

## Caracterización de los conjuntos límites de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales

### haracterization of limit sets of autonomous differential equation systems

Franco, Ángela Yaneth

Ángela Yaneth Franco  
angela06franco@hotmail.com  
Universidad de Panamá, Panamá

Visión Antataura  
Universidad de Panamá, Panamá  
ISSN: 2309-6373  
ISSN-e: 2520-9892  
Periodicidad: Semestral  
vol. 6, núm. 1, 2022  
Luis.rodriguez@up.ac.pa

Recepción: 20 Enero 2022  
Aprobación: 06 Mayo 2022

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/225/2253327021/>

**Resumen:** Una gran cantidad de modelos de problemas reales conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales, donde la variable independiente es el tiempo. Sin embargo, muchas preguntas siguen sin una adecuada respuesta que facilite la comprensión del comportamiento geométrico de las soluciones. En este trabajo se considera el sistema de ecuaciones diferenciales autónomos en el plano

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}) = (f(x, y), g(x, y))$$

**Palabras clave:** trayectorias, diagrama de fase, campo direccional, conjuntos.



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

## 1. INTRODUCCIÓN

Motivados por la gran aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos en diversas áreas de las ciencias y la ingeniería, se presenta un estudio sobre el comportamiento a largo plazo, de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales autónomos en el plano

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}) = (f(x, y), g(x, y))$$

Para este fin, se definirán los conjuntos

*a* - límite

y *w* - límite, los cuales

permitirán hacer un estudio cualitativo preciso de los diagramas de fase de los sistemas autónomos.

Para poner en perspectiva el estudio cualitativo de los sistemas autónomos, a continuación, se presenta un resumen de los resultados básicos que ayudarán a lograr los objetivos planteados.

Con el fin de asegurar la existencia y unicidad de soluciones, se considera una función

de clase

Con el fin de asegurar la existencia y unicidad de soluciones, se considera una función de clase  $C^1$ ,  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  y el sistema autónomo  $\dot{x} = F(x) = F(x, y)$  en el plano, o sea

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{1}$$

Para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ , el flujo o solución del sistema (1)  $\varphi(t, x)$  ( $\varphi(0, x) = x$ ) a través de  $x$  está definido en el intervalo  $I_x = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ , garantizado por el Teorema de Picard (Hale, 2009) y (Hirsch, 2004). Además, la función flujo  $\varphi(\cdot, \cdot)$  es continua,  $\varphi: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (Bamón, 1991). La órbita o trayectoria de la solución  $\varphi(t, x)$  está definida por

$$\Gamma_x = \gamma(x) = \{\varphi(t, x) / t \in I_x\}$$

La semi órbita positiva está definida por

$$\Gamma_x^+ = \gamma^+(x) = \{\varphi(t, x) / t \geq 0\}$$

y la semi órbita negativa está definida por

$$\Gamma_x^- = \gamma^-(x) = \{\varphi(t, x) / t \leq 0\}$$

Si  $x_0$  es un punto de equilibrio o punto crítico del sistema ( $F(x_0) = 0$ ), entonces  $\Gamma_{x_0} = \gamma(x_0) = \{x_0\}$ . Además  $\gamma(x)$  es una órbita cerrada sí y sólo si la función  $\varphi(t, x)$  es

periódica (en este trabajo se supondrá que la trayectoria  $\gamma(x)$  consta de más de un punto, o sea que  $x$  no es un punto de equilibrio del sistema).

El conjunto de las órbitas o trayectorias en el plano, de un sistema se denomina el diagrama de fase del sistema (Mac Cluer, 2019).

Un tipo de conjunto en  $\mathbb{R}^2$  que es de vital importancia para el estudio cualitativo de los sistemas autónomos es aquel en el cual, si un flujo del sistema u órbita entra al conjunto en el instante  $t = 0$ , permanece ahí para todo  $t \geq 0$ . Esta idea se precisa en la siguiente definición.

**Definición 1:** Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  es llamado positivamente invariante para el sistema (1), si para todo  $x \in K$ , se tiene que  $\gamma^+(x) \subset K$ . De igual manera  $K$  es negativamente invariante para el sistema (1) si  $\gamma^-(x) \subset K$  para todo  $x \in K$ . Finalmente,  $K$  es invariante para el sistema (1) si es positivamente y negativamente invariante, es decir si  $\gamma(x) \subset K$  para todo  $x \in K$ .

