FUNCIONES ABSOLUTAMENTE CONTINUAS Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

TECNOCIENCIA

FUNCIONES ABSOLUTAMENTE CONTINUAS Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

franco, Ángela Y.; Hernández U., jorge e.; Díaz B., Edilma Judith; Vásquez S., Daniel

Ángela Y. franco
angela.franco@up.ac.pa
Universidad de Panamá,, Panamá

jorge e. Hernández U.
jorge.hernandezu@up.ac.pa
Universidad de Panamá,, Panamá

Edilma Judith Díaz B.
edilma.diaz@up.ac.pa
Universidad de Panamá, Panamá

Daniel Vásquez S.
daniel.vasquezs@up.ac.pa
Universidad de Panamá,, Panamá

Tecnociencia
Universidad de Panamá, Panamá
ISSN: 1609-8102
ISSN-e: 2415-0940
Periodicidad: Semestral
vol. 25, núm. 2, 2023
Luis.rodriguez@up.ac.pa

Recepción: 16 Febrero 2023

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/224/2244302011/

Resumen: El teorema fundamental del cálculo en la teoría de integración de Riemann afirma que si #: [#, #] → # es continua en [#, #], entonces la función integral indefinida
#: [#, #] → # definida por F(#) = ∫# #(#)## es diferenciable y # ′(#) = #(#) para todo # ∈ [#, #]; o sea que # es continuamente diferenciable en [#, #]. Recíprocamente,
si # es continuamente diferenciable en [#, #] entonces ∫# # ′(#)## = #(#) − #(#).
El objetivo de este trabajo es analizar el teorema fundamental del cálculo en la teoría de integración de Lebesgue. En particular, se introducen las funciones de variación acotada y las funciones absolutamente continuas y se prueba que las funciones absolutamente continuas son exactamente las funciones que satisfacen el teorema fundamental del cálculo en la teoría de integración de Lebesgue; o sea que una función
#: [#, #] → # es una integral indefinida sí y solo si # es absolutamente continua en
[#, #]. En este caso # es diferenciable casi en todas partes en [#, #], # ′ integrable en
[#, #] y ∫# # ′(#)## = #(#) − #(#).

Palabras clave: continuidad absoluta, variación acotada, medida de Lebesgue, integral de Lebesgue, convergencia casi en todas partes, teorema fundamental del calculo.

Abstract: The fundamental theorem of calculus in Riemann integration theory states that if #:[#, #] → # is continuous in [#, #] then the indefinite integral function #:[#, #] → # defined by #(#) = ∫ #(#)## # # is differentiable and # ′(#) = #(#) for all # ∈ [#, #], that is, # is continuously differentiable in [#, #]. Conversely, if # is continuously differentiable in[#, #] then ∫ # ′(#)## = #(#) − #(#). # # The objective of this work is to analyze the fundamental theorem of calculus in the Lebesgue integration theory. In particular, functions of bounded variation and absolutely continuous functions are introduced, and it is proved that absolutely continuous functions are exactly the functions that satisfy the fundamental theorem of calculus in Lebesgue integration theory. that is, a function #:[#, #] → # is an indefinite integral if and only if f is absolutely continuous in [#, #]. In this case # is differentiable almost everywhere in [#, #], # ′ integrable in [#, #] and ∫ # ′(#)## = # # #(#) −#(#).

Keywords: Continuidad absoluta, variación acotada, medida de lebesgue, Integral de Lebesgue, convergencia en casi todas partes, teorema fundamental del cálculo.

