48204/j.vian.v7n1.a3933>

**Resumen:** En el presente trabajo, se modifica el axioma de separación de los espacios métricos para introducir los espacios métricos parciales, en los cuales la autodistancia no es necesariamente cero. Se define una relación de orden en estos espacios. Se desarrollan una serie de ejemplos que ilustran los conceptos introducidos y a la vez sirven como contraejemplos para mostrar la independencia de las definiciones presentadas.

**Palabras clave:** Métricas, espacios métricos, métricas parciales (pmétricas), espacios métricos parciales, autodistancia diferente de cero, orden parcial, conjunto parcialmente ordenado.

**Abstract:** In this work the separation axiom of metric spaces is modified to introduce partial metric spaces, in which the selfdistance is not necessarily zero. An order relationship is defined in these spaces. A series of examples illustrating the concepts introduced was developed to serve as counterexamples demonstrating the independence of the definitions presented.

**Keywords:** Metric, metric space, partial metric (pmetric), partial metric space, nonzero selfdistance, partial order, partial orden set.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las métricas parciales y los espacios métricos parciales fueron introducidos por el matemático inglés Steve Mathews en el 8° Coloquio Británico para la Teoría de la Ciencia Computacional en 1992. También en ese año, Michael Bukatin en su disertación doctoral trata sobre las métricas parciales. Posteriormente, en 2009 Steve Mathews, Ralph Kopperman, Homeira Pajooheshel presentan un artículo en The American Mathematical Monthly titulado Partial Metric Spaces.

Al igual que en los espacios métricos, los espacios métricos parciales están formados por un conjunto no vacío y una función. A esta función se le conoce con el nombre de pmétrica, la cual toma dos puntos del conjunto y la lleva a un número real no negativo.

En los espacios métricos parciales, la pmétrica de un punto a el mismo no es necesariamente cero. Esto provoca una reacción en cadena, pues para homologar los axiomas de métrica hay que realizar cambios sustanciales en los mismos.

Se mostrará cómo, a partir de espacios métricos parciales, se pueden construir espacios métricos. Además, cómo a partir de espacios métricos se pueden construir espacios métricos parciales. Además se mostrarán, algunos ejemplos de espacios que cumplan estas situaciones.

## 2. METODOLOGÍA

Introducidos por Rene Maurice Frechet en su tesis doctoral, los espacios métricos dieron origen a un vasto campo de estudio. Generalizando los espacios métricos se da origen a los espacios métricos parciales, ajustando el axioma de separación. Dando así origen a un nuevo campo de estudio.

Se definen los conceptos de métrica, seudométrica, ponderación y métrica parcial. Posteriormente, se muestra como a partir de espacios métricos, usando la métrica inducida se pueden construir una métrica parcial, por ende un espacio métrico parcial. De igual forma, se pueden construir a través de una métrica parcial una métrica y por lo tanto un espacio métrico.

Se prueba que en los espacios métricos parciales se puede establecer una relación de orden parcial, es decir; los espacios métricos parciales son conjuntos parcialmente ordenados.

Para validar los resultados, se muestran ejemplos para cada uno.

## 3. DESARROLLO DEL TEMA: ESPACIOS MÉTRICOS PARCIALES

- **Definición 1:** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función.  $d$  es una métrica sobre  $X$  si satisface los siguientes axiomas

$$M_1) d(x, y) \geq 0, \text{ para todo } x, y \in X \quad (\text{positividad}).$$

$$M_2) \text{ Sean } x, y \in X, \text{ entonces}$$

$$x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \quad (\text{separación})$$

$$M_3) d(x, y) = d(y, x) \text{ para todo } x, y \in X \quad (\text{simetría})$$

$$M_4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ para todo } x, y, z \in X \quad (\text{desigualdad triangular})$$

El par  $(X, d)$  constituido por el conjunto no vacío  $X$  y una métrica  $d$  sobre  $X$ , se llama espacio métrico (Samet et al., 2013; Bukatin et al., 2009; Kopperman, et al., 2004; Kopperman, s.f; Matthews, 1994; Matthews, 2008; Matthews, s.f)

- **Definición 2:** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función.  $p$  es una **seudométrica** o **semimétrica** si satisface los siguientes axiomas.

$$M_1) p(x, y) \geq 0, \text{ para todo } x, y \in X.$$

$$M_2^*) p(x, x) = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

$$M_3) p(x, y) = p(y, x), \text{ para todo } x, y \in X.$$

$$M_4) p(x, y) \leq p(x, z) + p(y, z), \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

El par  $(X, p)$  constituido por el conjunto no vacío  $X$  y una seudométrica  $p$  sobre  $X$ , se llama **espacio seudométrico** (Matthews, 2008).

