

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO COMO RECURSO HISTÓRICO EN LA ENSEÑANZA ACTUAL

THE CIRCLE SQUARE AS A HISTORICAL RESOURCE IN CURRENT TEACHING



Bustos Arosemena, Sergio Alejandro

 Sergio Alejandro Bustos Arosemena
sergio.bustos@up.ac.pa
Universidad de Panamá, Panamá

Revista Saberes APUDEP
Universidad de Panamá, Panamá
ISSN-e: 2953-321X
Periodicidad: Semestral
vol. 5, núm. 1, 2022
revistasaberesapudep@gmail.com

Recepción: 30 Marzo 2021
Aprobación: 10 Mayo 2021

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/223/2233234017/>

Resumen: Este artículo trata uno de los problemas más famosos de la antigüedad: “La cuadratura del círculo”. En el mismo se presentan algunas soluciones al problema, que pueden ser usadas como recurso en el proceso de enseñanza – aprendizaje; además, cómo su vinculación en la enseñanza puede mejorar las expectativas que tienen los estudiantes hacia la Matemática. Al tratar de resolver se requiere la construcción geométrica de conceptos tan sencillos como lo son: punto medio, rectas paralelas, rectas perpendiculares, círculos, cuadrados, razones de segmentos, cálculos de áreas, entre otras que en el momento de ser aprendidos los alumnos no le dan mayor importancia.

Palabras clave: Problema, enseñanza, cuadratura del círculo, recurso histórico, aproximación, solución.

Abstract: This article addresses one of the most famous problems of antiquity: "Quadrature of the circle". It presents some solutions to the problem, which can be used as a resource in the teaching-learning process; and how their linkage in teaching can improve students' expectations for Mathematics. In attempting to solve, the geometric construction of concepts as simple as: midpoint, parallel lines, perpendicular lines, circles, squares, segment reasons, area calculations, among others, are required at the time of learning. Give it more importance.

Keywords: Problem, teaching, circle squaring, historical resource, approach, solution.

INTRODUCCIÓN

Existía en la antigüedad tres problemas que no podían ser resueltos de manera geométrica por dos simples y sencillos instrumentos utilizados por los griegos como lo son la regla y el compás, estos problemas eran: la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo.

Este artículo trata del segundo problema, “La cuadratura del círculo”, el cual tiene como objetivo presentar información histórica sobre la perspectiva griega hacia un problema, algunos intentos o soluciones y además, resaltar el hecho de cómo un problema tan antiguo de más de 2000 años puede trascender en la enseñanza actual de la Matemática mediante una educación más integra y cimentada en hechos históricos.

(Pérez, Álvarez, & Portas, 2006, p.360) afirman que una de las motivaciones que impulsaron a los matemáticos a enfrentarse al misterio de la cuadratura no fue hallar su solución, sino aprender más matemática al intentarlo.

Está claro que la solución al problema de la cuadratura del círculo con regla y compás no es posible, pero maravillosamente curiosos matemáticos han descubierto muchos otros conceptos matemáticos que han surgido a raíz de la búsqueda de dicha solución. El solo hecho de haber dejado en el olvido los intentos de solución a la cuadratura del círculo o cualquier otro de los problemas famosos de la antigüedad, supone restringir el paso de la Matemática hacia nuevas ramas y conceptos importantes.

Según Pan (2005) la historia sobre la resolución de los tres problemas geométricos clásicos está llena de anécdotas, y como consecuencia de ellos surgieron, por ejemplo,

las secciones cónicas, cálculo aproximado del número pi, el método de exhaustión como predecesor del cálculo de límites o la introducción de curvas trascendentes.

Gracias a estos problemas famosos de la antigüedad se descubrieron nuevos conceptos matemáticos y que muchos estudiantes desconocen, de manera que, en la actualidad, se aprende sin saber el motivo o necesidad de los matemáticos antiguos en crear estas nuevas herramientas.

Es vital que el docente del siglo XXI reconozca que no puede enseñar una Matemática sin nexos con el pasado, ya que de lo contrario se enseñaría la Matemática a medias y que resultaría una ciencia sin sentido para los alumnos, hecho que repercutiría en las generaciones posteriores.

DESARROLLO DEL TEMA

Es necesario que para este siglo los docentes de matemática dominen no solo los procesos algorítmicos, sino que conozcan a fondo su materia con hechos históricos y los puedan utilizar para mejorar su calidad de enseñanza.