INTRODUCCIÓN

Un teorema muy importante en el análisis real y que ha motivado el desarrollo de muchos temas es el Teorema Fundamental del Cálculo (el cual se denota por TFC), ya que es un puente que conecta las teorías de diferenciación e integración. Del análisis real básico se sabe que si una

función #:[#, #] → # es diferenciable en [#, #] y si # ′ es continua en [#, #] entonces # ′ es Riemann integrable en [#, #] y

Como por hipótesis # ′ es continua en [#, #], la integral en la ecuación anterior existe como una integral de Riemann (Boyer, 2010) y (Eduardo, 1994) . La pregunta es ¿cómo puede ser el comportamiento de la derivada # ′ de una función # diferenciable en [#, #]? En esa dirección Gaston Darboux (1842-1917) probó que # ′ satisface la propiedad del valor intermedio en [#, #] y si # ′ en Riemann Integrable en [#, #], entonces (Error 175: El tipo de referencia Boyer, 2010 es un elemento obligatorio) (Error 176: El tipo de referencia Eduardo, 1994) es un elemento obligatorio)

Aunque este hecho es un progreso, la pregunta ahora es si por su naturaleza, la derivada # ′ de una función diferenciable en [#, #] debe ser Riemann Integrable en [#, #]. Esta pregunta fue respondida por Vito Volterra (1860-1940) quien presentó un ejemplo de una función diferenciable # en [#, #] con derivada # ′ acotada en [#, #] pero que no era Riemann Integrable en [#, #] ; por lo que la ecuación ∫ # ′(#)## = # # #(#) − #(#), en este caso, no tiene sentido (Dunham, 2018) y (Gelbaum, 2003). La pregunta ahora es si en la teoría de integración de Lebesgue se satisface el teorema fundamental del cálculo. Más precisamente: si # es diferenciable casi en todas partes (ctp) en [#, #] y # ′ es Lebesgue integrable en [#, #], entonces (Error 177: El tipo de referencia Dunham, 2018 es un elemento obligatorio) (Error 178: El tipo de referencia Gelbaum, 2003 es un elemento obligatorio)

donde la integral es en el sentido de Lebesgue. En general, la respuesta es no. En efecto, la función de Cantor #:[0, 1] → # es creciente y continua en [#, #], diferenciable ctp en [0, 1] con # ′(#) = 0 para todo punto # que no pertenece al conjunto de Cantor. Sin embargo, #(0) = 0, #(1) = 1 y, por lo tanto,

donde la integral es en el sentido de Lebesgue (Heil, 2010) , (Natanson, 2016) y (Krantz, 2018). (Error 179: El tipo de referencia Heil, 2010) es un elemento obligatorio) (Error 180: El tipo de referencia Natanson, 2016 es un elemento obligatorio) (Error 181: El tipo de referencia Krantz, 2018 es un elemento obligatorio)

El objetivo de este trabajo es caracterizar las funciones que satisfacen el teorema fundamental del cálculo en la teoría de integración de Lebesgue. Para tal efecto se presentarán las propiedades más importantes de las funciones de variación acotada y las funciones absolutamente continuas; así como algunos resultados sobresalientes de la teoría de integración de Lebesgue. Este tema es fundamental en la teoría del análisis real y ha sido objeto de muchos estudios por lo que la mayoría de los resultados no son nuevos, lo que es nuevo es el enfoque.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE INTEGRACIÓN DE LEBESGUE

Cada vez que se use la palabra medida en este trabajo se supondrá que es la medida de Lebesgue en #. Como es habitual en el análisis real, se usará ## para indicar la medida exterior de Lebesgue y # para indicar la medida de Lebesgue en #. Si A es un subconjunto medible de # entonces ##(#) = #(#).

Definición 1: Mar # un subconjunto de #. # es un conjunto nulo o de medida cero si # # (#) = 0. En este caso # es un conjunto medible y #(#) = 0.

Una propiedad que es satisfecha para todos los puntos de un conjunto # # #, excepto posiblemente para los puntos que pertenecen a un subconjunto # # # tal que #(#) = 0, se dice que es satisfecha casi en todas partes de #. Se abreviará "casi en todas partes" por "ctp".

Es conveniente usar un lenguaje relativamente informal para referirse a conjuntos de medida cero. Si #(#) es una propiedad aplicable a los elementos de un conjunto A, se dirá que

para indicar que {# ∈ #: #(#) ## #####} tiene medida cero. Por ejemplo, si #, #: # # # → # son funciones, se dice que # = # ctp en A si #({# ∈ #: #(#) ≠ #(#)}) = 0.

