Artigos Científicos

ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

EPISTEMOLOGICAL STUDY OF DEMONSTRATION BY THE ABSURD

Bamba, Aboubacar; Ag Almouloud, Saddo

Aboubacar Bamba
bambaboucar@yahoo.fr
École Nole Supérieures de Bamako, Malí

Saddo Ag Almouloud
saddoag@gmail.com
Universidade Federal do Pará , Brasil

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática, Brasil
ISSN: 1980-3141
ISSN-e: 1980-3141
Périodicité: Cuatrimestral
vol. 15, 2020
revistarematec@gmail.com

Reçu: 01 Juin 2020
Accepté: 27 Juin 2020

URL: http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/574/5742524010/index.html

DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p156-176.id245

Résumé: Le présent article a comme thème « Étude épistémologique de la démonstration par l'absurde ». Elle comporte, entre autres, l'épistémologie de la négation qui constitue la base de la démonstration par l'absurde, l'épistémologie de la démonstration par l'absurde, le lien entre la démonstration par l'absurde et d'autres types de démonstration, les types de problèmes mettant en jeu la démonstration par l'absurde et l'analyse institutionnelle de la démonstration par l'absurde. Nous avons également évoqué les conceptions de certains chercheurs sur la démonstration par l'absurde. Les questions de recherche sont libellées comme suit : Qu'est-ce que la démonstration par l'absurde en mathématique ? Existe-t-il un lien entre la démonstration par l'absurde et d'autres types de démonstration ? Existe-t-il des situations qui nécessitent l'utilisation de la démonstration par l'absurde ? Nous avons fait une classification des problèmes qui nous a permis de faire une catégorisation des types de démonstration par l'absurde à savoir les démonstrations par l'absurde directes associées aux questions fermées et les démonstrations par l'absurde indirectes associées aux questions semi-fermées (ou semi-ouvertes). L'analyse institutionnelle nous a permis de faire une revue des programmes maliens au niveau fondamental 2e cycle et au niveau de l'enseignement secondaire général. Nous terminons par une conclusion comportant nos recommandations. La typologie de la démonstration par l'absurde nous permet d'affirmer que la logique mathématique n'est pas la logique naturelle, car elle n'autorise l'esprit à porter, sur ce qui lui est présenté, que deux jugements : tenir la chose affirmée pour vraie ou pour non vraie, toute autre attitude étant exclue (le tiers exclus). Mots-clés : Démonstration. Absurde. Épistémologie. Négation.

Abstract: The theme of this article is "Epistemological study of the absurd demonstration". It includes among other things the epistemology of negation which constitutes the basis of the demonstration by the absurd, the epistemology of the demonstration by the absurd, the link between the demonstration by the absurd and other types of demonstration, the types of problems involving the absurd demonstration and the institutional analysis of the absurd demonstration. We also mentioned the conceptions of some researchers on the demonstration by the absurd. The research questions are worded as follows: What is the absurd demonstration in mathematics?

Is there a link between the absurd demonstration and other types of demonstration? Are there situations that require the use of the absurd demonstration? We made a classification of the problems which allowed us to make a categorization of the types of demonstration by the absurd namely the demonstrations by the direct absurd associated with the closed questions and the demonstrations by the indirect absurd associated with the semi-closed questions (or semi-open). The institutional analysis allowed us to review Malian programs at the 2nd cycle basic level and at the level of general secondary education. We ended with a conclusion with our recommendations. The typology of the absurd demonstration allows us to assert that mathematical logic is not natural logic, because it allows the mind to make, on what is presented to it, only two judgments: to hold the thing affirmed for true or for not true, any other attitude being excluded (the third party excluded).

Keywords: Demonstration, Absurd, Epistemology, Negation.

Resumo: O tema deste artigo é "Estudo Epistemológico da Demonstração pelo Absurdo". Inclui, entre outras coisas, a epistemologia da negação que forma a base da demonstração pelo absurdo, a epistemologia da demonstração pelo absurdo, a relação entre a demonstração pelo absurdo e outros tipos de demonstrações, os tipos de problemas que envolvem a demonstrações pelo absurdo e a análise institucional da demonstração pelo absurdo. Também discutimos as concepções de alguns pesquisadores sobre a demonstração pelo absurdo. As questões de pesquisa são rotuladas da seguinte forma: O que é a demonstração pelo absurdo em matemática? Existe uma relação entre a demonstração pelo absurdo e outros tipos de demonstrações? Existem situações que requerem o uso da demonstração pelo absurdo? Fizemos uma classificação de problemas que nos permitiu categorizar os tipos de demonstrações pelo absurdo, ou seja, as demonstrações pelo absurdo diretas associadas a questões fechadas e as demonstrações pelo absurdo indiretas associadas a questões semifechadas (ou semiabertas). A análise institucional permitiu-nos estudar os currículos do Mali no nível do Ensino Fundamental do 2º ciclo (7º ano a 9º ano) e no nível do ensino médio geral. Terminamos com uma conclusão com nossas recomendações. A tipologia da demonstração pelo absurdo nos permite afirmar que a lógica matemática não é lógica natural, pois permite que a mente carregue, sobre o que lhe é apresentado, apenas dois julgamentos: manter a coisa afirmada como verdade ou não verdadeira, qualquer outra atitude sendo excluída (terceiro excluído).

Palavras-chave: Demonstração, Absurdo, Epistemologia, Negação.

1 - Introduction

Cet article a été construit à partir de la thèse du premier auteur (BAMABA, 2019) dont le thème est : La démonstration par l'absurde : « Etude épistémologique et Didactique ». Cet article a pour objectif est l

´étude épistémologique de la négation qui constitue la base de la démonstration par l'absurde. Nous parlerons de façon générale de la démonstration et de la démonstration par l'absurde en particulier. Il s'agira de parler de la conception de certains chercheurs sur la démonstration par l'absurde, des types de problèmes qui ont nécessité son apparition, les conditions et le lieu de son apparition.

Les didacticiens se proposent, très souvent, d´examiner les objets d'enseignement et d'étudier leurs relations, leur structuration et leur hiérarchisation à l'intérieur du domaine considéré. Ils se posent la question de la référence et de l'origine des savoirs avec, notamment, l'histoire des savoirs référents, qu'ils soient savants, experts ou sociaux pour tenter de déterminer quel cheminement ils ont suivi et quels obstacles ils ont rencontrés et surmontés. Cette étude peut permettre de sortir de la vision selon laquelle les savoirs scolaires sont « présentés comme des faits établis » sans histoire, sans dimension culturelle, humaine ou sociale. S'agissant des savoirs scolaires et de leur histoire institutionnelle, on étudiera la manière dont ils ont été transposés, comment et pourquoi ils sont apparus (ASTOLFI et DEVELAY, 1989 ; HALTÉ, 1992 ; GIORDAN, 1994).