Esta idea se precisa en la siguiente definición.

**Definición 1:**

Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  es llamado positivamente invariante para el

sistema (1), si para todo  $x \in K$ , se tiene que  $\gamma^+(x) \subset K$ . De igual manera  $K$  es negativamente invariante para el sistema (1) si  $\gamma^-(x) \subset K$  para todo  $x \in K$ . Finalmente,  $K$  es invariante para el sistema (1) si es positivamente y negativamente invariante, es decir si  $\gamma(x) \subset K$  para todo  $x \in K$ .

**Definición 2:** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$ .  $A$  y  $B$  son separados si

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \quad \text{y} \quad A \cap \bar{B} = \emptyset$$

Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  es desconexo si existen dos conjuntos separados  $A$  y  $B$  tal que  $K = A \cup B$ . Un conjunto es conexo si no es desconexo.

**Observación:** Sea  $K$  un conjunto cerrado y  $A, B$  dos subconjuntos separados de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $K = A \cup B$ . Luego

$$K \cap \bar{A} = (A \cup B) \cap \bar{A} = A \quad \text{y} \quad K \cap \bar{B} = (A \cup B) \cap \bar{B} = B.$$

Por lo tanto  $A$  y  $B$  son conjuntos no vacíos y cerrados de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$ . Por lo tanto, si  $K$  desconexo entonces existen conjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos  $A$  y  $B$  tal que  $K = A \cup B$ . Si además  $K$  es compacto, entonces

$$\text{dist}(A, B) > 0 \text{ (Bamón, 1991).}$$

El siguiente teorema, conocido con el nombre de Teorema del punto fijo de Brower, es de gran utilidad para probar la no existencia de órbitas periódicas o cerradas dentro de ciertas regiones encerradas por curvas de Jordan (Osuna, 2011; Hale, 2009). Recuerde que si

si  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  es una curva de Jordan, entonces  $\gamma \cup \text{int}(\gamma)$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a una bola cerrada de  $\mathbb{R}^2$  (Ostrovskaya, 2019; Zhang, 2006).

**Teorema 1: (Brower):** Sea  $K$  un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a una bola cerrada en  $\mathbb{R}^2$  y  $G: K \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que  $G(K) \subset K$ . Entonces  $G$  tiene al menos un punto fijo en  $K$ ; es decir, existe un punto  $x \in K$  tal que  $G(x) = x$ .

## 2. METODOLOGÍA

Uno de los conceptos más importantes en el estudio cualitativo de los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales son los conjuntos

*a - límite*

y *w - límite*, ya que

ellos permiten determinar el comportamiento a largo plazo de las soluciones de los sistemas autónomos.

Sin embargo, para maximizar la utilidad de estos conjuntos límites se deducirán sus propiedades topológicas.

Así, se probó que, bajo ciertas condiciones, los

conjuntos

*a - límite*

y *w - límite*

son conjuntos no vacíos, compactos, conexos e

invariantes; además se probó que ellos están formados por la unión de trayectorias completas del sistema.

Como aplicación, se usaron los conjuntos límites para probar la existencia de órbitas periódicas y además se estudian algunos ejemplos particulares de sistemas autónomos.

Para validar los resultados obtenidos en los ejemplos particulares, se utilizó el Software Wolfram Mathematica, el cual permite la construcción del campo de direcciones y el diagrama de fase de los sistemas autónomos en el plano.

### 3. CONJUNTOS LÍMITES

**Definición 3:** Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $\gamma(x)$  la órbita o trayectoria correspondiente a la solución  $\varphi(t, x)$  del sistema (1).

- i. Un punto  $p \in \mathbb{R}^2$ , es un punto  $\alpha$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$  del sistema (1) si existe una sucesión estrictamente decreciente  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p$ . El conjunto formado por los puntos  $\alpha$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$  se denota por  $\alpha(x)$  y se llama conjunto  $\alpha$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$ .
- ii. Un punto  $q \in \mathbb{R}^2$  es un punto  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$  del sistema (1), si existe una sucesión estrictamente creciente  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  tal que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = q$ . El conjunto formado por los puntos  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$  se denotan por  $\omega(x)$  y se llama conjunto  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$ .