Por otro lado, si {## }#=1 ∞ es una sucesión de funciones con dominio común # y #: # → # una función, entonces la sucesión {## }#=1 ∞ converge (puntualmente) ctp en # si {## }#=1 ∞ converge a # en # − # donde #(#) = 0

En el siguiente teorema se presentan algunas caracterizaciones de los conjuntos medibles que permiten utilizar la medida de Lebesgue desde diferentes ángulos (Orchinnikov, 2013).

Teorema 1: Sea # un subconjunto de #. Los siguientes enunciados son equivalentes.

i) # es medible

ii) Para cada # > 0 existe un conjunto abierto # en # tal que # # # y
##(# − #) < #.

iii) Para cada # > 0 existe un conjunto cerrado # en # tal que # # # y
##(# − #) < #.

iv) Existe un conjunto G# G tal que # # G y ##(G − #) = 0.

v) Existe un conjunto F# F tal que F # # y ##(# − F) = 0.

Dado un subconjunto medible # de # de medida finita, si #: # → # es una función acotada y medible, entonces # es Lebesgue integrable en #;

es decir, ∫# # < ∞. De hecho, si # es un conjunto medible de medida
finita y #: # → # es acotada entonces # es Lebesgue integrable en # sí y solo si # es medible en #.

Si # = [#, #] se usarán las notaciones

para indicar
la integral de Lebesgue ∫[#,#] #. Para indicar la integral de Riemann se
usará la notación

El siguiente teorema muestra que la integral de Lebesgue es una extensión de la integral de Riemann (Krantz, 2018), (Tao, 2011).

Teorema 2: Sea #: [#, #] → # una función acotada en [#, #]. Si # es Riemann integrable en [#, #] entonces f es Lebesgue integrable en [#, #] y

De ahora en adelante la palabra integral significa la integral de Lebesgue, a menos que explícitamente se indique lo contrario.

En los siguientes teoremas de convergencia se supondrá que # es un subconjunto medible de # con medida finita (Krantz, 2018), (Natanson, 2016), (Tao, 2011).

Teorema 3 (convergencia acotada): Mar

una sucesión de funciones definidas y medibles en # y #: # → # una función. Suponga que existe un # > 0 tal que |## (#)| ≤ # para todo # ∈ #, # ∈ #. Si

converge af en A, entonces f es integrable en A y

Teorema 4: Mar #: # → # una función medible. entonces

Teorema 5 (Lema de Fatou): Mar

una sucesión de funciones no negativas y medibles definidas en # y #: # → # una función

converge a # ctp en # entonces

Teorema 6 (Convergencia Monótona): Mar

una sucesión creciente de funciones no negativas y medibles definidas en # y #: # → # una función. Si

converge a # ctp en # entonces

Teorema 7 (Convergencia Dominada): Mar

una sucesión de funciones medibles en # y #: # → # una función. Suponga que existe una función integrable #: # → # tal que para todo # ∈ #, # ∈ #. Si

converge a # ctp en #, entonces # en integrable en # y

Teorema 8: Mar #: # → # una función medible. # es integrable en # sí y solo si, para todo # > 0 existe un # > 0 tal que si # es un subconjunto

medible de # con #(#) < # entonces ∫# |#| < #.

Definición 2: Sea # una familia de funciones medibles en #. # es uniformemente integrable o equi-integrable en # si para todo # > 0 existe un # > 0 tal que para toda # ∈ #,

Si # es un subconjunto medible de # con #(#) < # entonces ∫# |#| < #.

Teorema 9 (Convergencia de Vitali): Mar

una sucesión de funciones uniformemente integrables en # y #: # → # una función. Si

converge a # ctp en [#, #], entonces # en integrable en # y

Teorema 10: Sea #:[#, #] → # una función integrable. Entonces #(#) = 0 ctp en [#, #] sí y solo si

para todo [#1, #2] # [#, #].

Finalmente, en el siguiente teorema se caracterizan las funciones integrables de Riemann.

Teorema 11: Mar #: [#, #] → # una función acotada. Entonces # es Riemann integrable en [#, #] sí y solo si # en continua ctp en [#, #].