Cette dimension épistémologique va nous permettre d'analyser et de produire des savoirs à enseigner, en tenant compte du développement cognitif des élèves concernés, et donc de leur présentation ainsi que du choix d'une terminologie adéquate.

Nous tenterons de faire une étude de la démonstration par l'absurde en essayant d'identifier l'origine de son apparition, ses relations avec d'autres types de démonstrations, les conditions de son utilisation, ses avantages et ses limites.

Pour atteindre ces objectifs nous avons posé les trois questions suivantes à savoir : Qu'est-ce que la démonstration par l'absurde en mathématique ? Existe-t-il un lien entre la démonstration par l'absurde et d'autres types de démonstration ? Existe-t-il des situations qui nécessitent l'utilisation de la démonstration par l'absurde ?

Pour éventuellement trouver des réponses à ces questions :

Nous ferons une revue de la littérature axés sur quelques travaux existant sur la démonstration par l'absurde ;

Nous ferons un aperçu sur la nature de la démonstration par l'absurde et nous parlerons de la démonstration par l'absurde dans trois disciplines à savoir : Philosophie, Mathématiques et Logique. Nous établirons le lien entre la démonstration par l'absurde et le syllogisme (ou déduction logique) ; la démonstration par contraposée et la démonstration par récurrence.

Nous ferons une classification des types de problèmes qui mettent en jeu la démonstration par l'absurde et une classification des types de démonstration par l'absurde.

2 - Épistémologie de la négation

Dans cette partie nous faisons une étude épistémologique de la négation qui constitue la base de la démonstration par l'absurde.

On rencontre la notion de négation dès l'Antiquité, en particulier dans le livre 2 de l'organon, puis chez les logiciens de l'époque contemporaine, qui tentent d'en cerner les contours. Nous retraçons ci-dessous les principaux éléments susceptibles d'éclairer les études didactiques.

2.1 - Deux types d'oppositions Chez Aristote

Dans le livre 2 de l'organon, De l'interprétation, Aristote (Traduction nouvelle et notes par Jean Tricot, Librairie philosophique J. Vrin (1989) étudie à partir d'un exemple deux types d'opposition pour les énoncés quantifiés qui s'appliquent aux termes généraux, qui peuvent êtres prédiqués de plusieurs individus ou objets et servent à exprimer des propriétés. Aristote définit tout d'abord quatre types de phrases, qui serviront à la théorie du syllogisme formel, pour lesquels il assume l'hypothèse implicite de l'existence d'au moins un homme.

(1) Tout homme est blanc
(2) Nul homme n'est blanc
(3) Quelque homme est blanc
(4) Quelque homme n'est pas blanc

Les phrases (1) et (4) (respectivement (2) et (3) échangent leurs valeurs de vérité. Dans tout contexte où (1) est vrai, (4) est nécessairement fausse et vice-versa. Aristote appelle cette opposition une contradiction, ceci correspondant à ce que nous appelons aujourd'hui négation.

Les phrases (1) et (2) peuvent être simultanément fausses ; elles ne peuvent être en aucun cas simultanément vraies. Aristote appelle cette opposition, l'opposition de contrariété, ceci correspondant à une notion de contraire en accord avec la définition ci-dessus.

Les phrases (3) et (4) peuvent être simultanément vraies ; il n'y a pas d'opposition entre ces deux types de phrases. Dans la théorie du syllogisme, Aristote s'appuie exclusivement sur les phrases quantifiées exprimées sous la forme : « tout A est B » ; « nul A n'est B » ; «quelque A est B » ; « quelque A n'est pas B » ; il reconnait que « quelque B est A » peut se substituer sans modifier la valeur de vérité à « quelque A est B » et que « nul B n'est A » peut se substituer à « nul A n'est B » ; la substitution n'est évidemment pas possible avec les phrases (1) et (4).

On voit déjà apparaitre ici la spécificité de la négation : une forme syntaxique (des règles de construction précises) contrôlée par un critère sémantique, à savoir l'échange des valeurs de vérité dans tout contexte où il existe au moins un A.

2.2 - La négation dans le calcul des prédicats

Dans le calcul des propositions, la négation est un opérateur qui échange le vrai et le faux. C'est la définition sémantique la plus naturelle de cet opérateur. Dans ce système, il y a une seule forme d'opposition pour les propositions, qu'elles soient élémentaires ou complexes. Pour les propositions complexes, la négation se construit récursivement à partir de la négation des différents connecteurs, obtenue en échangeant les valeurs de vérité dans les tables, de sorte que l'opérateur de négation ne porte plus que sur les propositions élémentaires. Ainsi la négation de « p # q » est «¬ p #¬q », la négation de « p # q » est « p#¬q », la négation de « p # (q # r) » est « p#¬(p # r) » c'est-à-dire « p#(¬q#¬r),etc.

Dans le calcul des prédicats, la négation est un opérateur s'appliquant soit à des propositions (des phrases closes) soit à des fonctions propositionnelles (des phrases ouvertes). Comme ces dernières n'ont pas de valeur de vérité, il faut donc considérer une extension du concept de négation. C'est ce que soutient par exemple Da Costa(1997) qui, après avoir rappelé la table de vérité de l'opérateur propositionnel de négation, écrit (p. 45) « que ceci ne rend pas compte de la négation des propriétés », ce que permet la théorie sémantique de la vérité de Tarski A (1944). C'est, en effet, grâce à la notion de satisfaction que l'on peut définir simplement et rigoureusement la négation d'une fonction propositionnelle.

Étant donnée une fonction propositionnelle F, sa négation (non F) est la fonction propositionnelle qui dans toute structure interprétative adéquate est satisfaite exactement par les suites d'objets qui ne satisfont pas F. Ceci correspond tout à fait à la notion intuitive de négation pour les atomes. Par exemple, dans l'arithmétique des entiers naturels le couple d'opposés « être divisible par 3/ ne pas être divisible par 3 » permet de repartir les entiers en deux classes exactement : l'une formées des entiers multiples de 3 et l'autre formées par des entiers qui ne sont pas multiples de 3. Une conséquence immédiate de cette définition, c'est que les deux énoncés suivants « Fx #¬Fx » et #x« Fx# ¬Fx » #### universellement valides. Une deuxième conséquence c'est que cela permet de retrouver les deux types d'opposition définis par Aristote. En effet «

#x Fx » et «#x¬Fx » échangent leurs valeurs de vérité ; il en est de même pour «#xFx » et « #x ¬Fx » ; tandis que «#x Fx » et « #x ¬Fx » peuvent être simultanément fausses, alors que « #x Fx » et « #x ¬Fx » peuvent être simultanément vraies. On a donc bien deux formes d'opposition pour les propositions closes quantifiées de ce type : la négation qui échange le vrai et le faux (ce qu'Aristote appelle la contradiction) et ce que suivant Aristote, nous choisissons d'appeler un contraire, qui consiste à quantifier universellement la fonction propositionnelle et sa négation. La nécessité d'insister sur cette distinction est reconnue par Russel (1903) qui écrit : [c'est une erreur, quoi que facile à commettre, que de croire que la négation de « #x Fx » est « #x ¬Fx »]. Notons enfin que malgré tout une des conséquences de cette définition est qu'elle permet de retrouver les deux types d'oppositions définis par Aristote.