Lupiáñez (2002) afirma que para la gran mayoría de los estudiantes de Matemática, los conceptos que se enseñan están carentes de historia, y el hecho de que en la instrucción no aparece generalmente el proceso de creación matemática y que no se afrontan problemas de épocas pasadas, favorece ese pensamiento. A pesar de que cada vez son más los libros de texto en los que se relatan notas históricas de los tópicos que tratan, una escasa formación de los docentes relativa a cómo emplear estos materiales hace que no se aprovechen.

Esta y muchas otras afirmaciones nos dejan claramente el panorama que se percibe acerca de la enseñanza de la Matemática y su vínculo con la historia. Un docente no puede ser perfecto, pero es bueno que utilice recursos de carácter histórico como el problema de la cuadratura del círculo, ya que a raíz de dicho problema se ha logrado la adquisición de nuevos conceptos: el descubrimiento de las secciones cónicas, curvas cúbicas y cuárticas y al de una curva trascendental llamada la cuadratriz.

(Avital, 1995) señala cómo un conocimiento y comprensión del desarrollo histórico de la Matemática puede contribuir en cuatro áreas específicas de la investigación y el aprendizaje. Estas áreas son:

1. Obteniendo ideas acerca de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.
2. Suministrando modos de instrucción.
3. Incorporando propuestas y resolución de problemas en la instrucción
4. Llamando la atención a factores emocionales y afectivos en la creación y aprendizaje de la Matemática.

Sin embargo, podría haber muchas otras áreas en las cuales otros autores afirman se ve beneficiada la enseñanza de la Matemática a través de su historia, pero es aquí donde el docente debe reflexionar sobre su diario que hacer y la forma en como enseña.

Martínez (2012) plantea que se espera que tanto estudiantes como docentes entiendan mejor los conceptos y teorías, al conocer la forma en que estos se desarrollaron en la historia, pero además que esta comprensión cambie la forma en que perciben la Matemática.

En pocas palabras se desea usar la Historia de la Matemática como un recurso en la enseñanza actual de la Matemática y que permita a los estudiantes no solo aprender nuevos conceptos, sino cambiar su manera de pensar frente a tan preciosa y milenaria disciplina.

A continuación se detalla un panorama de como los griegos definían un problema y como muchos matemáticos han tratado de resolverlos.

UN POCO DE HISTORIA

Según Morales (2002) para los griegos cualquier problema cuya solución sólo podía obtenerse utilizando otras figuras o medios que iban más allá de las construcciones fundadas en las intersecciones de rectas y circunferencias o bien el uso exclusivo de regla y compás, era considerado un problema que no encuadraba con su geometría de

polígonos y poliedros. Por otra parte, dichas soluciones que no requerían de regla y compás llamaban poderosamente la atención de los griegos debido a que algunos de los métodos que resolvían uno de esos problemas a veces resolvían también otro, hecho que revelaba alguna relación entre los mismos y que permaneció siempre oculto para ellos.

El segundo problema famoso de la antigüedad fue la cuadratura del círculo, esto es, encontrar un cuadrado cuya área sea la misma que la de un círculo dado. La solución sería simple si se pudiera encontrar una línea recta que sea igual en longitud a la circunferencia del círculo, esto es si se lograra rectificar la circunferencia. Se hace fácilmente enrollando una línea recta en forma de círculo, pero tal procedimiento utiliza un instrumento adicional a la regla y el compás: un cilindro con una superficie graduada. De la investigación de estos problemas se ocuparon numerosos pensadores griegos del periodo helénico, el más antiguo de los cuales fue el filósofo Anaxágoras, contemporáneo notable de Zenón y a quien se conoce como el último de los celebrados filósofos de la escuela jónica.

Anaxágoras fue llevado a prisión en Atenas por su impiedad al afirmar que el Sol no era una deidad sino una enorme piedra calentada al rojo, tan grande como el Peloponeso y que la Luna era una tierra deshabitada que recibía la luz del Sol. (Morales, 2002) Anaxágoras representaba claramente la motivación griega típica: el deseo de saber. En su libro Sobre el exilio que escribió en la primera centuria d.C., Plutarco cuenta que mientras Anaxágoras estaba en la cárcel intentó “cuadrar el círculo”.