1. Si  $x \in \mathbb{R}^2$  es un punto de equilibrio del sistema (1), entonces  $\gamma(x) = \{x\}$  y, por lo tanto,  $\alpha(x) = \omega(x) = \{x\}$ . La recíproca no es cierta.
2. Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  un punto regular del sistema (1) ( $F(x) \neq 0$ ). Si  $y \in \gamma(x)$ , entonces existe un  $c_y \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t, x) = \varphi(t + c_y, y)$ , esto implica que  $\alpha(y) = \alpha(x)$  y  $\omega(y) = \omega(x)$ . Por lo tanto, se puede hablar del conjunto  $\alpha$ -límite y el conjunto  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$  y se escribirá  $\alpha(y) = \alpha(x) = \alpha(\gamma(x))$ ,  $\omega(y) = \omega(x) = \omega(\gamma(x))$ , siempre que  $y \in \gamma(x)$ .
3. Suponga que,  $X$  es un punto regular del sistema (1) y  $\gamma(x) \cap \alpha(x) \neq \emptyset$ . Sea  $p \in \gamma(x) \cap \alpha(x)$ , entonces existe  $t^* \in \mathbb{R}$  y una sucesión decreciente  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p = \varphi(t^*, x)$ .
4. Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $\varphi(t, x)$  la correspondiente solución del sistema (1) que pasa por  $x$ . Considere la función  $\Psi(t, x) = \varphi(-t, x)$ . Entonces

$$\dot{\Psi}(t, x) = \dot{\varphi}(-t, x) = -F(\varphi(-t, x)) = -F(\Psi(t, x))$$

Por lo tanto  $\Psi(t, x)$  es una solución del sistema  $\dot{x} = -F(x)$ .

Esto implica que el conjunto  $\alpha$ -límite de la solución  $\varphi(t, x)$  del sistema (1) es el conjunto  $\omega$ -límite de la solución del sistema  $\dot{x} = -F(x)$  y viceversa. Por lo tanto, para estudiar las propiedades generales de los conjuntos  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límite de las órbitas del sistema (1), es suficiente restringirse al estudio de los conjuntos  $\omega$ -límite.

#### 4. CARACTERIZACIÓN DE LOS CONJUNTOS LÍMITES

**Teorema 2:** Sea

$x \in \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq T\}}$$

Demostración:

Por lo tanto,  $w(x)$  es un conjunto cerrado de

Demostración:

De la definición de  $w(x)$

se tiene que

$$\omega(x) \subset \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq T\}}$$

para todo  $T \geq 0$ , por lo tanto

$$\omega(x) \subset \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq T\}}$$

Recíprocamente, sea  $p \in \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq T\}}$ . Luego existe un  $t_1 \geq 1$  tal que  $\|p - \varphi(t_1, x)\| \leq 1$ .

De igual manera, existe un  $t_2 \geq \max\{t_1, 2\}$  tal que  $\|p - \varphi(t_2, x)\| \leq \frac{1}{2}$ .

Continuando de esta manera, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un  $t_n \geq \max\{t_{n-1}, n\}$  tal que  $\|p - \varphi(t_n, x)\| \leq \frac{1}{n}$ . Así pues, existe una sucesión creciente  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p$ . Por lo tanto  $p \in \omega(x)$  y

$$\bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq T\}} \subset \omega(x)$$

De todo lo anterior se tiene que

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq T\}}$$

y  $w(x)$

es un conjunto cerrado.

**Teorema 3:** Sea  $x$

$\in \mathbb{R}^2$  y suponga que  $\gamma^+(x)$  es acotado. Entonces el conjunto  $\omega(x)$  es

no vacío y compacto.

Demostración:

Considere la sucesión

$$\{\varphi(n, x)\}_{n=1}^{\infty}. \text{ Como } \varphi(n, x) \in \gamma^+(x) \text{ y } \gamma^+(x)$$

es acotado, la

sucesión  $\{\varphi(t_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada. Luego, por el teorema de Bolzano - Weierstrass, existe una sucesión creciente  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p \in \mathbb{R}^2$ . Esto implica que  $p \in \omega(x)$  y  $\omega(x) \neq \emptyset$ .

Como  $\gamma^+(x)$  es acotado, existe un  $R > 0$  tal que

$$\gamma^+(x) \subset \overline{B}(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq R\}$$

Por lo tanto

$$\omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)} \subset \overline{B}(0, R)$$

Luego, como  $w(x)$  es cerrado y acotado, él es compacto.