La présence d'un marqueur de négation dans l'énoncé « #x ¬Fx », il n'y a pas d'opposition avec l'énoncé « #x Fx », puisqu'ils peuvent être vrais en même temps, sous les mêmes circonstances, dans les mêmes interprétations. Une troisième conséquence est que l'on retrouve les deux résultats assurant l'inter-définissabilité des deux quantificateurs : « #x Fx = ¬(#x ¬Fx) » et « #x Fx = ¬(#x ¬Fx)». Ceci permet de donner une définition syntaxique de la négation dans le calcul des prédicats en accord avec la définition sémantique. On peut alors, comme dans le calcul des propositions, construire de manière récursive la négation d'une fonction propositionnelle complexe de sorte que la négation ne porte que sur les formules atomiques, comme pour l'exemple suivant : ¬(#x((#z F(z, x)) # G(x)) = #x (#zF (z, x)#¬G(x)).

Ceci montre également que l'on n'a pas besoin, en logique, d'introduire les symboles barrés comme on le fait en mathématique ; c'est l'opérateur de négation qui joue ce rôle, et la construction récursive de la négation pour les énoncés complexes offre un moyen opératoire d'accéder à la signification de la négation d'un tel énoncé dans une interprétation donnée. Toutefois, pour pouvoir utiliser de manière efficace ces procédures récursives, il est nécessaire que la syntaxe utilisée pour formaliser les énoncés soit en adéquation avec les règles de formation du calcul des prédicats, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs, ce qui est loin d'être toujours le cas dans la pratique mathématique ordinaire

2.3 - Négation et contraire dans la langue

Comme l'essentiel du discours mathématique est porté par la langue vernaculaire, il est donc nécessaire de regarder ce qu'il en est des formes langagières de la négation et de leur usage dans l'activité mathématique. Cette question a fait l'objet de nombreuses observations naturalistes et est au cœur de la thèse de Ben Kilani (2005). Une première remarque, c'est que l'on rencontre parfois les termes de négation et de contraire utilisés comme synonymes. Par exemple, le contraire de «f croissante » n'est pas « f décroissante ». Si c'était le cas, une fonction non croissante serait décroissante. Or certaines fonctions ne sont ni croissantes ni décroissantes. Le couple « croissante/décroissante » fonctionne, dans la langue française, comme un couple d'antonymes. Ce qui correspond à la notion de contraire au sens d'Aristote, dans la mesure où l'opposition est beaucoup plus radicale que la simple négation. D'autres couples de propriétés en mathématiques soulèvent des problèmes de même ordre. Par exemple, le couple « paire/impaire », lorsqu'il est appliqué aux fonctions, correspond plus ou moins à un contraire, tandis que le couple « pair/impair » appliqué aux nombres correspond à la négation. Ici c'est l'introduction d'une quantification universelle qui fait basculer de négation à contraire.

D'autres couples d'opposés en mathématiques fonctionnent comme des négations ; c'est le cas par exemple de « rationnels/irrationnels » pour les nombres, considérés dans l'ensemble des nombres réels ou de « continue/discontinue » pour les fonctions. Mais il n'y a pas de construction systématique de tels couples d'opposés en mathématiques : ainsi on ne parle pas de nombres irréels.

2.4 - Négation et ambiguïté sémantique

D'autres difficultés dans la langue sont liées aux ambiguïtés sémantiques (Fuchs 1996). Les réponses ci-dessous sont recueillies auprès des professeurs de mathématiques en formation continue ou initiale.

La négation (le contraire) de la phrase « Toutes les boules sont rouges », c'est : Toutes les boules ne sont pas rouges- Aucune boule n'est rouge- Certaines boules ne sont pas rouges- Il existe au moins une boule qui n'est pas rouge. La négation (le contraire) de la phrase « Certaines boules sont rouges » c'est :

Certaines boules ne sont pas rouges- Toutes les boules ne sont pas rouges- Toutes les boules sont rouges- Aucune boule n'est rouge. De très vifs débats apparaissent régulièrement d'une part sur le fait de savoir si contraire et négation sont synonymes ou non, d'autre part, sur la signification de la phrase « Toutes les boules ne sont pas rouges » (1) qui pour certains s'interprète par « Aucune boule n'est rouges »(2) et pour d'autres par « Certaine(s) boule(s) n'est (ne sont) pas rouge »(3). Fuchs reconnait que si la forme linguistique voudrait que (1) soit synonyme de (3), il arrive fréquemment que (1) soit utilisée en lieu et place de (2). Ceci est dû à une ambiguïté sur les propriétés respectives de l'opérateur de négation et de l'opérateur de quantification. Dans le calcul des prédicats, la phrase (3) se traduit par «#x¬Fx », qui est équivalent de «¬###(#) », tandis que la phrase (2) se traduit par «#x¬Fx ».

Considérons maintenant la phrase « Tous les élèves sont présents » qui a la même structure syntaxique que la phrase « Toutes les boules sont rouges », et la forme négative associée « Tous les élèves ne sont pas présents ». Par substitution de « sont présents » à « ne sont pas présents », ce qui est correct puisque « être absent » est la négation de « être présent», nous obtenons la phrase « Tous les élèves sont absents, qui est synonyme de « Aucun élève n'est présent », ce qui montre que l'ambigüité de l'expression « tous...ne pas », en français peut être difficilement évitée. Après le tour d'horizon de quelques aspects épistémologiques de la négation il apparait que les difficultés liées à ce connecteur sont réelles. Cela peut engendrer des obstacles pour les apprentissages mathématiques et en particulier pour l'utilisation de la démonstration par l'absurde. (VIVIANE DURAND-GUERRIER, JUDITH NJOMGANG-NGANSOP, 2009).

Cette étude montre toute la complexité de la négation. Dans le cas du calcul des prédicats, la difficulté est due au fait que les propositions n'ont pas de valeur de vérité. Ces cas ne sont pas fréquents dans nos pratiques de classe. Dans le calcul des propositions, la difficulté se trouve au niveau de l'implication où la négation utilise la disjonction. S'agissant des énoncés formulés dans la langue, il y a beaucoup de difficultés par rapport à la classification de Aristote, notamment opposition, contraire et négation. Il est donc évident que des difficultés soient constatées dans nos pratiques de classe par rapport à la démonstration par l'absurde.

3 - Épistémologie de la démonstration par l'absurde

3.1 - Preuve, Raisonnement et démonstration

Nicolas Balacheff (1987) fait la distinction entre ces trois mots comme suit : Nous appelons explication un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées. Nous appelons preuve une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.