Es conocido que en el siglo V a.C., Hipócrates de Quío hizo la primera contribución de importancia a los problemas de cuadrar el círculo y duplicar el cubo, pero también estudió el problema de trisectar un ángulo. En estos casos estos griegos se hacían valer de soluciones o curvas mecánicas, pues su construcción se basa en un experimento mental que involucra un movimiento y que no es aceptada.

Se puede ver que varios matemáticos de la antigüedad dedujeron otros resultados al tratar de expresar el área del círculo a través de otro tipo de figuras.

APROXIMACIONES BASADAS EN CURVAS ESPECIALES

Algunas soluciones a la cuadratura del círculo por medio de curvas especiales (Contreras & Del Pino, 2011.):

a) Espiral de Arquímedes.

Tenemos L una recta en el plano que gira en torno a un punto fijo O hasta volver a su posición inicial, y así sucesivamente; y si al mismo tiempo, un punto A , punto móvil en L , se desplaza uniformemente a lo largo de la recta comenzando en el punto fijo. El punto A describe una espiral en el plano. Para cuadrar el círculo, Arquímedes dio la siguiente construcción: Sea P el punto de la espiral cuando la recta L completa la primera vuelta. Sea T el punto de intersección entre la recta tangente a la espiral en P y la recta perpendicular a OP que pasa por O . Arquímedes probó que el segmento OT corresponde al perímetro de la circunferencia de radio OP , y que el área del círculo de radio OP es igual al área del triángulo rectángulo OPT .

b) Mediante la cicloide.

Galileo descubrió que mediante la cicloide se puede construir una superficie equivalente a un círculo dado. La cicloide es la curva que describe un punto fijo en una circunferencia que gira, sin resbalar, sobre una línea recta fija. Suponiendo la circunferencia de radio 1 (ver fig. 1a), la medida del segmento que une la posición de dos puntos de contacto consecutivos del punto fijo con la recta fija, es 2π . Luego, rodando la circunferencia de radio 1, medio giro, se obtiene un segmento (denotado por AB, en la figura de la derecha) de longitud π (ver fig. 1b).

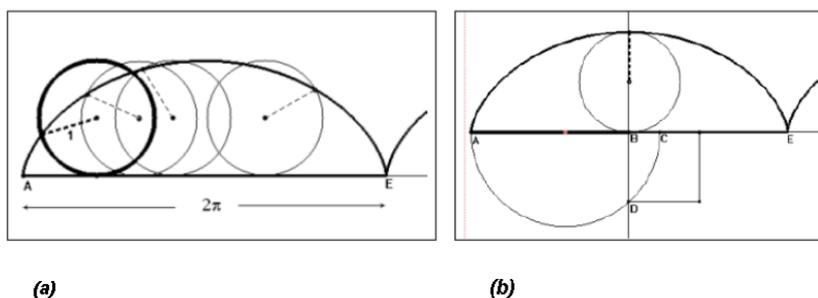


FIG. 1.
La Cicloide de Galileo.

Contreras & Del Pino, 2011.

Luego, construyendo la semicircunferencia de diámetro $AC = AB + 1$, y trazando por B la recta perpendicular a la recta fija, se obtiene el punto de intersección D. La relación

$AB \cdot AC = BC^2$ permite resolver el problema ya que la longitud de AB es π , y la de BC es 1.

Como se ha podido observar, existía y existe aún la dificultad de construir el número π con regla y compás, los matemáticos solo han podido aproximarse ya que dicha construcción es imposible.

“En su tratado “Sobre la medida del círculo” Arquímedes demostró que “El área A de cualquier círculo es igual al área de un triángulo rectángulo en el cuál uno de los catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia.”, y que “la razón entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ pero mayor que $3\frac{10}{71}$, proporcionando una buena aproximación para π . (Katz, 2009, pp. 101- 102)” Citado por (De Faria, 2010, p.156)

La cuadratura del círculo es considerada uno de los problemas a través de los cuales ha emergido el concepto del número pi, hecho de gran consideración del cual un docente

puede valerse al enseñar sobre el tema en cuestión y provocar en los estudiantes el interés por el conocimiento de los hechos históricos de cada nueva enseñanza.