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA Y ABSOLUTAMENTE CONTINUAS

Una función #: [#, #] → # es monótona si ella es creciente o decreciente en [#, #]. Además, si # es monotona entonces el conjunto

es a lo sumo enumerable y, las discontinuidades de # son de saltos (Folland, 2007). También se tiene el siguiente resultado debido a Lebesgue.

Teorema 12 (Lebesgue): Sea #: [#, #] → # una función monótona. Entonces # es diferenciable ctp en [#, #].

Del teorema 12 se deduce que la diferencia de dos funciones crecientes en un intervalo [#,#] es diferenciable c.t.p en [#,#]. En lo que sigue se caracteriza la clase de funciones que se pueden expresar como la diferencia de dos funciones crecientes en el intervalo no degenerado [#,#] o sea que #<#.

Sea #:[#,#]→# una función y considere la partición #={#0,#1,#,##}, donde #=#0<#1< #<##+1=#. La norma de # se denota por ‖ # ‖ y se define por

$$\|P\| = sup\{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, \cdots, n\}.$$

La familia de todas las particiones de [#,#] se denota por #([#,#]). La expresión

$$V_P = \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

se llama la variación de # con respecto a la partición #.

Definición 3: Sea #:[#,#]→# una función. La variación total de f en [#,#] es

$$V_a^b(f) = sup\{V_P : P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

es de variación acotada en [#,#] si ###(#)<∞. El conjunto de las funciones de variación acotada en [#,#] se denota #[#,#].

Ejemplo 1

i) Sea #:[#,#]→# una función monótona en [#,#]

- Si # es creciente en [#,#] entonces ##(#)=#(#)−#(#) para toda #∈#([#, #]). Por lo tanto, ###(#)=#(#)−#(#)<∞.
- Si # es decreciente en [#,#], entonces ##(#)=#(#)−#(#) para toda #∈#([#, #]). Por lo tanto, ###(#)=#(#)−#(#)<∞.

Así f es de variación acotada en [#,#] y ###(#)=|#(#)−#(#)|.

ii) Si #:[#,#]→# es una función lipschitziana en [#,#] con constante de Lipschitz #, entonces # es de variación acotada en [#,#] y ###(#)≤#(#−#).

iii Si #:[#,#]→# es diferenciable en [#,#] y #′ es acotada en [#,#], entonces # es de variación acotada en [#,#]. En particular, si # es continuamente diferenciable en [#,#], entonces # es de variación acotada en [#,#].

Propiedades: Sean #,#:[#,#]→# funciones.

1. Sea #∈#([#, #]). Si #′ es un refinamiento de # (o sea que #′ ∈#([#, #]) # ###′), entonces ##(#)≤##′(#).

2. Si #∈ (#, #), entonces #∈#[#, #] sí y solo si #∈#[#, #] # #∈#[#, #]. Además, si #∈#[#, #] entonces

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

3. Si #∈#[#, #] y [#,#]#[#,#] entonces #∈#[#, #] y

$$V_a^d(f) - V_a^c(f) = V_c^d(f) \geq 0.$$

4. Si #, #∈#[#, #] # #∈# entonces |#|,##,#±#, ##∈#[#, #].

Además, si $\frac{1}{g}$ es acotada en $[a,b]$ entonces $\frac{1}{g} \in V[a,b]$.

Sea #:[#,#]→# una función de variación acotada en [#,#]. Entonces, por la propiedad 2, se puede definir la función #:[#,#]→# por

$$V(x) = \begin{cases} V_a^x(f) & si \ \ a < x \leq b \\ 0 & si \ x = a \end{cases}$$

Por la propiedad (3) se tiene que # es creciente en [#,#]. # es llamada la función de variación total de # en [#,#].

Suponga que #≤#<#≤# y tome la partición #={#,#} de [#,#].

