Comparación de los modelos de Black-Litterman, Markowitz y CAPM en la estimación de los rendimientos esperados en el mercado de renta variable en Colombia

Comparison of the Black-Litterman, Markowitz and CAPM models in the estimation of expected returns in the variable income market in Colombia

Ossa González, Genjis A

Genjis A Ossa González [1]
Universidad Popular del Cesar, Colombia

Revista Estrategia Organizacional
Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Colombia
ISSN: 2339-3866
ISSN-e: 2539-2786
Periodicidad: Semestral
vol. 12, núm. 2, 2023
revista.ecacen@unad.edu.co

Recepción: 02 Enero 2023
Revisado: 01 Febrero 2023
Aprobación: 22 Marzo 2023

URL: http://portal.amelica.org/ameli/journal/133/1334502002/

Resumen: *Introducción:* Este artículo se centra en el estudio y la aplicación del modelo Black Litterman (BL) a seis empresas de la bolsa de valores de Colombia (BVC), se consideran los retornos históricos, las capitalizaciones de mercado y las perspectivas sobre el comportamiento futuro de los activos con el fin de obtener los rendimientos esperados. *Metodología:* se comparan los resultados de este enfoque con los modelos de Markowitz y el CAMP, el periodo de estudio comprende desde el 28 de febrero de 2018 al 24 de febrero de 2023. La investigación es de tipo cuantitativo, descriptivo y longitudinal, se utiliza la tasa libre de riesgo TFIT16240724 y el índice ICOLCAP como medidas de riesgo del mercado. *Resultados:* estos fueron evaluados, concluyéndose que el modelo de Markowitz presentó los rendimientos individuales más optimistas y rentables, mientras que los modelos de BL y CAMP presentaron rendimientos esperados muy bajos. Los rendimientos de los portafolios optimizados para los modelos de Markowitz y Black Litterman tienen una percepción similar sobre las tendencias de las acciones, pero difieren en su percepción del riesgo.

Palabras clave: Markowitz, CAPM, Black-Litterman, rendimientos, aversión al riesgo, logaritmo, optimización de portafolios.

Abstract: *Introduction:* This article focuses on the study and application of the Black Litterman (BL) model to six companies on the Colombian Stock Exchange (BVC), considering historical returns, market capitalizations, and perspectives on the future behavior of assets. in order to obtain the expected returns. *Methodology:* the results of this approach are compared with the Markowitz and CAMP models, the study period covers from February 28, 2018, to February 24, 2023. The research is quantitative, descriptive, and longitudinal, it is used the risk-free rate TFIT16240724 and the ICOLCAP index as measures of market risk. *Results:* were obtained, they were evaluated, concluding that the Markowitz model presented the most optimistic and profitable individual returns, while the BL and CAMP models presented very low expected returns. Portfolio returns optimized for the Markowitz and Black Litterman models have a similar insight into stock trends but differ in their perception of risk.

Keywords: Markowitz, CAPM, Black-Litterman, returns, risk aversion, logarithm, portfolio optimization.

1. INTRODUCCIÓN

La construcción de portafolios de inversión es un proceso clave en el mundo de las finanzas ya que su objetivo es crear una combinación de diferentes activos financieros, como acciones, bonos, fondos de inversión, y otros instrumentos que maximice el rendimiento esperado con un riesgo mínimo, utilizando información histórica sobre los rendimientos, la capitalización de mercado y otros factores (Kocuk, B., y Cornuéjols, G. 2020). Sin embargo, maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo a menudo son objetivos en conflicto, y los inversores deben tomar decisiones basadas en su experiencia y en su nivel de aversión al riesgo. Además, este proceso de decisión es complejo porque implica entender las distintas clases de activos, las ponderaciones que afectan en términos de retorno y riesgo los activos (Novales, 2017), y cómo las decisiones tomadas impactan directamente en los objetivos de inversión en el tiempo.

Existen varios modelos disponibles para los inversores en la formación de portafolios. Por ejemplo, en Markowitz, H. (1952) presentó el modelo de varianza media, con el objetivo de limitar el riesgo para un nivel particular de rendimiento o maximizar el rendimiento para cada nivel de riesgo. Los rendimientos históricos de los activos, el riesgo asociado a cada uno (medido por la varianza de los rendimientos previstos) y la correlación entre cada par de activos se tienen en cuenta a lo largo del proceso de selección de la cartera. Este enfoque según Fahmy, H. (2020) tiene como objetivo identificar la cartera ideal, que distribuye uniformemente el riesgo de cada activo dentro de la cartera para garantizar el rendimiento.

Luego, Sharpe, W. (1966) desarrolló el modelo de análisis de varianza media de Markowitz para convertirlo en un modelo de Valoración de Activos de Capital [CAPM] para determinar la tasa de rendimiento requerida para una determinada actividad. Para calcular el rendimiento esperado de la inversión en relación con el rendimiento del mercado, el CAPM utiliza beta, una medida del riesgo sistémico de un activo. No obstante, durante el proceso de creación de una cartera de inversión, es factible que los inversores posean opiniones subjetivas acerca del desempeño futuro de las acciones, lo cual representa una necesidad que no puede ser satisfecha por el modelo CAPM.

Black y Litterman (1992) propusieron el modelo Black-Litterman (BL) en la revista *Financial Analyst Journal* para abordar esta limitación. El modelo BL se basa en la idea de que los inversores tienen creencias y opiniones individuales sobre los retornos esperados de varios tipos de activos. El enfoque Black-Litterman permite al inversor crear la cartera ideal al fusionar estas perspectivas irracionales con información factual sobre los retornos y riesgos de los activos. Comenzando con una cartera de mercado existente, el método se modifica en función de las creencias del inversor. El modelo utiliza una distribución de probabilidad posterior de los retornos de los activos derivada utilizando la distribución de probabilidad previa e información factual sobre los retornos y riesgos de los activos. El CAPM se utiliza en este modelo para calcular los retornos esperados y los precios de equilibrio de los activos, según López Rojas *et al.,* (2015, p. 04).

Este enfoque surge también como respuesta a la crítica de asignación de activos de media-varianza el cual se caracteriza por que las carteras se determinan de acuerdo al rendimiento y volatilidad esperada lo cual permite controlar el riesgo, sin embargo (Drobetz, W. 2001; Idzorek, T. 2007) se considera este enfoque de difícil aplicación dado los problemas de alta concentración de portafolios, sensibilidad y errores de estimación, lo cual puede concluir en resultados poco intuitivos e inadecuados.