- **Definición 3:** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función.  $\rho$  es una **pmétrica** si satisface los siguientes axiomas

$$MP_0) 0 \leq \rho(x, x) \leq \rho(x, y), \text{ para todo } x, y \in X$$

$$MP_2) \text{ Si } \rho(x, x) = \rho(x, y) = \rho(y, y), \text{ entonces } x = y \text{ para todo } x, y \in X$$

$$MP_3) \rho(x, y) = \rho(y, x), \text{ para todo } x, y \in X$$

$$MP_4) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) - \rho(z, z) \text{ entonces } x = y \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

Al par  $(X, \rho)$  se le llama espacio métrico parcial (Matthews, s.f; Bukatin, et al., 2009; Matthews, 2008).

• **Observaciones:**

1. Supongamos que  $r(x, y) = 0$ . Luego por  $MP_0$

$$r(x, x) = 0 \text{ y } r(y, y) = 0$$

de donde

$$r(x, x) = r(x, y) = r(y, y) = 0$$

Por lo tanto, por  $MP_2$  se tiene que  $x = y$ . Así pues, las métricas satisfacen los axiomas  $M_1, M_3$  y  $M_4$  de métrica y además, si  $\rho(x, y) = 0$  entonces  $x = y$ . Lo único que no satisfacen las métricas es la autodistancia igual a cero; o sea que  $\rho(x, x) \geq 0$  pero no necesariamente  $\rho(x, x) = 0$

2. Toda métrica es una métrica.

3. Las pseudométricas no satisfacen el axioma  $M_2$  de métricas ni el axioma  $MP_2$  de métricas.

- **Ejemplo:** Sea  $S$  un conjunto con más de un elemento y  $S^*$  el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de  $S$ , o sea

$$S^* = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : n \in \mathbb{N}, x_0, x_1, \dots, x_n \in S\}$$

Definamos la función

$$p_S : (S^* \cup S^W) \times (S^* \cup S^W) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } x_0 \neq y_0 \\ 2^{-k} & , \quad x_i = y_i \text{ para todo } i < k, x_k \neq y_k \\ 0 & , \quad x_k = y_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Note que si  $p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$  entonces  $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^W$ . Además, si  $\{x_n\} \in S^*$  entonces

$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) > 0$  Por lo tanto,  $p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) > 0$  para todo  $\{x_n\} \in S^*$ .

Entonces  $p_S$  es una métrica sobre  $S^* \cup S^W$  (Bukatin, et al., 2009).

- **Observaciones:**

1. Note que

$$p_S /_{S^W \times S^W} = d_S$$

Por lo tanto, el subespacio métrico parcial  $(S^W, p_S)$  es un espacio métrico; o sea que

$$(S^W, p_S) = (S^W, d_S)$$

2. Como  $p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) > 0$  para todo  $\{x_n\} \in S^+$ .  $p_S$  no es una métrica sobre  $S^+ \cup S^W$ .

• **Ejemplo:** Sea  $\square^+ = [0, \infty)$  y definamos la función

$$p_{\max} : \square^+ \times \square^+ \rightarrow \square^+$$

$$p_{\max}(a, b) = \max\{a, b\}$$

Probernos que  $p_{\max}$  es una pmétrica (Matthews, s.f).

MP<sub>0</sub>) Sean  $a, b \in \square^+$ , entonces

$$0 \leq a = \max\{a, a\} \leq \max\{a, b\}$$

Por lo tanto

$$0 \leq p_{\max}(a, a) \leq p_{\max}(a, b)$$

MP<sub>2</sub>) Sean  $a, b \in \square^+$  tales que

$$p_{\max}(a, a) = p_{\max}(a, b) = p_{\max}(b, b)$$

luego

$$a = \max\{a, b\} = b$$

Por lo tanto,  $a = b$ .

MP<sub>3</sub>) De la definición se deduce que

$$p_{\max}(a, b) = p_{\max}(b, a)$$

MP<sub>4</sub>) Sean  $a, b \in \square^+$

\* Supongamos que  $p_{\max}(a, b) = a$ , entonces

$$p_{\max}(a, b) \leq p_{\max}(a, c)$$

$$p_{\max}(c, b) - p_{\max}(c, c) \geq 0$$

por lo tanto

$$p_{\max}(a, b) \leq p_{\max}(a, c) + p_{\max}(c, b) - p_{\max}(c, c)$$

\* Igual resultado se obtiene si se supone que  $p_{\max}(a, b) = b$ .