SOLUCIONES AL PROBLEMA PARA USAR EN EL AULA

Como ya se había mencionado, el propósito de este artículo es presentar información histórica sobre la perspectiva griega hacia un problema, algunos intentos o soluciones y además resaltar el hecho de cómo un problema tan antiguo de más de 2000 años puede trascender como recurso de carácter histórico en la enseñanza actual de las matemáticas. Según Juidías & Rodríguez (2007) la definición adecuada de un problema matemático va a depender, por un lado, de la disponibilidad de una amplia gama de estrategias que podemos aplicar para resolverlo. En otras palabras, el ser humano puede utilizar diferentes formas para resolver un problema. A continuación se presentan algunas soluciones a problemas referentes a la cuadratura del círculo, que no brindan un resultado exacto, ya que es un problema imposible de resolver con regla y compás como se sugiere pero que pueden ser utilizados en el aula de clases para aportar un hecho histórico y a la vez didáctico en la enseñanza de la Matemática.

La cuadratura del círculo realizada en el antiguo Egipto, como se describe en el Papiro de Rhind.

El siguiente problema que se encuentra en el papiro de Rhind que involucra la cuadratura del círculo se enuncia y resuelve del siguiente modo (Konic, Godino, Castro, & Rivas, 2014, p. 1009):

Problema 50: "Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet = 900 codos. ¿Cuál es su área?"

La solución que se describe es: *"Resta 1/9 del diámetro, esto es, 1; el resto es 8. Multiplica 8 veces 8; resulta 64. Por tanto contiene 64 setat = 640000 codos cuadrados de tierra."*

En estos problemas el área del círculo se iguala a la de un cuadrado cuyo lado es (8/9) del diámetro del círculo.

"No se sabe cómo pudieron llegar a esta fórmula para hallar la "cuadratura del círculo", pero un pequeño diagrama geométrico que acompañaba al problema 48 ofrece una posible clave (Eves, 1969; reproducido en Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.402)" Citado por (Konic, et al, 2014).

Como lo señala el autor muchas civilizaciones antiguas lograron cuadrar el círculo sin dejar rastro de sus métodos, pero se puede deducir a partir de los diagramas que acompañan a los problemas y así poder entender lo que hicieron para llegar a tan sorprendentes respuestas.

El diagrama sugiere que al cuadrado se le han cortado las cuatro esquinas a una distancia 1/3 del lado. Si la figura se dibuja con cuidado y se inscribe un círculo se observa que el área del círculo inscrito se ajusta bastante bien mediante el área de la figura octogonal obtenida. Si el diámetro del círculo se toma como 9, también será 9 el lado del cuadrado,

por tanto el octógono tendrá de área: $81 - 4(9/2) = 63$, y el lado del cuadrado de igual área que el círculo será $\sqrt{63}$ que, a su vez se puede aproximar por $\sqrt{64}$, o sea, 8.

Por consiguiente, el lado de un cuadrado equivalente es aproximadamente los 8/9 del diámetro del círculo dado.

Este tipo de solución un poco rústica pero con sentido lógico puede ser utilizado en el aula de clases y el docente puede incluso valerse de esta forma de resolver el problema mediante la ayuda de recursos didácticos y presentar hechos referentes al nacimiento de la Geometría en culturas antiguas como lo es en el antiguo Egipto y así poder usar la historia de la Matemática en la enseñanza actual.

La siguiente solución a la cuadratura del círculo que puede ser aplicada en la enseñanza de la Matemática en el aula, requiere de un poco de trabajo con los instrumentos geométricos: regla y compás, pero valiéndose del momento en que se vive es posible practicar esta solución con la tecnología a través del software Geogebra y así increíblemente se puede enlazar la historia de un problema tan antiguo con la enseñanza de la Matemática en la actualidad y además utilizar los recursos tecnológicos.

La cuadratura del círculo por Ramanujan.

Según (Contreras & Del Pino, 2011.), posterior a la demostración de la imposibilidad de construir con regla y compás el número π muchos matemáticos continuaron trabajando con el problema geométrico con el propósito de obtener construcciones aproximadas de dicho número. Algunas construcciones aproximadas del número π con regla y compás, se deben a Ramanujan, publicadas en 1913 en un paper llamado Squaring the circle. A continuación se presenta una de sus construcciones, que da una aproximación de 355/113 para el número π y que puede ser utilizada en la enseñanza de la geometría a través de regla y compás o bien con la utilización de un software de geometría como lo es Geogebra:

Dada una circunferencia de centro A y radio r (ver fig. 2):

- Trazar el segmento AN.
- Construir el punto C en la recta AN tal que $AC = \frac{7}{8}AN$
- Trazar la recta BC y construir el punto E en BC tal que $BE = \frac{1}{2}BA$
- Trazar por E la perpendicular a BA, y determinar en esta recta el punto F.
- Trazar la circunferencia con centro B y radio BA= r. Determinar el punto H, punto de intersección de esta circunferencia con la circunferencia dada.