Entonces

$$f(c) - f(d) \leq |f(d) - f(c)| = V_P(f) \leq V_c^d(f) = V_a^d(f) - V_a^c(f)$$

de donde

$$\begin{gathered} f(c) + V_a^c(f) \leq f(d) + V_a^d(f) \\ f(c) + V(c) \leq f(d) + V(d) \\ (f + V)(c) \leq (f + V)(d) \end{gathered}$$

Lo que implica que #+# es creciente en [#,#]. Así se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 13 (Jordan): Sea #:[#,#]→# una función. Entonces #∈#[#, #] sí y solo si f se puede expresar como la diferencia de dos funciones crecientes en [#,#]. En este caso se tiene que

$$f(x) = (f + V)(x) - V(x), para\ todo\ x \in [a, b]$$

Lo que es conocido como la descomposición de Jordan de #.

Demostración.

Suponga que #∈#[#, #]. Entonces, por lo probado anteriormente, las funciones # # #+# son crecientes en [#,#] y #=(#+#)−#. Recíprocamente, suponga que #=#+# en [#,#], donde # # # son funciones crecientes en [#,#]. Luego, por el Ejemplo 1 se tiene que #, #∈#[#, #]. Por las propiedades de las funciones de variación acotada, se tiene que #=#−###[#,#].

Teorema 14: Sea #:[#,#]→# una función creciente. Entonces #′ es integrable en [#,#] y

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$$

Demostración.

Como # es monótona en [#,#] se tiene que # es medible en [#,#]. Por el teorema 12 # es diferenciable c.t.p en [#,#]. Extienda # que tome el valor #(#) en el intervalo (#,#+1]. Para cada #∈# defina las funciones ##,##:[#,#]→# por

$$f_n(x) = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad y \quad g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_x^{x+\frac{1}{n}} f \quad (\textit{función valor promedio de } f)$$

Luego, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas que converge a f' c.t.p en $[a, b]$. Por el Teorema 5

$$\int_a^b f' \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Por otro lado, como f es creciente en $[a, b]$ y constante en $\left[b, b+\frac{1}{n}\right]$, haciendo cambio de variables, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_a^b f_n = \int_a^b \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_a^b f(x)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f - \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_a^b f$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_a^{a+\frac{1}{n}} f$$

$$= f(b) - \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_a^{a+\frac{1}{n}} f$$

$$\leq f(b) - f(a)$$

Por consiguiente

$$\int_a^b f' \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n \leq f(b) - f(a)$$

Observación: Note que de la demostración del Teorema 14, se deduce que si #≤#<#≤#, entonces

$$\int_c^d f_n = g_n(d) - g_n(c)$$

Teorema 15: Sea #:[#,#]→# una función de variación acotada. Entonces # es diferenciable c.t.p en [#,#] y #′ es integrable en [#,#].

Demostración.

Como #∈#[#, #] por el Teorema 13, existen dos funciones crecientes #,#:[#,#]→# tal que #=#−#. Como, por el Teorema 12, # # # son

diferenciables c.t.p en [#,#], se tiene que #=#−# es diferenciable c.t.p en [#,#] y #′=#′−#′ c.t.p en [#,#]. Finalmente, como por el Teorema 14, #′# #′son integrables en [#,#], se tiene que #′ es integrable en [#,#].

Definición 4: Sea #:[#,#]→# una función. # es absolutamente continua en [#,#] si para cada #>0 existe un #>0 tal que para toda colección finita y disjunta {(##,##)}#=1 de intervalos abiertos en (#,#) tal que

$$\text{Si } \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta, \text{ se tiene que } \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Propiedades: Sea #,#:[#,#]→# funciones.

1. Se # es absolutamente continua en [#,#] entonces f es uniformemente continua en [#,#] (solo se debe tomar #=1 en la Definición 4). La recíproca no es cierta. La función #:[0,1]→# definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ xsen\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & si \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

es uniformemente continua en [0,1] pero no es absolutamente continua en [0,1].

2. Si # es lipschitziana en [#,#] entonces # es absolutamente continua en [0,1].

3. Si # es diferenciable en [#,#] y |#′(#)|≤# para todo #∈[#, #] entonces # es lipschitziana en [#,#] y, por ende, absolutamente continua en [#,#].