Notas de autor

[1] Economista, Universidad Popular del Cesar. Aguachica, Colombia. Correo: gossa@unicesar.edu.co ORCID: 0000-0002-8194-0859

Este modelo tiene la ventaja de reducir errores en la estimación en el marco de media varianza. Por lo que propone una revisión del mercado con el fin de crear un equilibrio entre la expectativa y el nivel de confianza del inversor en los activos, logrando así portafolios estables a largo plazo. Por lo anterior, este enfoque permite combinar las opiniones de un inversor sobre los rendimientos esperados en uno o más activos con el vector de equilibrio del mercado de los rendimientos esperados para obtener una nueva estimación mixta de los rendimientos esperados (Walters, C. F. A. 2014, p. 02).

Los rendimientos implícitos de equilibrio proporcionan un punto de referencia neutral, lo que conduce a carteras óptimas más razonables y estables. Sin embargo, es necesario mencionar que, si las expectativas del inversionista no difieren con respecto a las del mercado, no es necesario especificar un rendimiento para cada activo, ya que éstos entran al modelo con su respectivo retorno de equilibrio, es decir los precios de activos estarán determinados por los precios de equilibrio del CAPM (Franco, L. et al., 2011).

Los supuestos de este modelo según Bosiga, J. (2006) están basados en estos principios:

- Los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente.
  Se utiliza el exceso de rendimiento medio estimado de la cartera de mercado CAPM para estimar los retornos de equilibrio bajo los cuales se incorporan o no las expectativas del gestor de portafolios.
  El individuo tiene una función de utilidad estrictamente cóncava, cuanto más cóncava sea esta función mayor será la aversión al riesgo.

La notación general es la siguiente:

$$E(r) = [(\tau\delta)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(tS)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

Donde:

δ= Matriz de covarianza – varianza para todos los activos bajo consideración.

τ= El parámetro τ es un escalar que pondera la matriz.

P= Matriz que identifica los activos sobre los que tiene vistas

Ω= Matriz de incertidumbre.

π= Exceso de rendimiento de equilibrio implícito.

Q= Puntos de vista sobre rendimientos excedentes esperados para algunos o todos los activos.

$E(r - r_f)$= Representa el valor esperado de cada activo.

El presente trabajo está estructurado en cinco secciones. La primera es esta introducción. En la segunda sección, se presentan los antecedentes de la aplicación del modelo. La tercera sección aborda la explicación y el desarrollo del modelo. En la cuarta sección se presentan los resultados obtenidos a través de la aplicación de los modelos BL, Markowitz y CAPM. Finalmente, en la quinta sección se concluye el trabajo.

2. ANTECEDENTES

En Kara, M. *et al.,* (2019) propone un enfoque través del modelado GARCH que se utiliza para hacer predicciones de indicadores para acciones y luego se traducen en pronósticos de rendimiento a través del Soporte de Regresión Vectorial. Estos pronósticos se utilizan en el modelado Black-Litterman para crear carteras con datos móviles. Este modelo se probó en dos mercados diferentes: el índice de mercado emergente BIST-30 de la Bolsa de Estambul y el Dow Jones Index del mercado de valores de EE. UU. Los resultados obtenidos muestran un rendimiento de cartera y relaciones de Sharpe superiores al índice para diferentes períodos de tenencia, así como un mejor rendimiento de cartera en comparación con las carteras generadas al azar. Además, se demostró que los indicadores pueden ser tomados en cuenta en función del estado o el mercado, ya sea sin tendencia o con tendencia.

En Morales Buitrón, M. J. (2021) se compara las implementaciones de optimización de portafolios, tales como el Markowitz y BL dada una canasta de acciones 10 acciones de Estados Unidos y como índice el Rusell 3000. Al analizar los resultados de ambos modelos, se puede concluir que el modelo Black Litterman es más beneficioso para el administrador de portafolios ya que, al partir de un historial de datos y utilizar la herramienta Bloomberg para incorporar las opiniones del mercado en su metodología, genera mejores resultados. Esto le permite al administrador diversificar su portafolio y obtener una mayor rentabilidad al asumir un riesgo del 5.2%, lo que indica que el nivel de riesgo es menor que el del mercado en general. En resumen, el modelo Black Litterman es más efectivo que el otro modelo para lograr un rendimiento óptimo en el portafolio de inversión.

En Colombia Ramirez, L., y Tamayo, M. (2015) se aplica el modelo para evaluar su desempeño trimestral comparándolo con el índice bursátil COLCAP, utilizando recomendaciones de analistas financieros de Bloomberg, la Prima de Riesgos de Damodaran, el Indicador Bancario Interbancario (IBR) y los portafolios trimestrales del COLCAP como datos de entrada. Los resultados muestran que la metodología del modelo Black-Litterman, basada en información pública, supera al COLCAP en un 73.08% de los trimestres y ofrece mejores resultados en comparación a la media y la medida de rentabilidad adicional α. Además, los resultados son intuitivos y diversificados.

Franco Gómez, Y. A. *et al.,* (2022) presenta un enfoque robusto para la selección óptima de portafolios de inversión en el mercado de valores colombiano, utilizando el índice bursátil de referencia COLCAP. Se redefinen los retornos esperados, las opiniones del inversor y la matriz de incertidumbre del modelo BL mediante la lógica difusa y se implementa un ejercicio de optimización para un portafolio de acciones del mercado de valores colombiano. Los resultados muestran que el enfoque de lógica difusa permite incorporar información adicional para definir las views y medir la incertidumbre, lo que lleva a un mejor desempeño del portafolio fuera de muestra en comparación con el modelo BL tradicional y el modelo media-varianza. En particular, el modelo BL con views difusas alcanza el mejor desempeño para el periodo fuera de muestra en el mercado de valores colombiano.