- Por H trazar la recta perpendicular a AN, trazar por B la recta paralela a AN, y determinar el punto I.
- Trazar la circunferencia con centro en I y radio IB. Sea K el punto de intersección entre esta circunferencia y la recta IB.
- En el triángulo rectángulo KFB se cumple: $FB^2 + BK^2 = FK^2$ equivalente a

$$\left(\frac{4}{\sqrt{113}}r\right)^2 + (r\sqrt{3})^2 = r^2 \frac{355}{113}$$

Así, el área del cuadrado de lado $FK = FK^2 = r^2 \frac{355}{113} \approx \text{área del círculo}$.

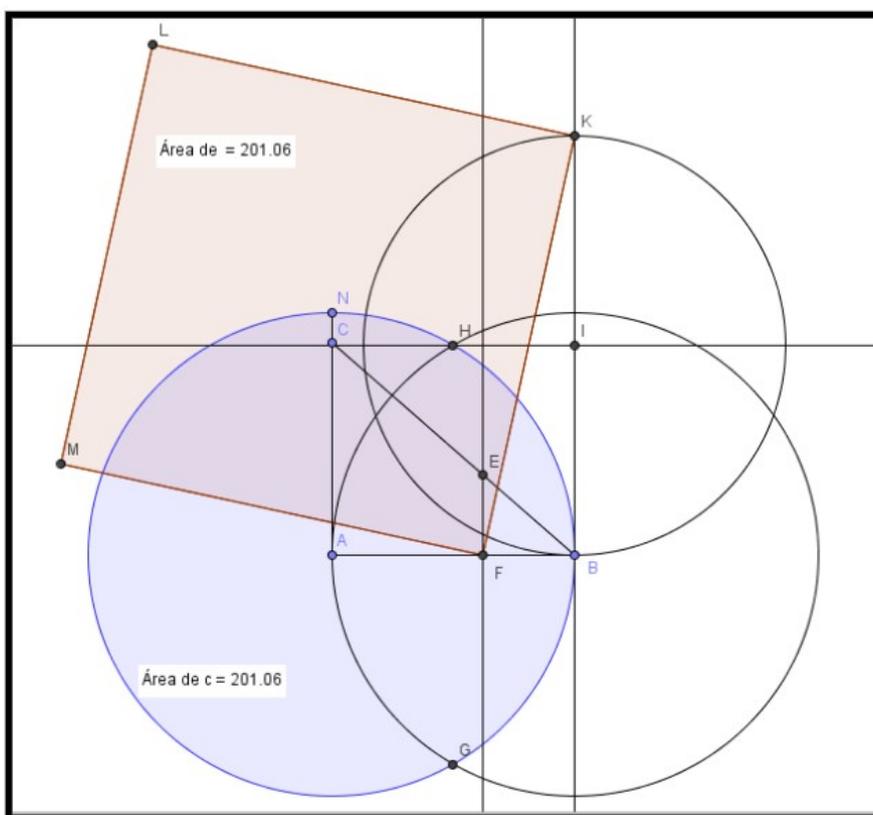


FIG. 2.
La cuadratura de Ramanujan.
el autor.

Posible solución de la cuadratura del círculo

Según (Pimentel 2013) la siguiente posible solución no reúne la condición del valor de $\# = 3.125$. Para obtener la aproximación de la cuadratura del círculo se realizan los siguientes pasos (ver fig. 3):

- Trazamos la circunferencia (contorno azul) a cuadrar de radio AB.

- Construimos su mitad (punto C) y luego la mitad de esta (punto D), es decir la cuarta parte del radio, de modo que se obtenga un segmento igual a $\frac{5}{4}$ del radio (segmento AD').
- Tomando como radio este segmento se traza una circunferencia con el mismo centro (A) de la circunferencia de partida: los puntos de corte de esta circunferencia con los ejes de coordenadas (B, D', F, G) nos dan los cuatro vértices del cuadrado solución.