Au sein de la communauté mathématique, ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règle bien défini. Balacheff appelle démonstrations ces preuves.

Un raisonnement est une activité intellectuelle (la plupart du temps non explicite) de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

Ces distinctions de vocabulaire mettent en relief les dimensions sociales de la démonstration en tant que résultat d'un processus particulier de preuve.

Nous nous proposons de montrer que l'étude des processus de preuve doit être conduite en référence à la fois à celui qui les met en œuvre en tant que sujet connaissant et à la situation dans laquelle il les met en œuvre. Nous mettons alors en évidence la variété de leur nature et quelques éléments de complexité de leur fonctionnement. Cette étude nous a conduits à différencier des niveaux de preuves pouvant prendre place dans la genèse de la démonstration dans une perspective d'apprentissage.

Quand est-ce que la démonstration est-elle apparue en mathématique ? Le problème de l'irrationalité présenté dans deux cadres différents (arithmétique et géométrique) serait à l'origine de la démonstration en mathématique. De plus le cadre arithmétique nécessite le recours à la démonstration par l'absurde selon Gilbert Arsac (1987), « L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique »

Nous pouvons donc nous poser la question suivante : la démonstration par l'absurde fit-elle partie des premières méthodes de démonstration apparues en mathématique ? Nous tentons de répondre à ces questions dans les paragraphes qui suivent.

3.2 - Aperçu sur la nature de la démonstration par l´absurde

En mathématiques, une démonstration est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie. Les démonstrations utilisent la logique, puis incluent habituellement des éléments du langage naturel en évitant autant que possible d'introduire des ambiguïtés.

Dans le contexte de la théorie de la preuve, dans lequel des preuves purement formelles sont considérées comme preuves, des preuves qui ne sont pas entièrement formelles sont appelées les « preuves sociales ». Ce sont des preuves qui sont basées sur des affirmations considérées comme exactes parce qu'elles sont admises par un ensemble de personnes. L'idée est acceptée comme exacte lorsqu'elle fait le consensus. Le résultat qui est démontré s'appelle un théorème.

Une fois le théorème démontré, il peut être utilisé comme base pour démontrer d'autres assertions. Nous pouvons distinguer plusieurs techniques de démonstration:

· la démonstration directe : où la conclusion est établie en combinant logiquement des axiomes, des définitions et d'autres théorèmes ;

· la démonstration inductive : où un cas fondamental est démontré, et une règle d'induction est utilisée pour démontrer une série (souvent infinie) d'autres cas ;

· la démonstration par l'absurde: où il est démontré que si une propriété était vraie, alors une contradiction logique apparaîtrait, et ainsi la propriété doit être fausse.

· la démonstration déductive : utilisée pour par exemple montrer l'existence d'un objet à partir de théorème assurant son existence sans avoir construit explicitement cet objet ;

· la démonstration constructive : qui consiste à construire un exemple concret possédant une certaine propriété, pour montrer qu'il existe au moins un objet ayant cette propriété.

Une assertion qui est supposée vraie, mais qui n'a pas encore été démontrée, est appelée une conjecture.

Parfois il est possible de démontrer qu'une certaine assertion ne peut pas être démontrée à partir d'un ensemble donné d'axiomes; c'est le cas de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu vis-à-vis de l'axiomatique de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, on dit alors que cette assertion est indépendante de ce système d'axiomes. Dans beaucoup de systèmes d'axiomes connus en mathématique, il existe des assertions qui ne peuvent être ni démontrées, ni être réfutées ; voir le théorème d'incomplétude de Gödel.

Les démonstrations formelles demandent une très grande rigueur et une attention particulière ; nous devons préciser les règles de logique, le type de raisonnement que nous utilisons, définir éventuellement, de nouveaux objets mathématiques dont nous avons besoin, rappeler les axiomes ou les théorèmes auxquels nous faisons référence, vérifier que nous sommes bien dans les conditions d'application d'un théorème avant de l'utiliser, etc.

D'autre part, il est possible d'écrire toutes les démonstrations en langage formel, mais cela se fait rarement. Trop de formalisme rendrait presque impossible la compréhension d'une démonstration, et dissimulerait l'idée générale dans un symbolisme excessif. Cependant cela est possible en utilisant un logiciel d'aide à la preuve qui commence à se faire de plus en plus.

Il y a donc un compromis entre une rigueur trop poussée sur le plan de la logique et une rigueur plus superficielle utilisant davantage le langage naturel.

Une démonstration, dans le cadre académique (cours, livre, exposé...) n'est en général pas détaillée au point d'être « juste » au sens de la logique ; en général on se contente de donner des éléments suffisamment précis pour que l'auditoire/le lectorat visé soit convaincu. En effet, pour définir 1 proprement, il faudrait déjà des pages et des pages. C'est pourquoi, par exemple, une démonstration donnée au niveau licence ne conviendra pas à un élève ; pour ce dernier, la preuve ne sera pas assez détaillée. En ce sens, une démonstration est quelque chose de très relatif.

Le raisonnement par l'absurde (du latin réductio ad absurdum) ou apagogie (du grec ancien apagôgê) est une forme de raisonnement logique, philosophique, scientifique consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire, soit à montrer, la fausseté d'une autre proposition en déduisant logiquement des conséquences absurdes. Quelle est l'origine de la démonstration par l'absurde ?

La démonstration par l'absurde apparait dès la très ancienne preuve de l'inexistence de 2. Szabo A (1977) remarque qu'Euclide en fait un emploi privilégié, tandis que Platon en fait la méthode typique du mathématicien.

Arsac (1987) remarque que la démonstration par l'absurde n'est pas utilisée dans les mathématiques chinoises (J. Dhombres, communication orale) et indiennes jusqu'au 14e siècle environ. Dans le cas de l'Inde, ce fait est en relation avec l'absence du principe du tiers exclu, et ce phénomène est lié au développement d'une théorie particulière de la logique, adaptée à la linguistique (Singh, 1984). Dans le cas de la pensée chinoise, elle ignore et même nie le principe du tiers exclu (LIOU KIA HWAY, 1961). On retient également que les mathématiques élaborées ont pu se développer pendant des siècles dans certaines civilisations sans que la logique de ce développement fasse apparaitre le principe du tiers exclu et le raisonnement par l'absurde. D'où l'origine externe de l'apparition de la démonstration par l'absurde dans les mathématiques grecques.

3.3 - Démonstration par l'absurde en philosophie, mathématique et logique

3.3.1 - Démonstration par l'absurde en philosophie

- Apagogie positive

On parle d'apagogie positive ou de démonstration par l'absurde simple, quand la conclusion affirme la vérité d'une proposition, non en l'établissant directement par une démonstration tirée de la nature même de la chose, mais indirectement, en faisant voir que la proposition contraire est absurde. On conclut de la fausseté de l'une, la vérité de l'autre. Par exemple, Spinoza démontre par l'absurde que « la production d'une substance est chose absolument impossible » (Éthique I, proposition VI, corollaire).