3. METODOLOGÍA

Para obtener la estimación de los retornos del portafolio π , también conocidos como excesos de rendimiento de equilibrio implícito se debe realizar el producto entre el factor de aversión al riesgo A, la matriz de varianza – covarianzas $t\delta$ y los pesos de los instrumentos iniciales los cuales son determinaos a través de su capitalización bursátil W_{im} .

$$\pi = A.\tau\delta.\omega_{BL}$$

Aversión al riesgo Aversión al riesgo:

En primera instancia se calcula el factor de aversión al riesgo A que se obtiene a partir de los excesos de retorno del mercado, que resultan de la diferencia entre los retornos logarítmicos $R(r_m) = Ln\frac{P_t}{P_{t-1}}$ y la tasa libre de riesgo r_f y posteriormente sobre la varianza del activo libre de riesgo[2].

$$A = \frac{R(r_m) - r_f}{r_f}$$

De acuerdo con Ávila Camacho, Y. P., y Rangel Ospina, R. (2016, p.14), la aversión al riesgo supone que los inversores asumen que el retorno esperado es la meta principal, mientras que el riesgo, entendido como la posibilidad de una desviación negativa, es lo menos deseable. Por lo tanto, su objetivo es maximizar los rendimientos mientras se mantiene un nivel de riesgo aceptable. Esta es una característica común del comportamiento humano en un contexto de incertidumbre, donde la utilidad del ingreso esperado de un evento riesgoso es mayor que su valor esperado (Ku, J.2018, p. 61).

Matriz de Varianza - Covarianza

$$\delta(x,y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})-(y-\bar{y})}{n}$$

Posteriormente se calcula la matriz de varianza y covarianza la cual se utiliza para determinar las ponderaciones de los activos en una cartera óptima. Esta matriz según Monroy López, N., y Pérez Cortes, A. C. (2021, p.36) muestra en su diagonal principal la varianza, mientras que fuera de ella se muestran las relaciones entre las acciones. Si la covarianza es alta, el portafolio será más arriesgado, ya que los inversores buscan acciones que no estén correlacionadas entre sí para diversificar el riesgo y poder protegerse si una acción experimenta una caída.

Pesos del portafolio

Finalmente, se procede a desarrollar los pesos del portafolio utilizando la capitalización bursátil como medida para determinar la distribución de los activos. Estos se ponderan según su capitalización relativa en comparación con el resto del mercado. En este proceso, los activos con una capitalización bursátil mayor tendrán un mayor peso en el portafolio, mientras que los activos con una capitalización bursátil menor tendrán un peso menor. De esta manera, se busca maximizar la diversificación del portafolio y minimizar los riesgos asociados con la concentración de activos (Gutiérrez Morales, E. A. 2019).

$$\omega_{BL} = \left(\frac{A_{in}}{\sum_{in=1}^{n} T}\right).100$$

Donde el conjunto de activos, y sea el valor total de los activos. Además, sea el valor del activo en el conjunto. Entonces, la participación porcentual del activo en el conjunto con respecto al total donde representa la participación porcentual del activo en el conjunto con respecto al total, expresada como un porcentaje. De forma posterior se introduce opiniones sobre el mercado, expresadas como donde es una matriz y es el vector de expectativas, y es un parámetro de error que distribuye normalmente con media cero y varianza . De acuerdo con Argumedo Valencia, M. A. (2020, p. 35) la media y la varianza del vector de errores se expresa de la siguiente forma:

La varianza representa la incertidumbre de las vistas y se expresará su nivel según lo conforme en Idzorek, T. (2002, p. 15) mediante la matriz . Lo anterior pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\Omega = \left[P_{KxN}(\tau\delta)P_{KxN}{}^{t}\right]$$

Donde Omega[3]Ω es igual al producto entre la matriz de covarianza – varianzaτS y la matriz de enlace$P$ y su transpuesta P^t . Esta matriz se elabora mediante la ponderación de cada una de las expectativas; como se establecieron de forma relativa, cada fila suma 0. En la Matriz$P$, los activos nominalmente de rendimiento superior reciben ponderaciones positivas, mientras que los activos de rendimiento nominal inferior reciben ponderaciones negativas. Ahora bien, el escalar refleja el grado de incertidumbre con respecto a la precisión con la que es calculado el vector de retornos de equilibrioπ . Usualmente este vector toma un valor entre 0 y 1, por lo que autores como Satchell y Scowcroft (2000, p. 140 – 141) manifiestan que dicho parámetro debería ser 1, esta suposición significa que los rendimientos en exceso de equilibrio condicionado a los pronósticos del individuo son igual al pronóstico del individuo en promedio dado que es una constante que no afecta significativamente el nuevo vector de los retornos combinados.

Selección de datos:

La metodología empleada para desarrollar el modelo Black Litterman es de tipo descriptiva y explicativa con enfoque cuantitativo dado que se estudian distintas variables, como el MBL, CAMP y Markowitz, que presentan características diferentes. Con este fin, se realiza un análisis que busca determinar su aplicabilidad en el mercado bursátil de Colombia. Para recopilar los datos, se elabora una base de datos de análisis temporal para cada muestra de renta variable, utilizando los precios de cierre de cinco empresas de la Bolsa de Valores de Colombia negociadas durante los días hábiles entre el 28 de febrero de 2018 y el 24 de febrero de 2023. Para medir el mercado, se escogió el índice bursátil ICOLCAP, que incluye las 20 acciones más líquidas en la BVC, y la tasa libre de riesgo se estableció en el TFIT16240724.

Tabla 1. Acciones escogidas.

TABLA 1
Acciones escogidas

ACCIÓN	SECTOR
NUTRESA	Comida y bebidas
BOGOTA	Bancos
ECOPETROL	Petróleo y gas
PFGRUPOSURA	Servicios financieros
GRUBOLIVAR	Servicios financieros

elaboración propia.

Tabla 2. Características de las acciones.