**Teorema 4:** Sea

$x \in \mathbb{R}^2$ . Entonces  $\omega(x)$  es un conjunto invariante del sistema (1)

**Demostración:**

Si  $\omega(x) = \emptyset$  no hay nada que probar. Así que suponga que  $\omega(x) \neq \emptyset$  y sea  $p \in \omega(x)$ .

Entonces existe una sucesión creciente  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p$ . Sea

$s \in \mathbb{R}$ , entonces por la propiedad aditiva del flujo se tiene que

$$\varphi(s + t_n, x) = \varphi_{s, t_n}(x) = \varphi_s(\varphi_{t_n}(x))$$

Luego, por la continuidad del flujo  $\varphi(t, x)$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s + t_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_s(\varphi_{t_n}(x)) = \varphi_s\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x)\right) = \varphi_s(p)$$

Como  $\{s + t_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s + t_n) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s + t_n, x) = \varphi_s(p) = \varphi(s, p)$$

se tiene que  $\varphi(s, p) \in \omega(x)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Así,  $\gamma(p) \subset \omega(x)$  y  $\omega(x)$  es un conjunto

invariante para el sistema (1).

**Teorema 5:** Sean

$x, y, z \in \mathbb{R}^2$  tales que  $y \in \omega(x)$  y  $z \in \omega(y)$ . Entonces  $z \in \omega(x)$ .

Como  $y \in \omega(x)$  y  $z \in \omega(y)$ , existen sucesiones crecientes  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, y) = z$$

Denote

$$x_n = \varphi(t_n, x), \quad y_n = \varphi(s_n, y), \quad z_n = \varphi(s_n, x_n)$$

Luego

$$\begin{aligned} z_n &= \varphi(s_n, x_n) = \varphi(s_n, \varphi(t_n, x)) \\ &= \varphi_{s_n}(\varphi_{t_n}(x)) \\ &= \varphi_{s_n}(\varphi_{t_n}(x)) \\ &= \varphi_{s_n + t_n}(x) \\ &= \varphi(s_n + t_n, x) \end{aligned}$$

Por la continuidad de la función flujo  $\varphi(t, x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n + t_n, x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, \varphi(t_n, x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, y) \\ &= z \end{aligned}$$

Así,  $\{s_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n + t_n, x) = z$ .

Por lo tanto,  $z \in \omega(x)$ .

### Observaciones:

1. De los Teoremas 4 y 5, se deduce que si  $y \in \omega(x)$ , entonces  $\gamma(y) \cup \omega(y) \subset \omega(x)$ ; además,  $\omega(x)$  es la unión de órbitas completas del sistema (1).
2. Del Teorema 4 se deduce que si  $\omega(x) = \{p\}$ , entonces  $p$  es un punto de equilibrio del sistema (1).

Teorema 6: Sea

$$x \in \mathbb{R}^2 \text{ y suponga que } \gamma^+(x)$$

y suponga que  $g^+(x)$

Demostración:

Por los Teoremas 2, 3, 4, se tiene que  $w(x)$  es un conjunto no vacío, compacto e invariante para el sistema (1). Suponga que  $w(x)$  no es conexo, entonces existen conjuntos cerrados no vacíos y disjuntos

$$A, B \text{ tales que } \omega(x) = A \cup B \text{ y } \text{dist}(A, B) = \delta > 0.$$

Como  $\phi \neq A \subset \omega(x)$  y  $\phi \neq B \subset \omega(x)$ , existen tiempos  $0 < t_1 < t_2$  tal que

$$\text{dist}(\varphi(t_1, x), A) < \frac{\delta}{4} \quad \text{y} \quad \text{dist}(\varphi(t_2, x), B) < \frac{\delta}{4}.$$

De igual manera, como  $A, B$  están formados de puntos  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\gamma(x)$ , se puede construir una sucesión estrictamente creciente de tiempos  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y tal que

$$\text{dist}(\varphi(t_n, x), A) < \frac{\delta}{4}, \text{ si } n \text{ es impar}$$

y

$$\text{dist}(\varphi(t_n, x), B) < \frac{\delta}{4}, \text{ si } n \text{ es par.}$$

Note que

$$\delta = \text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(\varphi(t_1, x), A) + \text{dist}(\varphi(t_1, x), B)$$

de donde

$$\text{dist}(\varphi(t_1, x), B) \geq \delta - \text{dist}(\varphi(t_1, x), A) \geq \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3\delta}{4} \quad (*)$$