En effet, si une substance pouvait être produite, la connaissance de cette substance devrait dépendre de la connaissance de sa cause (sachant que la connaissance de l'effet suppose celle de la cause) et ainsi elle ne serait plus une substance, puisqu'une substance est précisément ce qui est en soi et est conçu par soi.

- Limites de ce mode de raisonnement

Ce raisonnement n'est légitime que lorsqu'il n'y a que deux propositions contradictoires possibles, dont l'une est nécessairement fausse si l'autre est vraie, et réciproquement ; autrement il dégénère en sophisme s'appuyant sur une fausse alternative ou alors, il faut effectivement prouver la fausseté de toutes les autres thèses alternatives : soit A, B, et C considérées comme hypothèses possibles, on prouve que B et C sont fausses, A est donc vraie. Il s'agit classiquement de ce qu'on appelle aussi le raisonnement disjonctif (modus tollendo-ponens).

D'un point de vue épistémologique, cette preuve reste toujours inférieure à la démonstration directe, parce que, si elle contraint l'esprit, elle ne l'éclaire pas et ne donne pas la raison des choses, comme le fait la preuve directe ou ostensive. Il est donc préférable de ne l'employer que quand on ne peut faire autrement : si, par exemple, dans la discussion, on a affaire à un contradicteur qui se refuse à toute preuve directe ou qui nie les principes ; c'est le cas pour la réfutation de certaines doctrines, comme le scepticisme.

- Apagogie négative

En philosophie, la méthode apagogique ou réduction à l'absurde a une place plus importante dans le domaine de la réfutation des idées adverses. L'apagogie négative consiste alors à faire ressortir que la proposition à réfuter conduit à des conséquences absurdes car impossibles (contradictoires avec elles-mêmes ou avec d'autres principes admis comme vrais). Moins risqué que l'apagogie positive, ce mode de raisonnement n'affirme pas forcément que l'inverse est vrai. Ainsi, on réfutera par exemple la proposition « tout ce qui est rare est cher » en indiquant que si c'était vrai, alors il s'en suivrait qu'un cheval bon marché, qui est chose rare, devrait en même temps être cher, ce qui est absurde, c'est-à-dire contradictoire dans les termes. La proposition « tout ce qui est rare est cher » est donc nécessairement fausse. Mais on n'affirme pas pour autant que "tout ce qui se trouve facilement est cher" ou que "tout ce qui est rare est bon marché ».

Moins rigoureusement, voire de façon sophistique, on se contentera de faire ressortir des conséquences funestes ou désagréables d'une thèse ou d'une doctrine (voir l'argumentum ad consequentiam).

Néanmoins il reste aussi préférable d'un point de vue logique de réfuter par l'analyse directe de la fausseté des principes. Aussi un usage non critique de ce type de preuve peut être soupçonné d'appartenir plus à la dialectique éristique et à la rhétorique qu'à la philosophie proprement dite. (Raisonnement par l'absurde Wikipédia)

3.3.2 - Démonstration par l'absurde en mathématique

La démonstration par l'impossible, usitée dans les mathématiques pour démontrer certains théorèmes qui ne sont pas susceptibles d'une autre preuve, rentre dans la preuve apagogique ; elle n'est pas admise par certains mathématiciens dits intuitionnistes, qui rejette le principe du tiers exclu.

Admettons que nous ayons à démontrer une proposition p. La démarche consiste à montrer que l'hypothèse non p (i.e. que p est fausse) mène à une contradiction logique. Ainsi p ne peut pas être fausse, et doit être a fortiori vraie.

Prenons un exemple simple, et considérons la proposition « il n'y a pas de plus petit nombre rationnel strictement plus grand que 0 ». Dans un raisonnement par l'absurde, nous commençons par prendre la négation de la proposition : « il existe un plus petit nombre rationnel strictement positif, disons r0 ».

Maintenant soit$x = \frac{r_0}{2}$. Alors x est un nombre rationnel, et est strictement plus grand que 0, et x est strictement plus petit que r_0 . Mais cela est absurde - contradictoire avec notre hypothèse initiale que r_0 était le plus petit nombre rationnel. Ainsi nous pouvons conclure que la proposition d'origine est nécessairement vraie : il n'y a pas de plus petit nombre rationnel strictement plus grand que 0.

Il n'est pas rare d'utiliser ce type d'argument avec des propositions telles que celle cidessus, pour démontrer la non-existence de quelque objet mathématique. Nous supposons que de tels objets existent, et ensuite nous démontrons que cela nous mène à une contradiction ; ainsi, de tels objets n'existent pas. Pour des exemples, voyez la démonstration que √2 est irrationnelle et la démonstration de la non-dénombrabilité de l'ensemble des réels de Cantor (1874).

Il est important de noter que pour fournir une preuve valide, il doit être démontré que pour une proposition donnée p, non p implique une propriété qui est réellement fausse dans le système mathématique utilisé. Le danger ici est d'utiliser un sophisme, où nous montrons que non p implique une propriété q, qui semble fausse, mais qui n'est pas vraiment démontrée comme fausse. Les exemples historiques de cette erreur incluent la démonstration fausse du cinquième postulat d'Euclide de la droite parallèle (aussi connu comme le postulat de la parallèle) à partir des autres postulats. L'échec de ces démonstrations a par la suite mené à la géométrie non euclidienne.

Bien que l'on doive toujours préférer une démonstration directe, le raisonnement par l'absurde est largement employé dans les démonstrations mathématiques fondées sur la logique classique, cependant pour les mathématiciens intuitionnistes la démonstration que l'ajout de non p conduit à une contradiction ne permet pas de construire une démonstration de p, mais seulement de non (non p), qui est plus faible.

En mathématique la démonstration par l'absurde serait apparue à l'époque pythagoricienne dans la démonstration de l'irrationalité de √2 mais de façon orale. C'est Euclide qui le premier officialisa la démonstration par l'absurde en le diffusant dans ses écrits. C'est ainsi que dans les « Eléments » apparaît la première démonstration par l'absurde, montrant la proposition 6 du livre I : « Si deux angles d'un triangle sont égaux l'un à l'autre les côtés opposés à ces angles seront aussi égaux l'un à l'autre ». Dans les mathématiques modernes (Algèbre, Arithmétique, Topologie, Géométrie différentiable,#) il est fréquent de voir un théorème ou une proposition démontrée par l'absurde

3.3.3 - Démonstration par l'absurde en logique

En logique mathématique, la déduction ad absurdum est représentée par :

Si S ∪ {¬#} #F, Alors S#P

Dans ce qui précède, P est la proposition que nous souhaitons démontrer et S est un ensemble d'assertions qui sont données comme vraies ; celles-ci pourraient être, par exemple, les axiomes de la théorie dans laquelle nous travaillons, ou des théorèmes que nous avons récemment établis et qui s'appuient dessus. Nous considérons la négation de P en plus de S ; si ceci mène à une contradiction logique F, alors nous pouvons conclure que des propositions de S, on déduit P.