TABLA 2
Características de las acciones

Nemotécnico	Capitalización bursátil	Peso
NUTRESA	24.261.061.057.000	16,05%
BOGOTA	9.129.952.447.600	6,04%
ECOPETROL	111.837.409.556.800	73,99%
PFGRUPOSURA	1.343.347.585.620	0,89%
GRUBOLIVAR	4.586.622.728.610	3,03%
Total	151.158.393.375.630	100,00%

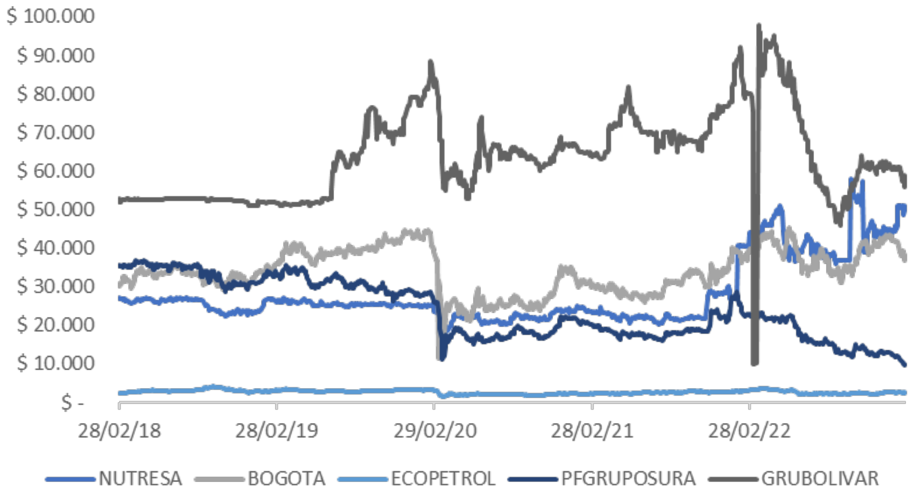

FIGURA 1
Histórico de cotizaciones diarias durante los 5 años
elaboración propia.

Retornos

Para calcular los retornos históricos de los activos se utiliza el promedio de los retornos logarítmicos diarios:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} R(r_i)}{n}$$

Así mismo es importante mencionar que se utilizan los rendimientos logarítmicos debido a su capacidad para calcular probabilidades basadas en una distribución normal y por ser sumables en el tiempo. Estos rendimientos también son útiles para el cálculo de la volatilidad de los activos financieros. Por el contrario, los rendimientos simples no pueden ser sumados directamente en el tiempo y, por lo tanto, no son tan útiles en análisis de series de tiempo y para comparar el rendimiento de diferentes activos financieros (Peña, R. P. 2021, p. 06).

Excesos de retorno

Para calcular los excesos de retorno, se resta la tasa libre de riesgo con retornos históricos logarítmicos:

$$\alpha = R(r_m) - r_f$$

Volatilidad y sensibilidad

Por su parte la deviación estándar$\sqrt{s^2}$ que se utiliza para conocer la volatilidad se hizo multiplicando la desviación estándar por la$\sqrt[2]{252}$. Esto se debe a que hay aproximadamente 252 días de negociación en un año bursátil, y se puede suponer que la variabilidad del conjunto de datos se mantendrá constante durante todo el año.

Para determinar la sensibilidad del activo respecto al mercado en que cotiza se utiliza el coeficienteβ_i

$$\beta_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R_i}).(R_m - \overline{R_m})}{\sum_{i=1}^{n}(R_m - \overline{R_m})^2}$$

De acuerdo con Brealey et. al. (2006) puede interpretarse bajo los siguientes grados:

Si$\beta_1 = 1$, significa que la tasa de retorno del activo es neutral, es decir que subirá y bajará proporcionalmente con la tasa de retorno del portafolio de mercado.

Si $\beta_1 > 1$, significa que el activo es más riesgoso, lo que significa que sus altas o bajas serán más agresivas que el promedio de la cartera del mercado.

Si$\beta_1 < 1$, significa que el activo es menos riesgoso, lo que significa que sus altas o bajas serán menores que el promedio de la cartera del mercado.

Para los

Para los $-\beta_1$según Alqisie, A., y Alqurran, T. (2016) un activo con una beta negativa tiene una tasa de rendimiento que se mueve en la dirección opuesta al rendimiento del mercado, lo que significa que cuando el rendimiento del mercado aumenta, el rendimiento de las acciones de la empresa disminuye.

Expectativas de retorno

Para las expectativas de retorno con CAMP se tiene que la rentabilidad esperada de una acción $R(r_i)$, es igual a la rentabilidad libre de riesgo del activor_f, esta última de acuerdo con Sharpe (1964 citado por Gómez, C., y García, M. 2011, p. 04) es una tasa de interés en la cual se espera un rendimiento seguro debido a que su desviación estándar teóricamente debe ser de cero con respecto al valor esperado. Lo anterior más (+) el coeficiente β_z, esta última representa la sensibilidad de la rentabilidad del activo con respecto al mercado *Covarianza* $(R_z.R_m)$, y el cociente el cual es la variable independiente que se referencia como la rentabilidad del mercado. Lo anterior que multiplica la prima de riesgo$[R(r_m) - r_f]$ que básicamente es la diferencia entre la rentabilidad del mercado y la tasa libre de riesgo.

$$R(r_i) = r_f + \beta_i[R(r_m) - r_f]$$

Optimización del portafolio

Expectativa de retornos

Para obtener la nueva expectativa de retorno del portafolio según He, G., y Litterman, R. (2002), se utiliza la multiplicación entre las ponderaciones iniciales de mercado ω (es decir, la proporción en la que se invierte en cada activo en función de su tamaño en el mercado) con respecto a la expectativa esperada del modelo Black-Litterman para cada activo individualR_{BL}^{e}. Luego, se suma$\sum$ el producto de estas ponderaciones y expectativas para cada activo en el portafolio, lo que da como resultado el retorno esperado del portafolio optimizado.

$$\kappa_{BL} = \sum_{i=1}^{n}[\omega_{BL} * R_{BL}^{e}]$$

Varianza del portafolio

$$\sigma_{BL}^2 = [\omega_{BL}]^t * \frac{\sum(x-\bar{x})-(y-\bar{y})}{n} * [\omega_{BL}]$$

La varianza del portafolio puede calcularse como la multiplicación de la transpuesta de los pesos de mercado por la matriz de covarianza, seguida de la multiplicación del resultado obtenido por los pesos normalizados del portafolio.

4. RESULTADOS

Tabla 3. Aspectos generales de los activos.