Luego, como

$$\text{dist}(\varphi(t_2, x), B) < \frac{\delta}{4} \quad \text{y} \quad \text{dist}(\varphi(t_1, x), B) \geq \frac{3\delta}{4}$$

y la función distancia es continua, existe un  $s_1 \in [t_1, t_2]$  tal que  $\text{dist}(\varphi(s_1, x), B) = \frac{\delta}{2}$ . Por

otro lado, como

$$\delta = \text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(\varphi(s_1, x), A) + \text{dist}(\varphi(s_1, x), B)$$

se tiene que

$$\text{dist}(\varphi(s_1, x), A) \geq \delta - \text{dist}(\varphi(s_1, x), B) = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

Repetiendo este proceso en todo intervalo  $[t_{2n-1}, t_{2n}]$  con  $n \in \mathbb{N}$ , se obtiene una sucesión creciente de tiempos  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  y

$$\text{dist}(\varphi(s_n, x), A) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad \text{dist}(\varphi(s_n, x), B) = \frac{\delta}{2} \quad (**)$$

Como  $\{\varphi(s_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada, por el teorema de Bolzano - Weierstrass, existe una subsucesión convergente, la cual se continuará denotando de la misma manera.

Sea  $\mathbf{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, x)$ , entonces  $\mathbf{p} \in \omega(x)$ , y por (\*\*),

$$\text{dist}(\mathbf{p}, A) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad \text{dist}(\mathbf{p}, B) = \frac{\delta}{2}$$

Lo que implica que  $\mathbf{p} \notin A$  y  $\mathbf{p} \notin B$ . lo que contradice que  $\omega(x) = A \cup B$ . Así pues,  $\omega(x)$  es un conjunto conexo.

## Observaciones:

1. Para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega(x)$  es un conjunto invariante para el sistema (1).
2. Si  $\gamma^+(x)$  es un conjunto acotado, entonces  $\omega(x)$  es un conjunto no vacío, compacto, invariante y conexo.
3. Suponga que  $\gamma^+(x)$  es un conjunto acotado, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, x), \omega(x)) = 0$$

4. Suponga que  $\gamma^+(x)$  es un conjunto acotado y que  $\omega(x)$  es un conjunto finito. Luego  $\omega(x)$  es un conjunto finito no vacío y conexo, lo que implica que  $\omega(x)$  es un conjunto unitario. Así, existe un  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\omega(x) = \{\mathbf{p}\}$ . Por (3) se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, x), \mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, x), \omega(x)) = 0$$

o sea que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x$$

Por otro lado, como  $\omega(x)$  es un conjunto invariante para el sistema (1), se tiene que

$\gamma(\mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\} = \omega(x)$ , lo que implica que  $\mathbf{p}$  es un punto de equilibrio del sistema (1).

## 5. Aplicaciones

**Teorema 7:** Sea

$$K \subset \mathbb{R}^2$$

un conjunto cerrado y positivamente invariante del sistema (1).

Suponga que  $K$  es homeomorfo a la bola unitaria cerrada de  $\mathbb{R}^2$

Entonces  $K$  contiene al menos un punto de equilibrio del sistema (1).

**Demostración:**

Sea  $s_1 > 0$ . Como  $K$  es positivamente invariante, se puede considerar la función

$$\begin{aligned} \varphi_{s_1} : K &\rightarrow K \\ \mathbf{p} &\rightarrow \varphi_{s_1}(\mathbf{p}) = \varphi(s_1, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Como la función flujo  $\varphi_{s_1}$  es continua, por el teorema del punto fijo de Brower, existe un

$\mathbf{p}_1 \in K$  tal que

$$\varphi_{s_1}(\mathbf{p}_1) = \varphi(s_1, \mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_1$$

Esto implica que la solución  $\varphi(t, \mathbf{p}_1)$  del sistema (1) es una función periódica de periodo

$s_1$ . Considere una sucesión  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $s_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$  y la correspondiente sucesión

$\{\mathbf{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\varphi(s_n, \mathbf{p}_n) = \mathbf{p}_n$ .