Une démonstration par l'absurde est une démonstration qui prouve la vérité ou la fausseté d'une proposition par la fausseté d'une conséquence. On distingue deux types de démonstration par l'absurde.

1er type : Preuve par l'absurde :

Dans ce cas on établit qu'une proposition est vraie en montrant que, si elle ne l'était pas, on arriverait à une conséquence dont la fausseté est établie.

C'est ainsi, par exemple que sont démontrées la plupart des réciproques de théorèmes.

2e type: réduction à l'absurde:

On établit qu'une proposition est fausse en montrant que ses conséquences sont fausses. C'est par exemple le cas de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Dans les deux cas, et en particulier dans le second, on peut éprouver un sentiment d'insatisfaction : c'est qu'en effet la logique mathématique n'est pas la logique naturelle ; elle n'autorise l'esprit à porter, sur ce qui lui est présenté, que deux jugements : tenir la chose affirmée pour vraie ou pour non- vraie, toute autre attitude étant exclue (on appelle ce refus d'une troisième possibilité le « tiers exclus »).

La démonstration par l'absurde repose donc sur le fait que le « non (non vrai) » ne saurait être que vrai. Or la logique naturelle plus riche « souffre » de cette limitation qui ne permet aucune nuance entre l'affirmation d'une chose et de son contraire : dire par exemple, « il n'est pas impossible que je vienne »-autrement dit, « il est possible que je vienne » ne veut pas dire que je viendrai à coup sûr. L'insatisfaction que peut parfois produire la logique du tiers exclus ne touche pas que les « consommateurs » de mathématiques, mais aussi les « producteurs », c'est à dire les mathématiciens. L'intérêt de la « logique du tiers exclus » est sa maniabilité.

Il faut donc « oublier » dans une démonstration par l'absurde toutes les objections qui se présenteraient à l'esprit si ce mode d'argumentation était présenté dans une discussion ordinaire.

4 - Lien entre démonstration par l'absurde et d'autres types de démonstration

Dans cette partie nous avons fait une analyse de quatre types de démonstration afin d'établir les liens éventuels qui existent entre eux. Il s'agit du syllogisme (ou déduction logique), de la démonstration par contraposée, de la démonstration par récurrence et de la démonstration par l'absurde. Ce choix se justifie par le fait que ce sont les types de démonstration fréquemment utilisés dans l'enseignement secondaire au Mali.

4.1 - Démonstration par déduction

Le principe de cette méthode de démonstration est le suivant : Pour démontrer qu'une propriété q est vraie il suffit de trouver une propriété p qui vérifie les deux conditions suivantes : p est vraie, $(p = > q)$ est vraie

La table de vérité de l'implication permet de conclure que q est vraie.

CADRE 1
Tableau de valeur

P	q	
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Source : les auteurs de cette recherche

Exemple : Pour démontrer par syllogisme que les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes, on peut procéder comme suit :

Considérer le point O intersection des médiatrices d de [AB] et d' de [AC].

O existe car (AB) et (AC) sont sécantes et d et d' sont respectivement perpendiculaires à (AB) et (AC). O appartient à la médiatrice d'' de [BC] car OA=OB=OC. Donc les médiatrices sont concourantes. Ici la propriété q à démontrer est : « Les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes ».

La propriété p trouvée est :

« Le point d'intersection de deux médiatrices appartient à la troisième médiatrice ».

On voit bien que p est vrai (on l'a démontré) et que « p implique q » est vrai. Donc q est vrai c'est-à-dire les médiatrices sont concourantes.

4.2 - Démonstration par contraposée

Pour démontrer que $(p = > q)$ est vraie il faut (et il suffit) de montrer que $(-q = > -p)$ est vraie. C'est l'exploitation de $[(p = > q) < = > (-q = > -p)]$ vraie.

CADRE 2
Tableaux de valeurs

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Source : Les auteurs de cette recherche

Exemple : Soit à démontrer par contraposée la propriété : « Si n est un entier naturel strictement positif alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel ». On suppose que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel et on démontre que $n = 0. n^2 + 1 = a^2 = > a^2 - n^2 = \mathbf{1}$ (où a est un entier naturel)

$= > (a-n)(a+n) = 1 = > a - n = 1 \text{et} a + n = 1 = > a = 1 = > n = 0$

La propriété à démontrer est de la forme : « p implique q » avec p = « n est un entier strictement positif » et q = « $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel ».

Nous avons démontré « non q implique non p » avec non q =« $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel » et non p =« n=0 » qui est la démonstration par contraposée de « p implique q ».

4.3 - Démonstration par récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P(n) est vraie pour tout n, on procède comme suit : on vérifie que $P(n_o)$ $(n \geq no)$ est vraie, on suppose que P(n) est vrai et on démontre que $(p(n) = > p(n+1))$ est vraie.

Exemple :

On considère la suite (Un) définie par U_0=4 et pour tout n,$U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + 6$. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $U_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 8$

Vérifions pour n=0

$U_0 = 4 = -\left(\frac{1}{4}\right)^{0-1} + 8 = -4 + 8$. Donc la propriété est vraie pour n=0.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n c'est-à-dire $U_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 8$ et démontrons qu'elle est vraie à l'ordre n+1c'est à dire$U_{n+1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-} + 8$.

$U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + 6 = \frac{1}{4}\left[-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 8\right] + 6 = \left[-\left(\frac{1}{4}\right)^{n} + 2\right] + 6 = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-} + 8$. Ici la propriété à démontrer est : P(n) = « Pour tout n, $U_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 8$ »

Supposer que P(n) est vrai et démontrer que P(n+1) est vrai, c'est démontrer que « P(n) implique P(n +1) » est vrai.

4.4 - Démonstration par l'absurde

Pour démontrer par l'absurde qu'une proposition P est vraie. On part de l'hypothèse « P fausse »=a. Par un raisonnement logique, déduire de « a » une conséquence q c'est-à-dire montrer que $(a = > q)$ est vraie. Ainsi avec a vraie et $(a = > q)$ vraie, on obtient par syllogisme (q vraie), q sera choisie de telle façon que le résultat (q vraie) entre en contradiction avec un résultat déjà démontré (théorème, définition, etc...)

Cette situation contradictoire met en cause l'hypothèse de départ (puisque le raisonnement est logique). On conclut alors que l'hypothèse de départ est fausse c'est-à-dire que (P fausse) est fausse ; donc P est vraie.

Exemple : Soit à démontrer par l'absurde la propriété : « Si n^2 est un entier naturel pair alors n est un entier naturel pair».