TABLA 3
Aspectos generales de los activos

	NUTRESA	BOGOTA	ECOPETROL	SURA	BOLIVAR	ICOLCAP	TES2024
Retornos históricos	13,6%	4,4%	0,9%	-27,8%	1,1%	-5,0%	1,8%
Excesos de retornos	-1541%	-1550%	-1554%	-1583%	-1554%	-468%	-
Desviación estándar	43,59%	80,13%	40,93%	37,04%	142,96%	25,47%	37,62%
Beta	0,29	1,03	0,79	0,84	0,26	1,00	0,02
Expectativa de retorno	-0,15%	-5,21%	-3,52%	-3,93%	0,09%	-4,99%	1,71%

Cuadro de realización propia.

Tabla 4. Matriz de covarianza – varianza de exceso de retornos.

TABLA 4
Matriz de covarianza – varianza de exceso de retornos

	NUTRESA	BOGOTA	ECOPETROL	SURA	BOLIVAR
NUTRESA	0,00075344	0,00011686	0,00009082	0,00005615	0,00003842
BOGOTA	0,00011686	0,00254556	0,00041400	0,00034886	0,00009132
ECOPETROL	0,00009082	0,00041400	0,00066433	0,00016912	0,00007140
PFGRUPOSURA	0,00005615	0,00034886	0,00016912	0,03648396	0,00012025
GRUBOLIVAR	0,00003842	0,00009132	0,00007140	0,00012025	0,00810334

elaboración propia.

La covarianza es una medida que indica el grado de relación lineal entre dos variables. Si la covarianza es positiva, significa que cuando una variable aumenta, la otra también lo hace y cuando una disminuye, la otra también lo hace. Por otro lado, si la covarianza es negativa, significa que cuando una variable aumenta, la otra disminuye y viceversa. En cambio, si la covarianza es cero o se aproxima a cero tal como en este caso, esto indica que no existe una relación lineal entre las variables.

Aversión al riesgo:

$$A = \frac{-0{,}064}{0{,}0073^2} = -33{,}06$$

El índice de aversión al riesgo negativo en este caso sugiere que los inversores están dispuestos a aceptar mayores niveles de riesgo en sus inversiones o que el mercado es particularmente arriesgado. La aversión al riesgo indica que la tendencia a invertir es baja en situaciones de alto riesgo.

Retornos implícitos de mercado

$$\pi = \left\{ -33{,}06 \begin{bmatrix} 0{,}000753 & 0{,}000116 & 0{,}000090 & 0{,}000056 & 0{,}000038 \\ 0{,}000116 & 0{,}002545 & 0{,}000413 & 0{,}000348 & 0{,}000091 \\ 0{,}000090 & 0{,}000413 & 0{,}000664 & 0{,}000169 & 0{,}000071 \\ 0{,}000056 & 0{,}000348 & 0{,}000169 & 0{,}036483 & 0{,}000120 \\ 0{,}000038 & 0{,}000091 & 0{,}000071 & 0{,}000120 & 0{,}008103 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}1605 \\ 0{,}0604 \\ 0{,}7399 \\ 0{,}0089 \\ 0{,}0303 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -0{,}651\% \\ -1{,}603\% \\ -1{,}768\% \\ -1{,}597\% \\ -1{,}030\% \end{bmatrix}$$

Si un rendimiento de equilibrio implícito es negativo, significa que el activo se considera más arriesgado que una inversión sin riesgo y que se espera que proporcione un rendimiento inferior al de esta inversión. En términos generales, los inversores esperan que los activos con un mayor nivel de riesgo proporcionen un rendimiento más alto que la tasa libre de riesgo, por lo que los rendimientos de equilibrio implícitos negativos podrían indicar que el activo no es una buena inversión. Esto también indica que es un momento inoportuno para invertir en acciones.

TABLA 5.
Identificación de los excesos de rendimiento de equilibrio implicitico.

Nemotécnico	Rendimientos implícitos
NUTRESA	-0,651%
BOGOTA	-1,603%
ECOPETROL	-1,768%
PFGRUPOSURA	-1,597%
GRUBOLIVAR	-1,030%

elaboración propia.

Cálculo de incertidumbre de las opiniones

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}000753 & 0{,}000116 & 0{,}000090 & 0{,}000056 & 0{,}000038 \\ 0{,}000116 & 0{,}002545 & 0{,}000413 & 0{,}000348 & 0{,}000091 \\ 0{,}000090 & 0{,}000413 & 0{,}000664 & 0{,}000169 & 0{,}000071 \\ 0{,}000056 & 0{,}000348 & 0{,}000169 & 0{,}036483 & 0{,}000120 \\ 0{,}000038 & 0{,}000091 & 0{,}000071 & 0{,}000120 & 0{,}008103 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1{,}22\% & -0{,}97\% & 0{,}33\% \\ -0{,}79\% & 0{,}45\% & 0{,}06\% \\ 0{,}33\% & 0{,}06\% & 0{,}30\% \end{bmatrix}$$

En relación con los retornos implícitos de mercado, los datos de la diagonal son positivos, es decir altos con respecto a la nombrada anteriormente. Por tanto, esto significa que el inversionista tiene una opinión muy incierta sobre los rendimientos esperados de los activos correspondientes. Sin embargo, no son lo suficientemente altos para subestimar las opiniones del inversionista y se vuelva demasiado dependiente de la matriz de covarianza de mercado. En este caso específico se les dará menos peso a las opiniones del inversionista y más peso a la matriz de covarianza de mercado.

Restricción de pesos

$$C_1 = [(\tau\delta)^{-1} + P^t\Omega^{-1}P]^{-1}$$

$$C_1 = \left\{ 1 * \begin{bmatrix} 1352,59 & -35,434 & -162,08 & -0,9765 & -4,5709 \\ -35,434 & 438,436 & -267,39 & -2,8905 & -2,3743 \\ -162,08 & -267,39 & 1696,54 & -5,0213 & -11,091 \\ -0,9765 & -2,8905 & -5,0213 & 27,462 & -0,3260 \\ -4,5709 & -2,3743 & -11,091 & -0,3260 & 123,55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 143,94 & 27,412 & -162,5 \\ 27,412 & 27,142 & -35,66 \\ -162,5 & -35,66 & 510,76 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,068\% & 0,036\% & 0,012\% & 0,033\% & 0,009\% \\ 0,036\% & 0,158\% & 0,028\% & 0,048\% & 0,012\% \\ 0,012\% & 0,028\% & 0,063\% & 0,016\% & 0,033\% \\ 0,033\% & 0,048\% & 0,016\% & 1,854\% & 0,014\% \\ 0,009\% & 0,012\% & 0,033\% & 0,013\% & 0,435\% \end{bmatrix}$$

TABLA 6
Identificación de la restricción de pesos.