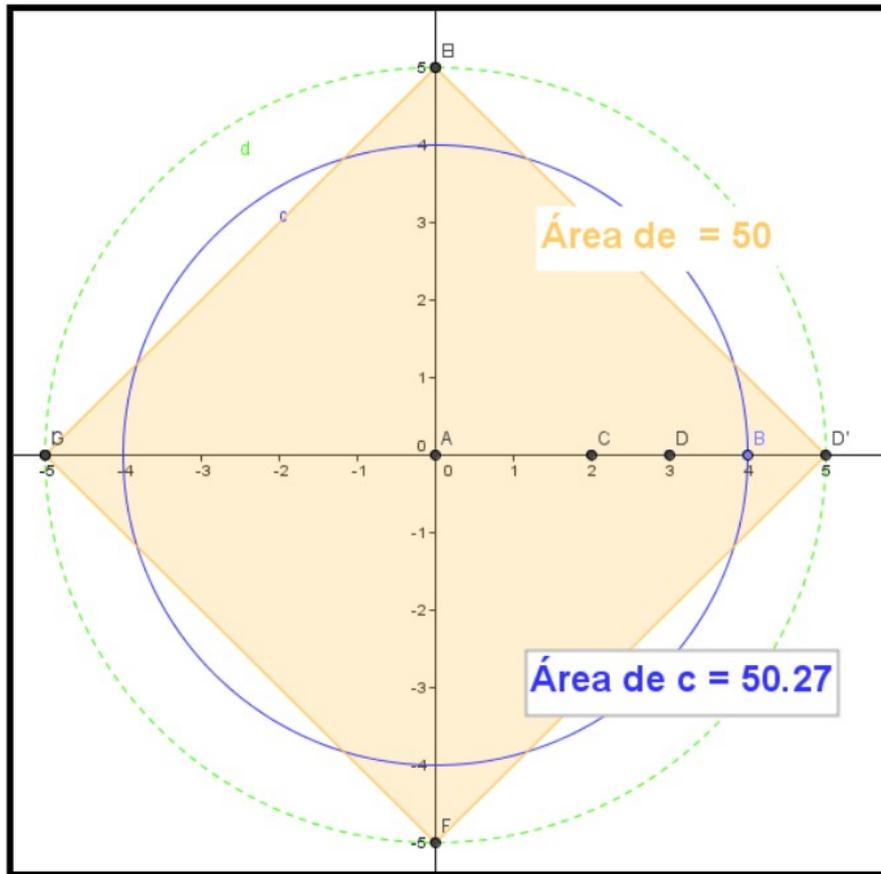


FIG. 3.
Posible solución de la Cuadratura del círculo.
El autor.

Actividad post-solución

Una vez que una de estas tres soluciones al problema se practique en el aula de clases con regla y compás, o bien con un software de fácil uso como Geogebra, los alumnos deben estar capacitados para responder a las preguntas del cuadro (1):

Objetivo: *Explicar de manera coherente los conceptos y pasos utilizados para resolver el problema de la cuadratura del círculo.*

CUADRO 1.A
Actividad post-solución.

Actividad post-solución		
Nombre: _____ Nivel: _____ Fecha: _____		
Profesor: _____ Puntos obtenidos: _____ Evaluación: _____		
Preguntas	Respuesta. (3pts c/u). Responde sí o no. Justifica tus respuestas.	Conceptos utilizados (2 pts.)
1) ¿Es necesario utilizar medidas para las construcciones iniciales?		
2) ¿Se requieren distancias de valores enteros para dividir un segmento a la mitad?		

el autor.

CUADRO 1.B
Actividad post-solución.

3) ¿Se pueden construir ángulos de 90° con regla y compás?		
4) ¿Puedes construir rectas separadas que no se intersequen?		
5) ¿Qué te permite determinar si has llegado a la solución?		

el autor.

Esta actividad puede fomentar en los alumnos la capacidad de reflexión y retrospección de conceptos matemáticos utilizados de manera que se le dé importancia a cada concepto matemático aprendido de un profesor de Matemática.

CONCLUSIONES

La enseñanza de la Matemática a través de su historia, en definitiva, es una de las mejores ideas que un docente de este siglo puede utilizar; ya que con este tipo de práctica se le da sentido y coherencia lógica a la disciplina que muchos estudiantes desconocen y que aprenden de manera mecánica sin importar su origen. Según Martínez 2012 quien cita a (Barbin et al., 2000), se ha documentado que después de usar historia en la clase de matemática de secundaria, un estudiante reporta que la Matemática deja de ser una ciencia muerta y pasa a tener vida, con un desarrollo histórico que incluye aplicaciones prácticas. Cuando los estudiantes le dan significado a un contenido, lo aprenden mejor.