Así pues  $p_{\max}$  es una métrica sobre  $\mathbb{R}^+$  y  $(\mathbb{R}^+, p_{\max})$  es un espacio métrico parcial.

- **Ejemplo:** Sea  $\mathfrak{I}$  la colección de los intervalos cerrados y acotados de  $\mathbb{R}$ ; es decir  $\mathfrak{I} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

Definamos la función

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{I} \times \mathfrak{I} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \rho([a, b], [c, d]) &= \max\{b, d\} - \min\{a, c\} \end{aligned}$$

Entonces  $\rho$  es una métrica sobre  $\mathfrak{I}$  y  $(\mathfrak{I}, \rho)$  es un espacio métrico parcial (Bukatin et al., 2009; Matthews, 2008).

- **Ejemplo:** Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico parcial y sea

$$\begin{aligned} \rho^* : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ \rho^*(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \end{aligned}$$

Usando el resultado de que:

si  $a, b, c, d \geq 0$  son tales que

$$a \leq b + c - d, \quad d \leq b \quad \text{y} \quad d \leq c$$

entonces

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{d}{1+d}$$

se prueba que  $\rho^*$  es una métrica sobre  $X$  (Matthews, 2008).

- **Definición:** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una **función de ponderación** sobre  $X$  es una función

$$|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades

i)  $0 \leq |x|$ , para todo  $x \in X$ .

ii)  $||x| - |y|| \leq d(x, y)$  para todo  $x, y \in X$  (Bukatin, et al., 2009; Kopperman, 2004;

Matthews, 2008).

- **Observación:** Todo espacio métrico  $(X, d)$  tiene infinitas ponderaciones. En particular, para todo  $k \geq 0$ , la función constante

$$\begin{aligned} |\cdot| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ |x| &= k \end{aligned}$$

es una ponderación sobre  $X$ .

El siguiente ejemplo ilustra la forma de construir espacios métricos parciales a partir de los espacios métricos.

- **Ejemplo:** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$  una ponderación sobre  $X$ .

Definamos la función

$$\begin{aligned} \rho_d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ \rho_d(x, y) &= \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} \end{aligned}$$

Entonces  $\rho_d$  es una pmétrica sobre  $X$ , además

$$\rho_d(x, x) = |x|$$

para todo  $x \in X$  (Matthews, s.f).

MP<sub>0</sub>) Sean  $x, y \in X$ , entonces

$$\rho_d(x, x) = \frac{d(x, x) + |x| + |x|}{2} = |x|$$

Por lo tanto, como  $|x| \leq d(x, y) + |y|$ , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_d(x, x) &= |x| \\ &= \frac{|x| + |x|}{2} \\ &\leq \frac{|x| + d(x, y) + |y|}{2} \\ &= \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} \\ &= \rho_d(x, y) \end{aligned}$$

MP<sub>2</sub>) Sean  $x, y \in X$  tales que

$$\rho_d(x, x) = \rho_d(x, y) = \rho_d(y, y)$$

entonces

$$|x| = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} = |y|$$

de donde

$$d(x, y) = 0$$

por lo tanto,  $x = y$ .

MP<sub>3</sub>) Sean  $x, y \in X$ , entonces

$$\rho_d(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} = \frac{d(y, x) + |y| + |x|}{2} = \rho_d(y, x)$$

MP<sub>4</sub>) Sean  $x, y, z \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho_d(x, y) &= \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} \\ &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z) + |y| + |x|}{2} \\ &= \frac{d(x, z) + |x| + |z| + d(y, z) + |z| - 2|z|}{2} \\ &= \frac{d(x, z) + |x| + |z|}{2} + \frac{d(y, z) + |y| + |z|}{2} - |z| \\ &= \rho_d(x, z) + \rho_d(y, z) - \rho_d(z, z) \end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que  $(X, \rho_d)$  es un espacio métrico parcial y

$$\rho_d(x, x) = |x|.$$

- Observación: Si la ponderación  $|\cdot|$  sobre  $X$  no es la función nula entonces  $(X, \rho_d)$  no es un espacio métrico. Si  $|\cdot|$  es la función nula, entonces  $\rho_d = \frac{1}{2}d$  es una métrica sobre  $X$ .
- Ejemplo: Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $d$  la métrica inducida por la norma  $\|\cdot\|$ . Note que la función norma es una ponderación sobre el espacio métrico  $(X, d)$ . Por lo tanto,  $(X, \rho_d)$  es un espacio métrico parcial, donde