Nemotécnico	NUTRESA	BOGOTA	ECOPETROL	SURA	BOLIVAR
NUTRESA	0,06832%	0,03649%	0,01207%	0,03346%	0,00945%
BOGOTA	0,03649%	0,15793%	0,02823%	0,04809%	0,01210%
ECOPETROL	0,01207%	0,02823%	0,06288%	0,01599%	0,03323%
PFGRUPOSURA	0,03346%	0,04809%	0,01599%	1,85485%	0,01354%
GRUBOLIVAR	0,00945%	0,01210%	0,03323%	0,01354%	0,43483%

elaboración propia.

Término de pesos de retornos del mercado y opiniones

$$[(t\delta)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

$$C_2 = \left\{ 1 * \begin{bmatrix} 1352,59 & -35,434 & -162,08 & -0,9765 & -4,5709 \\ -35,434 & 438,436 & -267,39 & -2,8905 & -2,3743 \\ -162,08 & -267,39 & 1696,54 & -5,0213 & -11,091 \\ -0,9765 & -2,8905 & -5,0213 & 27,462 & -0,3260 \\ -4,5709 & -2,3743 & -11,091 & -0,3260 & 123,55 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0,2454 \\ -0,6044 \\ -0,6668 \\ -0,6024 \\ -0,3084 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 143,94 & 27,412 & -162,5 \\ 27,412 & 27,142 & -35,66 \\ -162,5 & -35,66 & 510,76 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,0254 \\ 0,0254 \\ 0,0254 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -13,95 \\ 6,166 \\ -24,71 \\ 0,186 \\ -0,748 \end{bmatrix}$$

El modelo no obliga a tener una expectativa sobre cada activo, en caso de no tenerla se toman los precios obtenidos por el CAPM. La magnitud de distanciamiento del equilibrio de los precios depende del grado de confianza con que el gestor introduzca la expectativa (Bosiga, J. 2006, P. 06). Por tal motivo se toma el promedio de las expectativas del CAMP -0,0254 para .

TABLA 7
Identificación de la restricción de pesos.

Nemotécnico	Valor
NUTRESA	-13,95
BOGOTA	6,16
ECOPETROL	-24,71
PFGRUPOSURA	0,186
GRUBOLIVAR	-0,748

elaboración propia.

Estimación de los retornos de la cartera

$$R_{BL}^{e} = \left\{ \frac{\begin{bmatrix} 0{,}068\% & 0{,}036\% & 0{,}012\% & 0{,}033\% & 0{,}009\% \\ 0{,}036\% & 0{,}158\% & 0{,}028\% & 0{,}048\% & 0{,}012\% \\ 0{,}012\% & 0{,}028\% & 0{,}063\% & 0{,}016\% & 0{,}033\% \\ 0{,}033\% & 0{,}048\% & 0{,}016\% & 1{,}854\% & 0{,}014\% \\ 0{,}009\% & 0{,}012\% & 0{,}033\% & 0{,}013\% & 0{,}435\% \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -13{,}95 \\ 6{,}166 \\ -24{,}71 \\ 0{,}186 \\ -0{,}748 \end{bmatrix}}{100} \right\} = \begin{bmatrix} -0{,}010\% \\ -0{,}002\% \\ -0{,}016\% \\ -0{,}002\% \\ -0{,}012\% \end{bmatrix}$$

Las estimaciones negativas pueden reflejar la opinión del inversor de que ciertos activos pueden tener un rendimiento inferior a largo plazo debido a factores estructurales o macroeconómicos.

Varianza del portafolio optimizado Black -Litterman

$$\sigma_{BL}^{2} = \begin{bmatrix} 0{,}1605 & 0{,}0603 & 0{,}7398 & 0{,}0088 & 0{,}0303 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}1605 \\ 0{,}0604 \\ 0{,}7399 \\ 0{,}0089 \\ 0{,}0303 \end{bmatrix} = 0{,}047\%$$

Expectativa del portafolio optimizado Black -Litterman

$$\kappa_{BL} = \begin{bmatrix} 0{,}1605 \\ 0{,}0604 \\ 0{,}7399 \\ 0{,}0089 \\ 0{,}0303 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0{,}010\% \\ -0{,}002\% \\ -0{,}016\% \\ -0{,}002\% \\ -0{,}012\% \end{bmatrix} = -0{,}01\%$$

El rendimiento esperado de un portafolio optimizado con Black-Litterman presenta una expectativa negativa debido a diversos factores. En primer lugar, los bajos rendimientos anuales de los activos influyen en esta expectativa. Además, la aversión al riesgo se ve afectada negativamente por el exceso de retorno que se da en un título de deuda con rendimientos más elevados. Por último, la disminución sistemática del indicador de mercado también contribuye a esta expectativa negativa de rendimiento esperado.

Aplicación bajo la optimización de portafolio de Markowitz

El método de Markowitz es una herramienta ampliamente utilizada en la gestión de inversiones, que permite construir carteras diversificadas y optimizadas. Este método se basa en la idea de que la diversificación puede reducir el riesgo y aumentar el rendimiento de una cartera de inversión.

La construcción de un portafolio utilizando el método de Markowitz implica la identificación de los activos disponibles, el cálculo del rendimiento esperado y la varianza de cada activo, y la construcción de un portafolio diversificado que optimice el rendimiento esperado y minimice el riesgo[4](Valencia García, J. A. 2018). En este sentido, el método de Markowitz se enfoca en la selección de una combinación óptima de activos que maximice la rentabilidad esperada dada una tolerancia al riesgo determinada (Elton et al., 2011).

Una vez que se ha construido el portafolio, se puede evaluar su rendimiento y riesgo. El rendimiento esperado del portafolio se puede calcular como la suma ponderada del rendimiento esperado de cada activo en el portafolio. La varianza del portafolio se puede calcular como la suma ponderada de las varianzas de cada activo más dos veces la suma ponderada de las covarianzas entre cada par de activos en el portafolio (Markowitz, 1991).