Como  $K$  es compacto (por ser homeomorfo a la bola cerrada unitaria), se puede suponer (pasando a una subsucesión si es necesario) que la sucesión  $\{\mathbf{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a un  $\mathbf{p}^* \in K$ . Por otro lado, para todo  $t > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , existe un  $K_n(t) \in \mathbb{Z}$ ,  $K_n(t) \geq 0$  tal que

$$K_n(t) \leq \frac{t}{s_n} < K_n(t) + 1$$

de donde

$$K_n(t)s_n \leq t < K_n(t)s_n + s_n$$

Luego, como  $\varphi(t, \mathbf{p}_n)$  es periódica de período  $s_n$ , se tiene que

$$\varphi(K_n(t)s_n, \mathbf{p}_n) = \varphi(s_n, \mathbf{p}_n) = \mathbf{p}_n$$

para todo  $t > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Además,

$$\|\varphi(t, \mathbf{p}^*) - \mathbf{p}^*\| \leq \|\varphi(t, \mathbf{p}^*) - \varphi(t, \mathbf{p}_n)\| + \|\varphi(t, \mathbf{p}_n) - \mathbf{p}_n\| + \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}^*\|$$

para todo  $t > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$

como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}^*$ , por la continuidad del flujo  $\varphi(t, \mathbf{p})$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{p}^*) - \varphi(t, \mathbf{p}_n)\| = 0, \text{ para todo } t > 0$$

Por otro lado, como  $\varphi(t, \mathbf{p}_n)$  es periódica de periodo  $s_n$ , se tiene que

$$\varphi(t, \mathbf{p}_n) = \varphi(t - \mathcal{K}_n(t)s_n, \mathbf{p}_n)$$

Pero

$$0 \leq t - \mathcal{K}_n(t)s_n < s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Luego, por la continuidad del flujo  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t - \mathcal{K}_n(t)s_n, \mathbf{p}_n) = \varphi(0, \mathbf{p}_n) = \mathbf{p}_n, \text{ para todo } t > 0$$

Por lo tanto,

$$\|\varphi(t, \mathbf{p}_n) - \mathbf{p}_n\| = \|\varphi(t - \mathcal{K}_n(t)s_n, \mathbf{p}_n) - \mathbf{p}_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Así pues,

$$\|\varphi(t, \mathbf{p}^*) - \mathbf{p}^*\| = 0, \text{ para todo } t > 0$$

Esto implica que  $\varphi(t, \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$  para todo  $t \geq 0$ . Por consiguiente,  $\mathbf{p}^*$  es un punto de equilibrio del sistema (1).

**Corolario1:** Sea  $\gamma(x)$  una órbita periódica asociada a la solución  $\varphi(t, \mathbf{x})$  del sistema (1). Entonces  $\text{int}(\gamma(x))$  contiene al menos un punto de equilibrio del sistema (1).

**Demostración:**

Como  $\gamma(x)$  es una curva de Jordan el conjunto  $K = \gamma(x) \cup \text{int}(\gamma(x))$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a la bola unitaria cerrada de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\mathbf{p} \in \text{int}(\gamma(x))$ . Como  $\gamma(x)$ , es una órbita cerrada del sistema (1), por el teorema de existencia y unicidad, la trayectoria  $\gamma(\mathbf{p})$  no puede cortar a  $\gamma(x)$ . Por lo tanto,  $\gamma(\mathbf{p}) \subset \text{int}(\gamma(x))$ , lo que implica que  $K$  es un conjunto invariante para el sistema (1). Luego por el Teorema 7,  $\text{int}(\gamma(x))$  contiene al menos un punto de equilibrio del sistema (1).

### Ejemplo 1: Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = y(2 + 2x - y^2) \end{cases}$$

Las curvas  $x = y^2$ ,  $x = \frac{1}{2}y^2 - 1$ , no se pueden intersecar. Esto implica que el único punto de equilibrio del sistema dado es  $(0, 0)$ .

El jacobiano del sistema es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 2y \\ 2y & 2 + 2x - 3y^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J = J(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de  $J$  son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Por lo tanto, el punto de equilibrio

$(0, 0)$  es un punto silla del sistema lineal, lo que implica que  $(0, 0)$  es un punto silla del sistema dado.

El campo vectorial del sistema está dado por

$$V(x, y) = (-x + y^2, y(2 + 2x - y^2))$$

Luego, para la recta  $y = 0$  se tiene que

$$V(x, 0) = (-x, 0) = -x(1, 0)$$

Por lo tanto, la recta  $y = 0$  está formada por tres trayectorias. Esto implica que no puede haber una trayectoria cerrada que contenga al punto  $(0, 0)$  en su interior. Además, por el Colorario 1, no hay trayectorias cerradas del sistema dado que no contengan a  $(0, 0)$  en su interior. Así pues, el sistema dado no posee trayectorias cerradas.