4. Si # # # son absolutamente continuas en [#,#] y #∈# entonces |#|,##,#±# # ## son absolutamente continuas en [#,#]. Además, si existe un #>0 tal que |#(#)|≥# para todo #∈[#, #], entonces 1# es absolutamente continua en [#,#].

Teorema 16: Sea #:[#,#]→# una función absolutamente continua en [#,#]. Entonces # es de variación acotada en [#,#]. Más aun, # es la diferencia de dos funciones crecientes y absolutamente continuas en [#,#].

Demostración.

Sea $\varepsilon = 1$. Como f es absolutamente continua en $[a,b]$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda colección finita y disjunta $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de intervalos abiertos en (a,b) con $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ se tiene que $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1$.

Sea $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_N = b\}$ una partición fija de $[a,b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Sea $\alpha_0 = x_{i-1} < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{k_i} = x_i$una partición del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces $\sum_{j=1}^{k_i}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = x_i - x_{i-1} < \delta$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n}|f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| < 1$. Esto implica que $V_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq 1$ para todo $i = 1, 2, \cdots, N$. Luego, por las propiedades de la variación total de una función, se tiene que

$$V_a^b(f) = V_{x_0}^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) + \cdots + V_{x_{N-1}}^{x_N}(f) \leq N$$

Como # es fijo, se tiene que # es de variación acotada en [#,#].

$$\sum_{k=1}^{n} V_{P_k}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando supremo cuando #=1,2,#,# y ##∈#([##, ##]) se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Como $V_{c_k}^{d_k}(f) = V_a^{d_k}(f) - V_a^{c_k}(f)$ se tiene que si $\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k) < \delta$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |V(d_k) - V(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left|V_a^{d_k}(f) - V_a^{c_k}(f)\right| = \sum_{k=1}^{n} V_{c_k}^{d_k}(f) < \varepsilon$$

lo que implica que la función variación total # de # es absolutamente continua en [#,#].

En el siguiente teorema se caracterizan las funciones absolutamente continuas.

Teorema 17: Sea #:[#,#]→# una función continua y sea #= {##: #∈#} la familia de funciones definidas por

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

(Ver demostración del Teorema 14). Entonces, # es absolutamente continua en [#,#] sí y solo si # es uniformemente integrable en [#,#].

Demostración.

De la observación del Teorema 14 se tiene que si #≤#<#≤#.

Entonces

$$\int_c^d f_n = g_n(d) - g_n(c)$$

donde ## es la función valor promedio de # definida por

$$g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_x^{x+\frac{1}{n}} f$$

Suponga que la familia $\mathcal{F}$ es absolutamente integrable en $[a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que si A es un conjunto medible con $\mu(A) < \delta$ entonces $\int_A |f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{m}$ una colección finita y disjunta de intervalos abiertos en (a,b) tal que $\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2, \cdots, m$ se tiene que

$$g_n(b_k) - g_n(a_k) = \int_{a_k}^{b_k} f_n$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{m} |g_n(b_k) - g_n(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k}^{b_k} |f_n| = \int_A |f_n|$$

donde $A = \bigcup_{k=1}^{m}(a_k, b_k)$ y $\mu(A) < \delta$. Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{m} |g_n(b_k) - g_n(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad para\ todo\ n \in \mathbb{N}$$

Pero como f en continua en $[a,b]$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_x^{x+\frac{1}{n}} f = f(x)$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por consiguiente, # es absolutamente continua en [#,#].

Suponga ahora que # es absolutamente continua en [#,#]. Luego, por el Teorema 16, # es la diferencia de dos funciones crecientes y absolutamente continuas. De esta forma, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que # es creciente. Por lo tanto, las funciones ## son no negativas. Se debe probar que para todo #>0 existe un #>0 tal que para todo conjunto medible # de [#,#] con #(#)<# se tiene que

$$\int_A f_n < \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Sea # un conjunto medible de [#,#]. Luego, por el Teorema 1, existe un conjunto G# G tal que ##G # #(G −#)=0. Pero todo conjunto G# es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos abiertos. Además, todo conjunto abierto es la unión disjunta de una colección enumerable de intervalos abiertos y, por lo tanto, todo conjunto abierto es la unión de una sucesión creciente de conjuntos abiertos, siendo cada uno la unión de una colección disjunta y finita de intervalos abiertos. Luego, por la continuidad de la integral, es suficiente determinar un #>0 tal que para toda colección finita y disjunta

$$\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$$

de intervalos abiertos en (#,#)se tiene que

$$\int_A f_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo #∈#, donde

$$A = \bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k) \text{ y } \mu(A) < \delta;$$

lo cual se deja al lector.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO PARA LA INTEGRAL DE LEBESGUE