Rendimiento del portafolio

El rendimiento del portafolio en el modelo de Markowitzk_{mz} se puede calcular utilizando una fórmula sencilla. Este cálculo está basado en el producto entre los promedios de los retornos logarítmicosλ con respecto a la transpuesta de los pesosω^t . Es decir, se multiplica el vector de los retornos logarítmicos de cada activo por el vector de pesos y se obtiene el rendimiento del portafolio esperado.

$$k_{mz} = \lambda(\omega^t)$$

La utilización de esta fórmula para calcular el rendimiento del portafolio permite obtener una medida cuantitativa del retorno que se espera obtener a partir de la asignación de pesos específicos a cada activo. De esta manera, es posible evaluar la efectividad de la estrategia de inversión y hacer ajustes según sea necesario para maximizar los retornos y minimizar el riesgo en el portafolio.

Varianza del portafolio

Para calcular la varianza del portafolio de Markowitz, es necesario realizar el producto entre los pesos optimizados , la matriz de covarianza , y la transpuesta de los pesos .

$$\sigma^2_{MZ} = \omega(\delta)(\omega^t)$$

Un portafolio con una varianza más alta indica que existe un mayor riesgo de pérdida, mientras que una varianza más baja indica que el portafolio es menos volátil y, por lo tanto, más estable. En resumen, la varianza en el modelo de Markowitz es una medida crucial para construir portafolios bien diversificados que equilibren el riesgo y el rendimiento esperado. Y finalmente el riesgoϑ del portafolio esta dado por la raíz de la varianza $\sqrt[2]{\sigma^2}$

Expectativa del portafolio optimizado Markowitz

$$\kappa_{MZ} = \begin{bmatrix} 0{,}1352 & 0{,}0437 & 0{,}0092 & -0{,}277 & 0{,}011 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}0064 \\ 0{,}0020 \\ 0{,}0004 \\ 0{,}0132 \\ 0{,}0005 \end{bmatrix} = -5{,}66\%$$

Al igual que con el modelo Black-Litterman, la rentabilidad del portafolio con Markowitz es negativa, la rentabilidad esperada se calcula utilizando los retornos históricos de los activos. Si los retornos históricos de los activos son bajos, la rentabilidad esperada del portafolio también será baja. Es posible que el mercado bursátil en sí mismo esté experimentando una tendencia bajista o que las condiciones económicas generales no sean favorables, lo que puede afectar negativamente la rentabilidad del portafolio optimizado.

Varianza del portafolio optimizado Markowitz

$$\sigma^2_{MZ} = \begin{bmatrix} 0{,}3192 & 0{,}0176 & 0{,}2632 & 0{,}3726 & 0{,}0274 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}000753 & 0{,}000116 & 0{,}000090 & 0{,}000056 & 0{,}000038 \\ 0{,}000116 & 0{,}002545 & 0{,}000413 & 0{,}000348 & 0{,}000091 \\ 0{,}000090 & 0{,}000413 & 0{,}000664 & 0{,}000169 & 0{,}000071 \\ 0{,}000056 & 0{,}000348 & 0{,}000169 & 0{,}036483 & 0{,}000120 \\ 0{,}000038 & 0{,}000091 & 0{,}000071 & 0{,}000120 & 0{,}008103 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}3192 \\ 0{,}0176 \\ 0{,}2631 \\ 0{,}3725 \\ 0{,}0274 \end{bmatrix} = 0{,}030\%$$

Estimación de los retornos individuales en Markowitz

$$R^e_{MZ} = \begin{bmatrix} 0{,}1352 \\ 0{,}0437 \\ 0{,}0092 \\ -0{,}277 \\ 0{,}0111 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}3192 \\ 0{,}0176 \\ 0{,}2632 \\ 0{,}3726 \\ 0{,}0274 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}33\% \\ 0{,}07\% \\ 0{,}24\% \\ -10{,}3\% \\ 0{,}03\% \end{bmatrix}$$

FIGURA 9.
Expectativas de retorno según modelo.

	BL	CAPM	MARKOWITZ	HISTORICO
NUTRESA	-0,010%	-0,15%	4,33%	13,57%
BOGOTA	-0,002%	-5,21%	0,07%	4,37%
ECOPETROL	-0,016%	-3,52%	0,24%	0,92%
PFGRUPOSURA	-0,002%	-3,93%	-10,3%	-27,7%
GRUBOLIVAR	-0,012%	0,09%	0,03%	1,11%

elaboración propia.

5. Conclusiones

En conclusión, la aplicación de los modelos de Markowitz, CAMP y Black Litterman permitió obtener resultados interesantes sobre los rendimientos esperados en el mercado bursátil colombiano. De los tres modelos, el Markowitz presentó los rendimientos individuales más optimistas y rentables. Por otro lado, el modelo de BL y el CAMP presentó rendimientos esperados muy bajos, de tal forma que los precios de los activos seguirían disminuyendo en el futuro.

Además, se puede observar que los rendimientos de los portafolios optimizados para los modelos de Markowitz y Black Litterman tienen una percepción similar sobre las tendencias de las acciones. En el caso de Markowitz, el rendimiento esperado del portafolio es de -5,66%, mientras que para Black Litterman es de -0,01%. Asimismo, la varianza del portafolio en Markowitz es del 0,030%, mientras que en Black Litterman es del 0,047%. En cuanto al riesgo de los portafolios, se observa que es de 2,17% para Black Litterman y de 1,73% para Markowitz. Estos resultados muestran que, aunque ambos modelos presentan tendencias similares, existe una diferencia en la percepción del riesgo entre ellos.

Es importante destacar que en el modelo Black Litterman, además de las opiniones sobre los activos, existen otros elementos que juegan un papel importante. Por ejemplo, el indicador de aversión al riesgo queda negativo debido a que el numerador, que representa el exceso de retorno, tiene un valor negativo dado que el indicador de mercado ha estado disminuyendo. Asimismo, se observa que tanto en Markowitz como en Black Litterman, el método de calcular los rendimientos por medio del logaritmo tiende a producir valores negativos, lo que explica por qué la rentabilidad esperada del portafolio optimizado para estos dos enfoques tiende a ser negativa, o también que el activo con un rendimiento histórico negativo tenga un mayor peso dado que tiene la menor correlación con respecto a los demás. En conclusión, estos factores son relevantes para entender los resultados obtenidos en este estudio, y finalmente la inversión en títulos de deuda es una mejor forma de inversión con respecto al portafolio aquí desarrollado dado su característica conservadora y menos riesgosa que la inversión en un portafolio de acciones.