El diagrama de fase del sistema está dado por las figuras 1 y 2.

Figura 1. Campo de direcciones de trayectorias

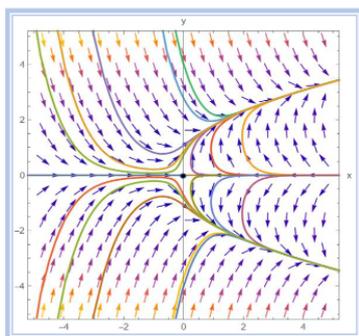
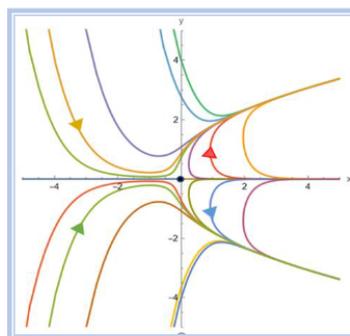


Figura 2. Campo de direcciones y trayectorias



De los diagramas anteriores se deduce que:

$$\alpha(x, 0) = \{(0, 0)\} \text{ y } \alpha(x, y) = \emptyset, \text{ si } y \neq 0.$$

$$\alpha(x, y) = \emptyset, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0).$$

**Ejemplo 2:** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}x \left( -\frac{1}{10} \cos x - \cos y \right) \\ \dot{y} = \operatorname{sen}y \left( \cos x - \frac{1}{10} \cos y \right) \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio del sistema son

$$(n\pi, m\pi) \text{ y } \left( \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi \right), \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Luego el sistema, tiene infinitos puntos de equilibrio, pero todos aislados.

El jacobiano del sistema está dado por

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \cos x \cos y & \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y \\ \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y & \cos x \cos y - \frac{1}{10}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \end{bmatrix}$$

Luego

$$J_1 = J(0, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{11}{10} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix}, \quad J_2 = J(\pi, 0) = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{11}{10} \end{bmatrix}$$

$$J_3 = J(0, \pi) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} \end{bmatrix}, \quad J_4 = J(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} -\frac{11}{10} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

$$J_5 = J\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 1 \\ -1 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Los valores propios de  $J_1$  son  $\lambda_1 = -\frac{11}{10}$ ,  $\lambda_2 = \frac{9}{10}$

Por lo tanto, el punto de equilibrio  $(0, 0)$  es un punto silla para el sistema dado.

Los valores propios de  $J_2$  son  $\lambda_1 = \frac{9}{10}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{11}{10}$

Por lo tanto, el punto de equilibrio  $(\pi, 0)$  es un punto silla para el sistema dado.

Los valores propios de  $J_3$  son  $\lambda_1 = -\frac{9}{10}$ ,  $\lambda_2 = \frac{11}{10}$

Por lo tanto, el punto de equilibrio  $(0, \pi)$  es un punto silla para el sistema dado.

Los valores propios de  $J_4$  son  $\lambda_1 = -\frac{11}{10}$ ,  $\lambda_2 = \frac{9}{10}$

Por lo tanto, el punto de equilibrio  $(\pi, \pi)$  es un punto silla para el sistema dado.

En general, todos los puntos de equilibrio de la forma  $(n\pi, m\pi)$  son puntos sillas para el sistema dado.

El polinomio característico de  $J_5$  es  $p_{J_5} = z^2 - 0.2z + 1.01$ .

Por lo tanto, los valores propios de  $J_5$  son  $\lambda_1 = 0.1+i$ ,  $\lambda_2 = 0.1-i$ . Esto implica que el punto de equilibrio  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  es un nodo espiral inestable para el sistema dado.

En general, todos los puntos de equilibrio de la forma  $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  son nodos espiral inestables para el sistema dado.

El campo vectorial del sistema está dado por

$$V(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = \left( \operatorname{sen}x \left( -\frac{1}{10} \cos x - \cos y \right), \operatorname{sen}y \left( \cos x - \frac{1}{10} \cos y \right) \right)$$

Luego

Por lo tanto, las rectas  $x = n\pi$ ,  $y = m\pi$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$  están formadas por trayectorias del sistema.