$$\rho_d(x, y) = \frac{\|x - y\| + \|x\| + \|y\|}{2}$$

En el ejemplo anterior se construyó un espacio métrico parcial a partir de un espacio métrico dado. El proceso se puede revertir, o sea que se puede construir un espacio métrico

a partir de un espacio métrico parcial de tal manera que las dos procesos sean cíclicos.  
 Veamos este hecho en el siguiente ejemplo.

- Ejemplo: Sea  $(X, d)$  un espacio métrico parcial. Definamos las funciones

$$d_p : X \times X \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

y

$$| \cdot | : X \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$|x| = p(x, x)$$

Luego

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - |x| - |y|$$

Probamos que  $d_p$  es una métrica sobre  $X$  (Matthews, s.f).

M<sub>1</sub>) Sean  $x, y \in X$  entonces

$$p(x, y) - p(x, x) \geq 0 \quad \vee \quad p(x, y) - p(y, y) \geq 0$$

por lo tanto

$$0 \leq 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = d_p(x, y)$$

M<sub>2</sub>) Sean  $x, y \in X$

\* Si  $x = y$ , entonces

$$d_p(x, y) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$$

\* Supongamos que  $d_p(x, y) = 0$ , entonces

$$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0$$

Como  $p(x, x) \leq p(x, y)$ , se tiene que

$$2p(x, y) - p(x, y) - p(y, y) \leq 0$$

de donde

$$p(x, y) \leq p(y, y)$$

Igualmente,

$$2p(x, y) - p(x, y) - p(x, x) \leq 0$$

y

$$p(x, y) \leq p(x, x)$$

Luego por  $MP_0$  se tiene que

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

Por lo tanto, por  $MP_2$  se tiene que  $x = y$ .

Así pues

$$d_p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$M_3$ ) Sean  $x, y \in X$ , entonces

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 2p(y, x) - p(x, x) - p(y, y) = d_p(y, x)$$

$M_4$ ) Sean  $x, y, z \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &\leq 2p(x, z) + 2p(z, y) - 2p(z, z) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= (2p(x, z) - p(x, x) - p(z, z)) + (2p(z, y) - p(z, z) - p(y, y)) \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y) \end{aligned}$$

Así pues  $d_p$  es una métrica sobre  $X$ .

Problemas ahora que la función  $|\cdot|$  es una ponderación sobre  $X$ .

\* Sea  $x \in X$ , entonces

$$0 \leq p(x, x) = |x|$$

\* Sea  $x, y \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} |x| - |y| &= p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2p(x, x) - p(x, x) - p(y, y) \\ &\leq 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= d_p(x, y) \end{aligned}$$

Así pues,  $|\cdot|$  es una ponderación sobre  $X$  y

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - |x| - |y|$$

Note que

$$p(x, y) = \frac{d_p(x, y) + |x| + |y|}{2}$$

Luego, por el ejemplo anterior

$$p_{d_1} = p \text{ y } p_{d_2} = d.$$

O sea que las precesas de estas dos ejemplos son cíclicas.

- Teorema: Sea  $(X, p)$  un espacio métrico parcial. Defina mas la relación binaria " $<_p$ " sobre  $X$  por

$$x <_p y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y)$$

Entonces  $<_p$  es una relación de orden parcial sobre  $X$ , llamada la relación de orden parcial inducida por la pmétrica sobre  $X$  (Bukatin, et al., 2009. Matthews, s.f).

- Demostración:

- Reflexiva

Como  $p(x, x) = p(x, x)$ , se tiene que  $x <_p x$  para toda  $x \in X$ .

- Antisimétrica

Sean  $x, y \in X$  tales que  $x <_p y$  y  $y <_p x$ , entonces

$$p(x, x) = p(x, y), \quad p(y, y) = p(y, x)$$

Por lo tanto,

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

Luego por MP<sub>2</sub> se tiene que  $x = y$ .