Referencias

Alqisie, A., y Alqurran, T. (2016). Validity of Capital Assets Pricing Model (CAPM) (empirical evidences from Amman Stock Exchange). *Journal of Management Research, 8*(1), 207- 223.

Ávila Camacho, Y. P., y Rangel Ospina, R. (2016). *Optimización de portafolios en el mercado de capitales colombiano: modelo propuesto por Black-Litterman*. (Trabajo de grado, Maestría en finanzas corporativas), Colegio de Estudios Superiores de Administración, Colombia.

Argumedo Valencia, M. A. (2020). *Aplicabilidad del modelo Black-Litterman para la optimización de portafolios de instrumentos de renta variable del Ecuador* (Trabajo de grado, Maestría en Finanzas y Gestión de Riesgos), Universidad Andina Simón Bolívar, Ecuador.

Black, F., y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal, 48*(5), 28-43.

Brealey, R. A., Myers, S. C., Allen, F., y Krishnan, V. S. (2006). *Corporate finance* (Vol. 8). Boston et al.: McGraw-Hill/Irwin.

Bosiga, J. (2006). *Modelo Black-Litterman: Aplicación al mercado de renta variable colombiano.* (Trabajo de grado, Maestría en Finanzas) Universidad de los Andes, Colombia.

Drobetz, W. (2001). How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black-Litterman approach at work. *Financial Markets and Portfolio Management, 15*(1), 59–75.

Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., y Goetzmann, W. N. (2011). *Modern portfolio theory and investment analysis (8th ed.).* John Wiley y Sons.

Franco-Arbeláez, Luis C., Avendaño-Rúa, Claudia T., y Barbutín-Díaz, Haroldo. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *TecnoLógicas, 26*, 71-88.

Fahmy, H. (2020). Mean-variance-time: An extension of Markowitz's mean-variance portfolio theory. *Journal of Economics and Business, 109*, 105888.

Franco Gómez, Y. A., Moreno Trujillo, J. F., y Zapata Quimbayo, C. A. (2022). Selección óptima de portafolios usando el modelo Black-Litterman con views difusas. *Lecturas de Economía, 97*, 369-393.

Gravito, D. (2018). Relación lineal entre dos variables cuantitativas: covarianza, correlación. https://rpubs.com/bogotan/covarianza_correlacion

Gutiérrez Morales, E. A. (2019). *Comparación del portafolio óptimo del MILA y el óptimo de cada uno de los mercados que lo conforman: análisis de diversificación internacional.* (Trabajo de grado, Maestría en Ingeniería Administrativa) Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

He, G., y Litterman, R. (2002). *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*. Available at SSRN 334304.

Idzorek, T. (2007). A step-by-step guide to the Black-Litterman model incorporating user-specified confidence levels. *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*, 2003, 17-38.

Kara, M., Ulucan, A., y Atici, K. B. (2019). A hybrid approach for generating investor views in Black–Litterman model. *Expert Systems with Applications*, 128, 256-270.

Ku, J. D. G. (2018). Notas en Teoría de la Incertidumbre. *Fondo Editorial de la PUCP*.

López Rojas, J. F., Pérez Castañeda, D., y Viasus Carrasquilla, O. I. (2015). *Optimización de portafolios mediante el modelo black-litterman supervisado por la teoría de control.* Universidad Piloto de Colombia, Colombia.

Markowitz H (1952) Portfolio selection. *Jour Finance, 7*(1), 77–91

Markowitz, H. (1991). Foundations of portfolio theory. *The Journal of Finance, 46*(2), 469-477.

Monroy López, N., y Pérez Cortes, A. C. (2021). Optimización de portafolios en renta variable, comparación Markowitz y Black Litterman (Trabajo de grado, Maestría en finanzas corporativas), Colegio de Estudios Superiores de Administración, Colombia.

Morales Buitrón, M. J. (2021). *Modelo de inversión de portafolios mediante modelo Markowitz y CAPM: Caso en Ecuador* (Trabajo de grado, Pregrado en Ingeniería Financiera), Universidad Técnica de Ambato, Ecuador.

Novales, A. (2017). Midiendo el riesgo en mercados financieros. Documento de trabajo. *Universidad Complutense de Madrid*.

Peña, R. P. (2021). Aplicación de las técnicas de Markowitz a la Comercialización de Productos Agrícolas. *Ingenierías USBMed, 12*(2), 1-16.

Kocuk, B., y Cornuéjols, G. (2020). Incorporating Black-Litterman views in portfolio construction when stock returns are a mixture of normals. *Omega*, 91, 102008.

Ramirez, L., y Tamayo, M. (2015). Aplicación del Modelo Black-Litterman al Mercado de Renta Variable Colombiano. https://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria-matematica/practicas-investigativas/Documents/aplicacion-modelo-black-litterman-mercado-renta.pdf

Valencia García, J. A. (2018). *Modelo de Black-Litterman para la optimización de portafolios con views obtenidos por modelación de volatilidad*. (Trabajo de grado, Magíster en Administración Financiera) Universidad EAFIT, Colombia.

Walters, C. F. A. (2014). *The Black-Litterman model in detail*. Available at SSRN 1314585.

Notas

[2]La varianza del activo libre de riesgo es generalmente muy baja o incluso cero, lo que la hace una alternativa atractiva a la varianza del mercado para aquellos inversores que buscan minimizar el riesgo en su cartera. Al utilizar la varianza del activo libre de riesgo en lugar de la varianza del mercado, el inversor puede construir una cartera que tenga una menor varianza y, por lo tanto, un menor riesgo.

[3] Como representa la incertidumbre, entonces puede utilizarse como medida de confianza de las expectativas del inversionista.

[4] En este caso, se utilizó el Solver para establecer los pesos del portafolio. La restricción principal establecida fue que la suma de los pesos debía ser igual a 1, lo que significa que todo el dinero invertido en el portafolio debe ser asignado a los diferentes activos en proporciones adecuadas. Además, el objetivo del Solver fue buscar el valor mínimo de la varianza del portafolio, lo que significa que se buscó la combinación de pesos que reduciría al mínimo el riesgo total del portafolio.