Sea #:[#,#]→# una función continua. De la sección anterior se tiene que

$$\int_a^b f_n = g_n(b) - g_n(a), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

donde

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad y \quad g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_x^{x+\frac{1}{n}} f$$

Por lo tanto, como f es continua en [#,#], se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty}\left(g_n(b) - g_n(a)\right) = f(b) - f(a).$$

Teorema 18: Sea #:[#,#]→# una función absolutamente continua en [#,#]. Entonces # es diferenciable c.t.p en [#,#], #′ es integrable en [#,#] y

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

Demostración.Como f es absolutamente continua en [#,#], por los Teoremas 15 y 16 # es diferenciable c.t.p en [#,#] y #′ es integrable en [#,#]. Por lo tanto, la sucesión

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

converge c.t.p a #′ en [#,#]. Por el Teorema 17, la familia #= {##: # ∈ #} es uniformemente integrable en [#,#]. Luego, por el Teorema 9,

$$\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = f(b) - f(a)$$

por lo tanto,

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Definición 5: Sea #:[#,#]→# una función continua. # es una integral indefinida (de Lebesgue) si existe una función integrable #:[#,#]→# tal que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g$$

En este caso se dice que # es la integral indefinida de # en [#,#].

En el siguiente teorema se caracterizan las funciones que son integrales indefinidas.

Teorema 19: Sea #:[#,#]→# una función. Entonces, # es absolutamente continua en [#,#] sí y solo si # es una integral indefinida.

Demostración.

Suponga que # es absolutamente continua en [#,#]. Luego, # es absolutamente continua en [#,#] para todo # ∈ (#, #]. Por el Teorema 18 f es diferenciable c.t.p en [#,#] y

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

o sea que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'$$

Por lo tanto, # es la integral indefinida de #′ en [#,#].

Recíprocamente, suponga que # es una integral indefinida de # en [#,#].

Sea #>0. Como |#| es integrable en [#,#], por el Teorema 8 existe un #>0 tal que sí A es un subconjunto medible de [#,#] con #(#)<#, entonces ∫|#|#<#. Sea

$$\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$$

una colección finita y disjunta de intervalos abiertos de (#,#) tal que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta.$$

Entonces

$$A = \bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$$

es un subconjunto medible de [#,#] con #(#)<#.

Luego por las propiedades de monotonía y aditividad de la integral se tiene qué

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_{k=1}^{n}\left|\left(f(a) + \int_a^{b_k} g\right) - \left(f(a) + \int_a^{a_k} g\right)\right| \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k} g\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|g| \\ &= \int_A |g| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Esto implica que f es absolutamente continua en [#,#].

Teorema 20: Sea #:[#,#]→# una función monótona. Entonces, # es absolutamente continua en [#,#] sí y solo si ∫#′##=#(#)−#(#).

Demostración

Suponga que # es absolutamente continua en [#,#], entonces por el Teorema 18, # es diferenciable c.t.p [#,#], #′ es integrable en [#,#] y

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

independientemente de la hipótesis de monotonía.

Suponga ahora que # es creciente (en caso contrario tome −# en lugar de #) y que

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Sea # ∈ [#, #]. Por la aditividad sobre el dominio de integración, se tiene que

$$0=\int_a^b f'-\left(f(b)-f(a)\right)=\left[\int_a^x f'-\left(f(x)-f(a)\right)\right]+\left[\int_x^b f'-\left(f(b)-f(x)\right)\right].$$

Por el Teorema 14 se tiene que

$$\int_a^x f'-\left(f(x)-f(a)\right)\leq 0 \quad y \quad \int_x^b f'-\left(f(b)-f(x)\right)\leq 0$$

Por lo tanto,

$$\int_a^x f'-\left(f(x)-f(a)\right)=0 \quad y \quad \int_x^b f'-\left(f(b)-f(x)\right)=0.$$

Así

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'$$

y # es la integral indefinida de # ′. Luego por el Teorema 19 # es absolutamente continua en [#,#].