- Transitiva

Sean  $x, y, z \in X$  tales que  $x <_p y$  y  $y <_p z$ ; entonces

$$p(x, x) = p(x, y), \quad p(y, y) = p(y, z)$$

Por MP<sub>4</sub> se tiene que

$$\begin{aligned} p(x, z) &\leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y) \\ &= p(x, y) \\ &= p(x, x) \end{aligned}$$

Luego como  $p(x, x) \leq p(x, z)$ , se tiene que

$$p(x, x) = p(x, z)$$

Por consiguiente,  $x <_p z$

De toda lo anterior se tiene que  $(X, <_p)$  es un conjunto parcialmente ordenado.

- Ejemplo: Consideremos el espacio métrico parcial  $(\mathbb{Q}^+, p_{\max})$ .

Entonces

$$\begin{aligned} x \prec_p y &\Leftrightarrow p_{\max}(x, x) = p_{\max}(x, y) \\ &\Leftrightarrow \max\{x, x\} = \max\{x, y\} \\ &\Leftrightarrow x = \max\{x, y\} \\ &\Leftrightarrow y \leq x \end{aligned}$$

O sea que  $\prec_p$  es exactamente el orden inverso usual de  $\mathbb{Q}^+$ .

- Ejemplo: En el espacio métrico parcial  $(S^1 \cup S^{\mathbb{N}}, p_2)$  la relación de orden parcial  $\prec_{p_2}$  esta definida por

$$\begin{aligned} \{x_n\} \prec_{p_2} \{y_n\} &\Leftrightarrow p_2(\{x_n\}, \{x_n\}) = p_2(\{x_n\}, \{y_n\}) \\ &\Leftrightarrow \{y_n\} \text{ es parte inicial de } \{x_n\} \end{aligned}$$

- Teorema: Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \in X$  y  $|\cdot|: X \rightarrow \mathbb{Q}$  la función definida por

$$|x| = d(x, \emptyset)$$

Entonces  $|\cdot|$  es una ponderación sobre  $X$  y  $|\emptyset| = 0$  (Bukatin, et al., 2009).

- Demostración:

- Sea  $x \in X$ , entonces

$$0 \leq d(x, \emptyset) = |x|$$

- Sean  $x, y \in X$ , entonces

$$|x| = d(x, \emptyset) \leq d(x, y) + d(y, \emptyset) = d(x, y) + |y|$$

por lo tanto,

$$|x| - |y| \leq d(x, y)$$

Así pues,  $|\cdot|$  es una ponderación sobre  $X$ .

- Observación: Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \in X$  y  $|\cdot|: X \rightarrow \mathbb{Q}$  la función definida en el teorema anterior. Entonces la función

$$p_d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_d(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} = \frac{d(x, y) + d(x, \emptyset) + d(y, \emptyset)}{2}$$

es una métrica sobre  $X$ . Además

$$p_d(x, x) = d(x, \emptyset) = |x|$$

$$p_d(x, \emptyset) = d(x, \emptyset) = |x|$$

por lo tanto

$$p_d(x, x) = p_d(x, \emptyset)$$

lo que implica que  $x \prec_{p_d} \emptyset$  para toda  $x \in X$ . Así pues  $\emptyset$  es el último elemento del conjunto parcialmente ordenado  $(X, \prec_{p_d})$  (Matthews, s.f).

Recíprocamente, sea  $(X, p)$  un espacio métrico parcial y  $\emptyset \in X$  tal que  $x \prec_p \emptyset$  para toda  $x \in X$ . Entonces

$$p(x, x) = p(x, \emptyset), \text{ para toda } x \in X.$$

Por lo tanto, la función

$$d_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 2p(x, y) - p(x, \emptyset) - p(y, \emptyset)$$

es una métrica sobre  $X$ , y la función

$$|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|x| = p(x, x) = p(x, \emptyset)$$

es una ponderación sobre  $X$ .

- Ejemplo: Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \in X$  y  $a > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq a, \text{ para toda } x, y \in X$$

Definamos la función

$$p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p(x, y) = a + \frac{d(x, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2}$$

Probamos que  $p$  es una métrica sobre  $X$ .

MP0) Sean  $x, y \in X$  entonces

$$p(x, x) = a - d(x, \emptyset) \geq 0$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} p(x, y) - p(x, x) &= a + \frac{d(x, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} - a + d(x, \emptyset) \\ &= \frac{d(x, y) + 2d(x, \emptyset) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} \\ &= \frac{d(x, y) + d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} \\ &\geq \frac{d(y, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Así pues

$$0 \leq p(x, x) \leq p(x, y)$$

MP<sub>2</sub>) Sean  $x, y \in X$  tales que

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

entonces

$$a - d(x, \emptyset) = a + \frac{d(x, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} = a - d(y, \emptyset)$$

entonces

$$d(x, \emptyset) = d(y, \emptyset) \quad \text{y} \quad d(x, y) = 0$$

lo que implica que  $x = y$ .