El diagrama de fase del sistema está dado por, (ver figura 3 y 4).

Figura 3. Campo de direcciones del sistema

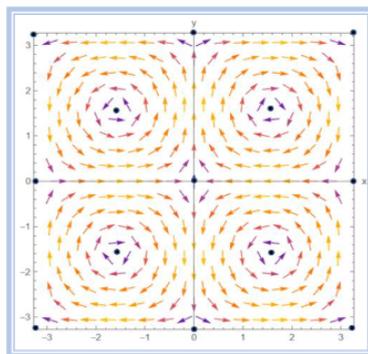


Figura 4. Campo de direcciones del sistema

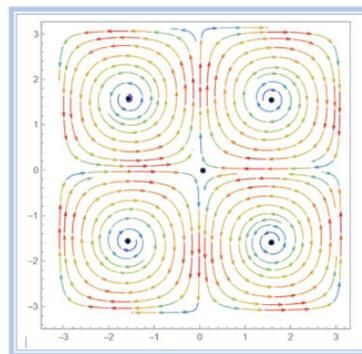


Figura 3. Campo de direcciones del sistema Figura 4. Campo de direcciones del sistema

Elaboración propia

Sea  $p = (x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ . De los diagramas anteriores se deduce que:

Si  $p = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , entonces  $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$

Si  $p \neq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < \pi$ , entonces  $\alpha(p) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$  y  $\omega(p) = C$ , donde es el contorno de la región  $R$ .

Note que, en este caso,  
 $w(p) = C$   
 está compuesto de cuatro trayectorias no triviales (heteroclinas) y cuatro puntos de equilibrio.

## 6. CONCLUSIONES

De los resultados probados en este artículo, se obtienen las siguientes conclusiones:

- Si  $\varphi(t, x)$  es la solución del sistema (1) que pasa por  $x$ , entonces  $\psi(t, x) = \varphi(-t, x)$  es la solución del sistema  $\dot{x} = -F(x)$ . Por lo tanto, el conjunto  $\alpha$ -límite de la solución  $\varphi(t, x)$  del sistema (1) es el conjunto  $\omega$ -límite de la solución  $\psi(t, x)$  del sistema  $\dot{x} = F(x)$  y viceversa. Por lo tanto, es suficiente estudiar sólo los conjuntos  $\omega$ -límites de los sistemas autónomos.
- Si la semi órbita  $\gamma^+(x)$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\omega(x)$  es un conjunto no vacío, compacto, invariante y conexo. Por lo tanto, si  $\omega(x)$  es finito, entonces  $\omega(x) = \{x\}$  y  $x$  es un punto de equilibrio del sistema autónomo (1).
- Si  $y \in \omega(x)$ , entonces  $\gamma(y) \cup \omega(y) \subset \omega(x)$ , además,  $\omega(x)$  es la unión de órbitas completas del sistema (1).
- Si  $\gamma(x)$  es una órbita periódica asociada a la solución  $\gamma(t, x)$  del sistema (1), entonces  $\gamma(x)$  encierra en su interior un punto de equilibrio del sistema (1).
- Con el conocimiento de las características de los conjuntos  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límite, se puede dibujar con mayor precisión los diagramas de fases de los sistemas autónomos, los que a su vez permiten hacer un estudio cualitativo más exacto de las situaciones de los sistemas autónomos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bamón, R. (1991). Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos. *Pro Mathematica*. (9 - 10), 145-168
- Hale, J. K. (2009). *Ordinary differential equations*. Dover Publications, Inc.
- Hirsch, M. W. y Smale, S. (2004). *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, Inc.
- MacCluer, B. D., Bourdon, P. S., and Kriete, T. L. (2019). *Differential Equations: Techniques, Theory, and applications*. American Mathematical Society.
- Ostrovskaya, N. V. and Lusipova, I. A. (2019). *Qualitative theory of dynamical Systems for control of magnetic memory elements*. *Phys. Metals Metallorg*, 120 (13). 1291–1298. <https://doi.org/10.1134/50031918x19130209>.
- Osuna, O. y Villaseñor-Aguila, G. (2011). Órbitas periódicas de sistemas planos. *AVANZA*.
- Strogatz, S.H. (2018) *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press.
- Zhang, Z. (2006). *Qualitative theory of differential equations*. Translations of mathematical monographs, volume 101. American Mathematical Society.