Este artículo es un recurso histórico de suma importancia que muestra los inicios de la resolución de problemas en la antigüedad y sirve en la enseñanza actual de la matemáticas en todos los niveles.

Al tratar de resolver el problema se generan aprendizajes significativos como la construcción de elementos geométricos sencillos, entre ellos: punto medio, rectas paralelas, rectas perpendiculares, círculos, cuadrados, razones de segmentos, cálculo de áreas, entre otros y que al momento de ser aprendidos el estudiante no le encuentra la importancia, pero al tratarse la resolución de un problema, su correcto uso logra ese valor de aprendizaje.

Como docentes representantes en las aulas de clase, de tan importante disciplina, es necesario que los docentes de Matemática sean agentes de cambios en la didáctica utilizada en la enseñanza de la matemática, para alentar a la sociedad a creer en el valor y dependencia del ser humano hacia esta área del saber con tan bonita historia y que pasa desapercibida por los estereotipos ya establecidos. Según Escorza (2005) la importancia de la Matemática para la sociedad es un atractivo para los que llegan realmente a comprenderla, y, por otra, se evidencia el ser una ciencia no siempre bien estimada entre los estudiantes, que se ven obligados a estudiarla, y por la sociedad en general, que parece relegarla a un mundo propio y cerrado, pero poco unida

a la idea de lo que se entiende por “Cultura”. Esto significa que se requiere hacer de la Matemática un hábito y no una tortura, además no se debe aislar de la sociedad, todos los estudiantes de una u otra manera deben ser capaces de entender la Matemática en distintos niveles pero a su ritmo y sin presión; este punto de equilibrio se puede alcanzar solo si los especialistas logran aunar el conocimiento matemático con su historia para entonces ver la importancia, aplicación y de allí la tan anhelada necesidad de ser comprendida.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios, por permitirme vivir esta maravillosa experiencia de aportar una idea literaria sobre la enseñanza de la Matemática a través de su historia. A mi esposa Ana por el apoyo incondicional y ánimo proporcionado para seguir investigando contenido que podrá ser leído y usado como recurso de carácter histórico en la enseñanza actual de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Avital, S. (1995): «History of Mathematical Can Help Improve Instruction and Learning», en Learn From The Masters, MAA, Washington DF. Recuperado de: <https://books.google.com.pa/books?id=gqGLoh-WYrEC&pg=PA3&dq>
- Contreras, J., & Del Pino, C. (2011). Sobre el problema de la cuadratura del círculo. *Revista del Instituto de Matemática y Física*, 42-49. Recuperado de: <http://www.matesup.cl/portal/revista/2004/5.pdf>
- De Faria, E. (2010). Elementos de historia del cálculo diferencial e integral. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 153-160. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/4534/1/DefariaElementosALME2010.pdf>
- Escorza, J. (2005). Matemáticas, sociedad y desarrollo humano. *Dialnet*, 1-11. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2057964.pdf>
- Juidías, J., & Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 257-286. Recuperado de: http://www.revistaeducacion.mec.es/re342/re342_13.pdf
- Konic, P., Godino, J., Castro, W., & Rivas, M. (2014). Estudio epistémico del número pi: Implicaciones didácticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1005- 1012. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/5658/1/KonicEstudioALME2014.pdf>
- Lupiañez G., José. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Revista Suma*, 59-63. Recuperado de: <https://revistasuma.es/IMG/pdf/40/059-063.pdf>
- Martín R, D. (2005). La cuadratura del círculo. ¿Cómo ves?, 16.
- Martinez, M., & Chavarría, J. (2012). Usos de la historia en la enseñanza de la matemática . VII Festival Internacional de Matemática , 1-5. Recuperado de: <http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Margot-Martinez3.pdf>
- Morales, L. (2002). La cuadratura del círculo y otros problemas de geometría. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal*, 1-13. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/644/64406510.pdf>
- Pan C., A. J. (2005). Construcciones con regla y compás. *Revista de Divulgación Matemática*, 29-36.
- Pérez, U., Álvarez, M., & Porta, P. (2006). Las Reflexiones de Fray Martín Sarmiento Sobre la Cuadratura del Círculo. *Dialnet*, 357-375. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2579769>
- Pimentel, A. (2013). Contribuciones a la enseñanza matemática generadas por el intento de resolver el problema de la cuadratura del círculo. Trabajo para optar por el título de Licenciado en Matemática. David, Panamá.