MP<sub>3</sub>) Sean  $x, y \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a + \frac{d(x, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} \\ &= a + \frac{d(y, x) - d(y, \emptyset) - d(x, \emptyset)}{2} \\ &= p(y, x) \end{aligned}$$

MP<sub>4</sub>) Sean  $x, y, z \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} p(x, z) + p(z, y) - p(z, z) &= a + \frac{d(x, z) - d(x, \emptyset) - d(z, \emptyset)}{2} + a + \frac{d(z, y) - d(z, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} - a + d(z, \emptyset) \\ &= a + \frac{d(x, z) - d(x, \emptyset) - d(z, \emptyset) + d(z, y) - d(z, \emptyset) - d(y, \emptyset) + 2d(z, \emptyset)}{2} \\ &= a + \frac{d(x, z) + d(z, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} \\ &\geq a + \frac{d(x, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset)}{2} \\ &= p(x, y) \end{aligned}$$

Así pues

$$p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$$

De todo lo anterior se tiene que  $(X, p)$  es un espacio métrico parcial.

Note que

$$p(\emptyset, \emptyset) = a = p(x, \emptyset)$$

por lo tanto

$$\emptyset \prec_p x$$

Para todo  $x \in X$ , o sea que  $\emptyset$  es el primer elemento del conjunto parcialmente ordenado  $(X, \prec_p)$ .

Finalmente, note que

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2a + d(x, y) - d(x, \emptyset) - d(y, \emptyset) - a + d(x, \emptyset) - a + d(y, \emptyset) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

Por consiguiente  $d_p = d$  y  $(X, d_p) = (X, d)$ .

- Observación: Si en ejemplo anterior consideramos la función de ponderación

$$\begin{aligned} |\cdot| : X &\rightarrow \mathbb{Q} \\ |x| &= d(x, \emptyset) \end{aligned}$$

entonces la función

$$\begin{aligned} p_d : X \times X &\rightarrow \mathbb{Q} \\ p_d(x, y) &= \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} = \frac{d(x, y) + d(x, \emptyset) + d(y, \emptyset)}{2} \end{aligned}$$

es una pmétrica sobre  $X$  y  $x \prec_{p_d} \emptyset$  para todo  $x \in X$ . Así pues

- \*  $\emptyset$  es el primer elemento del conjunto parcialmente ordenado  $(X, \prec_{p_d})$
- \*  $\emptyset$  es el último elemento del conjunto parcialmente ordenado  $(X, \prec_{p_d})$
- \*  $p \neq p_d$
- \*  $d_p = d$  y  $d_{p_d} = d$

### 3. CONCLUSIONES

Con lo demostrado en este artículo, podemos concluir:

- Los espacios métricos parciales son una generalización de los espacios métricos. Es decir, todo espacio métrico es un espacio métrico parcial; pero no todo espacio métrico parcial es un espacio métrico.

- Dado un espacio métrico, podemos construir a través de la métrica una pmétrica y por lo tanto un espacio métrico parcial.
- De igual forma, si tenemos un espacio métrico parcial, podemos construir a través de la pmétrica una métrica y por lo tanto un espacio métrico.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Samet, B., Vetro, C., y Vetro, F. (2013). From metric spaces to partial metric spaces. 5. <file:///C:/Users/50764/Downloads/1687-1812-2013-5.pdf>
- Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews S., y Pajoohesh, H. (2009). Partial Metric Spaces. *The American Mathematical Monthly*, 116(8), 708–718. <https://www.jstor.org/stable/40391197>
- Kopperman, R., Matthews S. y Pajoohesh, H. (2004). Partial metrizable in value quantales. *Applied General Topology*, 5(1), 115 – 127. <https://doi.org/10.4995/agt.2004.2000>
- Kopperman, R. (s.f). Generalized Metrics A Topological Investigation. <https://www.generalizedmetrics.com/>
- Matthews, S. (1994). Partial Metric Topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728, (183-197). <https://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/Ma94.pdf>
- Matthews, S. (2008, del 29 de Julio al 1 de agosto). Partial Metric Spaces A Fuss about Nothing [conferencia]. The 2008 Summer Conference Universitaria de la UNAM, Ciudad de México, México.
- Matthews, S. (s.f). [partialmetric.org](http://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/). <http://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/>