Supposons que n^2 est un entier naturel pair et n n'est pas un entier naturel pair.

n^2 =2p et n=2q+1

n^2+n = 2p+2q+1

n(n+1) = 2(p + q)+1

Ce qui signifie que n(n+1) est impair c'est-à-dire que n+1 est impair qui contredit « n impair ». Donc si n^2 est un entier naturel pair alors n est un entier naturel pair, ici la propriété P à démontrer est : « Si n^2 est un entier naturel pair alors n est un entier naturel pair»

L'hypothèse « a » est « n^2 est un entier naturel pair et n n'est pas un entier naturel pair». La conséquence q est : « n+1 est impair », q vrai entre en contradiction avec la propriété « si n est impair alors n+1 est pair »

Nous constatons que les quatre types de démonstration ont en commun le même type de tâche à savoir la démonstration d'une implication. Ce qui justifie en partie, d'une part la possibilité de passer de la déduction logique à la démonstration par l'absurde et vis-versa, et d'autre part, la confusion entre la démonstration par l'absurde et la démonstration par contraposée.

5 - Types de problèmes mettant en jeu la démonstration par l´absurde

Dans cette partie, nous nous intéresserons au registre de formulation des énoncés, à la formulation des questions et à la présence de l'implication et des quantificateurs dans les énoncés. Selon que les quantificateurs et l'implication sont présents dans les énoncés du registre de la langue ou dans ceux du registre des symboles, les difficultés de résolution d'un problème peuvent varier.

5.1 - Classification des problèmes

· *Classification suivant le registre de formulatio*

Selon le registre de formulation nous avons classé les énoncés en deux groupes à savoir :

-les énoncés formulés dans le registre de la langue naturelle

-les énoncés formulés dans le registre des symboles

· *Classification suivant la formulation de la questi*

Selon la formulation de la question nous avons classé les énoncés en trois groupes à savoir :

Énoncés à questions fermés

Nous appelons question fermée une question ayant un seul but. Elle est formulée sous la forme : montrer que, démontrer que, vérifier que, ou sous forme d'affirmation.

Exemple 1 : Montrer qu'un triangle est rectangle.

Ici, il un y a un seul but à savoir : le triangle est rectangle.

Exemple 2 : Vérifier que l'entier N est pair.

Ici, il y a un seul but à savoir : l'entier N est pair.

Exemple 3 : √2 est irrationnel (affirmation).

Ici, il un y a un seul but à savoir : √2 est irrationnel

Énoncés à questions semi-fermées/semi-ouvertes

Nous appelons question semi-fermée (ou semi-ouverte), une question ayant deux buts possibles.

Elle est formulée sous la forme : ...est-il... ? (...est-elle ...?), est-ce que... ? etc...

Exemple 1: Le triangle ABC est-il rectangle ?

Ici il y a deux buts possibles à savoir : le triangle est rectangle, le triangle n'est pas rectangle.

Exemple 2 : Est-ce que √2 est irrationnel ?

Ici il y a deux buts possibles à savoir : √2 est irrationnelle, √2 n'est pas irrationnelle.

Énoncés à questions ouvertes

Nous appelons question ouverte, une question ayant au moins trois buts possibles. Elle est formulée sous la forme : quel (le) est... ? Comment... ?, quand... etc..

Exemple 1: Quelle est la nature du triangle ABC ?

Ici il y a cinq buts possibles à savoir : le triangle est rectangle, le triangle est isocèle, le triangle est équilatéral, le triangle est quelconque.

Exemple 2: Comment varie la fonction f ?

Ici il y a quatre buts possibles à savoir : la fonction f est croissante, la fonction f est décroissante, la fonction f est constante, la fonction f n'est ni croissante ni décroissante ni constante.

La catégorisation des questions nous a permis de faire une classification des démonstrations par l'absurde en introduisant la notion de démonstration par l'absurde directe relative aux questions fermées et la notion de démonstration par l'absurde indirecte relative aux questions semi-fermées (ou semi-ouvertes). Quant aux questions ouvertes elles constituent une limite pour la démonstration par l'absurde c'est-à-dire que son utilisation n'est pas pertinente.

Classification suivant la présence de l'implication et des quantificateurs

L'implication est présente dans les énoncés formulés dans le registre de la langue sous la forme si...alors... et dans les énoncés formulés dans le registre des symboles à travers $'' => ''$

Le quantificateur universel est présent dans les énoncés formulés dans le registre de la langue sous la forme « pour tout… » ou « quel que soit… » et dans les énoncés formulés dans le registre des symboles à travers "#"

Le quantificateur existentiel est présent dans les énoncés formulés dans le registre de la langue sous la forme « il existe au moins… » et dans les énoncés formulés dans le registre des symboles à travers "#"

Les énoncés sont donc classés en huit groupes à savoir :

- Énoncés ne contenant ni l'implication ni un quantificateur
- Énoncés contenant l'implication seulement
- Énoncés contenant le quantificateur universel seulement
- Énoncé contenant le quantificateur existentiel seulement
- Énoncé contenant l'implication et le quantificateur universel
- Énoncé contenant l'implication et le quantificateur existentiel
- Énoncé contenant le quantificateur universel et le quantificateur existentiel
- Énoncé contenant l'implication, le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Classification des types de démonstration par l'absurde

Démonstration par l'absurde direct :

Nous appelons démonstration par l'absurde directe, toute démonstration par l'absurde relative à une question fermée. Le but étant connu, il suffit d'ajouter la négation de la question posée aux hypothèses pour aboutir à la contradiction.

Démonstration par l'absurde indirect :

Nous appelons démonstration par l'absurde indirecte, toute démonstration par l'absurde relative à une question semi-fermée (ou semi-ouverte). La question ayant deux buts possibles, deux choix C1 et C2 s'imposent :

Supposer que C1 est vrai c'est essayer de démontrer par l'absurde que C1 est faux. Si le raisonnement aboutit à une contradiction, on a une démonstration par l'absurde. Sinon la démonstration par l'absurde s'obtient en supposant que C2 est vrai.

Exemple de démonstration par l'absurde indirecte : Soit P la proposition suivante :

« Si n est un entier impair alors n^2 est un entier impair ». La proposition P est-elle vraie ? Utiliser la démonstration par l'absurde

Ici la question est semi-fermée (ou semi-ouverte). En effet il y a deux buts possibles à savoir la proposition P est vraie, la proposition P n'est pas vraie.

Supposer que P est vraie, c'est essayer de démontrer par l'absurde que P est fausse. Dans ce cas on procède comme suit: Supposons que n est impair et démontrons que n2 est impair

$$n = 2p + 1 = > n2 = (2p + 1)^2 = 4p2 + 4p + 1 = 2(2p2 + 2p) + 1$$

Ce qui montre bien que n2 est impair .Cette démonstration n'est pas une démonstration par l'absurde.

En revanche, supposer que P est fausse, c'est essayer de démontrer par l'absurde que P est vraie. Dans ce cas on procède comme suit :

n=2p+1

$n^2 = (2p+1)^2$

$n^2 = 4p^2+4p+1$

$\mathbf{n^2 = 2(2p^2+2p) + 1}$

Donc n^2 est impair. Ce qui contredit l'hypothèse n^2 n'est pas impair. La démonstration est bien une démonstration par l'absurde. Nous constatons que selon le choix du but, on a une démonstration par déduction ou une démonstration par l'absurde d'où l'aspect indirect.