Teorema 21: Sea #:[#,#]→# una función integrable. Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\right)=f(x) \ \text{ c.t.p en } [a,b].$$

Demostración.

Sea #:[#,#]→# la función definida por

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'$$

Como # es una integral indefinida por los Teoremas 18 y 19, # diferenciable c.t.p en [#,#] y # ′ es integrable en [#,#]. Esto implica que # ′−# es integrable en [#,#].

Sea [$\#_1$,$\#_2$]#[#,#]. Por el Teorema 18 y las propiedades de linealidad y aditividad sobre el dominio de integración, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}(F'-f)&=\int_{x_1}^{x_2}F'-\int_{x_1}^{x_2}f\\&=F(x_2)-F(x_1)-\int_{x_1}^{x_2}f\\&=\int_a^{x_2}f-\int_a^{x_1}f-\int_{x_1}^{x_2}f\\&=0\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 10, (#′−#)(#)=0 c.t.p en [#,#]; es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\right) = f(x) \text{ c.t.p en } [a, b].$$

CONCLUSIONES

1. Sea #:[#,#]→# una función. Si #∈#[#, #], entonces, por el Teorema 13, #(#)=#(#)−#(#) donde # y # son funciones crecientes en [#,#]. Luego, por el Teorema 12, # y # son diferenciables c.t.p en [#,#]. Esto implica que f es diferenciable c.t.p en [#,#] y#′(#)=#′(#)−#′(#) c.t.p en [#,#]. Además, por el Teorema 15, #′ es integrable en [#,#].

2. Sea #:[#,#]→# una función. Por el Teorema 19, # es absolutamente continua en [#,#] sí y solo si # es una integral indefinida. En este caso, f es diferenciable c.t.p en [#,#], #′ es integrable en [#,#] y

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Además, si #′(#)=0 c.t.p en [#,#] entonces # es constante en [#,#].

3. Sea #:[#,#]→# una función de variación acotada. Como # es diferenciable c.t.p en [#,#] y #′ es integrable en [#,#], se pueden definir las funciones #,#:[#,#]→# por

$$g(x) = \int_a^x f' \quad \text{y} \quad h(x) = f(x) - g(x)$$

Por el Teorema 19 # es absolutamente continua en [#,#] y, por el Teorema 16 # es de variación acotada en [#,#]. Además, por el Teorema 21, #′(#)=0 c.t.p en [#,#]. Así #=#+#, donde # es absolutamente continua y # es singular (o sea, de variación acotada y con derivada nula c.t.p en [#,#]). Esta descomposición de una función de variación acotada es llamada una descomposición de Lebesgue de #

REFERENCIAS

Boyer, CB y Merzbach CB 2010. Una historia de las matemáticas. Wiley. EE.UU.

Dunham, W. 2018. The Calculus Gallery: obras maestras desde Newton hasta Lebesgue. Prensa de la Universidad de Princeton. EE.UU.

Edward, CH 1994. El desarrollo histórico del cálculo. Springer-Verlag. EE.UU.

Folland, G.B. 2007. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. Wiley. USA

Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H. 2003. Counter-example in Analysis. Dover Publications, Inc. USA.

Heil, C. 2010. Introduction to Real Analysis. Springer. USA.

Krantz, S. G. 2018. Elementary Introduction to the Lebesgue Integral. Taylor & Francis Group. USA.

Natanson, I.R. 2016. Theory of Functions of Real Variable. Valume I. Dover Publications, Inc. USA.

Orchinnikov, S. 2013. Measure, Integral, Derivative: A Course on Lebesgue´s Theory. Springer. USA.

Tao, T. 2011. An Introduction to Measure Theory. American Mathematical Society. USA.