6 - Analyse institutionnelle de la démonstration par l'absurde

L'enseignement fondamental 2e Cycle au Mali comporte trois classes : 7e, 8e, 9e .Aucun des programmes de ces classes ne parle de la démonstration par l'absurde. Cependant l'utilisation est rencontrée dans les pratiques.

L'enseignement secondaire général au Mali comporte trois niveaux à savoir : 10e, 11e et terminale. Le niveau 10e comporte une seule série (10e commune) et le niveau 11e comporte trois séries : 11e science, 11e lettre, 11e science économique et sociale.

Le niveau terminal comporte six séries : terminale science exacte, terminale science expérimentale, terminale science économique, terminale science humaine, terminale lettre et langue, terminale art et lettre.

Aucun des programmes de ces différentes séries ne fait cas de la démonstration par l'absurde ni comme objet d'enseignement ni comme outil d'enseignement. Cependant la démonstration par l'absurde est souvent utilisée comme outil pour la résolution de certains problèmes dans cet ordre d'enseignement.

On peut donc conclure que dans le système éducatif malien la démonstration par l'absurde n'est pas un élément de programme avant l'Enseignement Supérieur.

Par rapport aux manuels scolaires, notre analyse a porté sur deux collections dont un au niveau de l'enseignement fondamental 2e cycle et un au niveau de l'enseignement secondaire général. Il s'agit de la collection Institut Pédagogique National Bamako (I.P.N Bamako) pour l'enseignement fondamental 2e cycle et la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) pour l'enseignement secondaire général. Ce choix se justifie par le fait que ces deux collections constituent les outils de base pour les deux ordres d'enseignement au Mali.

La collection Institut Pédagogique National Bamako (IPN Bamako) du niveau fondamental 2e cycle comporte trois livres (7e année, 8e année et 9e année). C'est dans le livre de 8e année que la démonstration par l'absurde est utilisée. Cette utilisation est explicite dans certains cas et implicite dans d'autres.

Dans l´exemple des figures 1 et 2, nous avons un exemple d´utilisation explicite de l démonstration par l ´absurde où on demande aux élèves de prouver que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

1. Des propriétés importantes de la médiatrices d'un segment

a. Construis à la règle et à l'équerre la médiatrice d'un segment [AB]. Contrôle à l'aide du compas que chaque point de la médiatrice est équidistant des extrémités A et B du segment.

b. Construis au compas des points équidistants des extrémités A et B d'un segment [AB]. Contrôle à la règle et à l'équerre que ces points sont situés sur la médiatrice de [AB].

Tu admettras les deux propriétés :
Tout point situé sur la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités du segment. (a)
Tout point équidistant des extrémités d'un segment est situé sur la médiatrice du segment. (b)

Remarque :
La deuxième propriété s'appelle la **réciproque** de la première propriété.

FIGURE 1
Exemple de l´utilisation de la démonstration par l´absurde
IPN Bamako (1991, p.61)

2. Une propriété remarquable des médiatrices d'un triangle

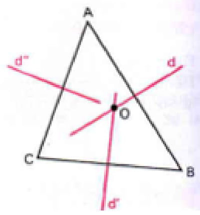
Construis les médiatrices d'un triangle. Tu remarques qu'elles semblent se couper toutes les trois en un même point. (On dit habituellement que des droites qui se coupent en un même point sont concourantes.) Il s'agit maintenant de prouver à l'aide d'un raisonnement que cette propriété est vraie quel que soit le triangle.

L'hypothèse du problème est la suivante :

H { ABC est un triangle.
d est la médiatrice de [AB].
d' est la médiatrice de [BC].
d" est la médiatrice de [AC].

La conclusion est :
C : d, d', d" sont concourantes.

Fig. 2



Pour passer de H à C, achève le raisonnement dont voici le début :
d et d' se coupent en un point O sinon A, B, C seraient alignés. En effet si d et d' étaient parallèles, les droites (CB) et (AB), étant respectivement perpendiculaires à d' et d, auraient la même direction ; démontre que (CB) et (AB) seraient confondues.
Tu viens de prouver que le point O existe.

FIGURE 2
Démonstration par l´absurde de la propriété des médiatrices d´un triangle
IPN Bamako (1991, p.62)

Dans ce texte l'absurde est identifiée à travers l'expression « sinon A, B, C seraient alignés ». Elle est utilisée pour montrer que d et d' sont sécantes.

Dans le même livre la démonstration par l'absurde est utilisée de façon implicite pour prouver que les hauteurs sont concourantes. En effet les auteurs recommandent l'utilisation du théorème 2 : « le cercle circonscrit à un triangle a pour centre le point de concours des médiatrices du triangle » qui est une conséquence du théorème 1 :« les médiatrices d'un triangle sont concourantes ». Aucun exercice de la collection ne recommande l'utilisation de la démonstration par l'absurde. Les auteurs ont utilisé l'absurde sans pour autant la définir.

Quant à la collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) du niveau secondaire général, nous observons qu'elle comporte huit livres à savoir : 2e S, 2e lettre, 1ere SM, 1ere SE, 1ere lettre, Terminale SM, Terminale SE, Terminale lettre. C'est dans le livre de 2e S que la démonstration par l'absurde est utilisée de façon explicite dans la démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de 2 . Son principe est défini dans le livre et son utilisation est demandée dans la résolution de certains exercices, comme celui de la figure 3.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

• Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. On peut alors trouver une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ telle que : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. On en déduit que : $a^2 = 2b^2$.

Les tableaux suivants donnent le chiffre des unités de a^2 et de $2b^2$ en fonction du chiffre des unités des nombres a et b :

	Chiffre des unités									
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

	Chiffre des unités									
b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2b^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

$a^2 = 2b^2$ ne peut être vrai que lorsque a et b se terminent par 0 ou **lorsque a se termine par 0 et b par 5.** Dans les deux cas, a et b seraient alors tous les deux multiples de 5, **ce qui est contradictoire puisque** $\frac{a}{b}$ est irréductible.
Ainsi, si $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, on aboutirait à une contradiction. **$\sqrt{2}$ est donc un nombre irrationnel.**

L

La méthode de démonstration précédente est appelée *raisonnement par l'absurde.*
Son principe est le suivant : pour démontrer qu'une proposition (p)[2] est vraie, on prouve que la négation de cette proposition (non p) est fausse.
Pour cela :
– on suppose que (non p) est vraie ;
– on cherche à en déduire une proposition (q) que l'on sait fausse.
Ainsi, lorsque l'on y parvient, on aboutit à une contradiction et on a démontré que (non p) est fausse, c'est-à-dire que (p) est vraie.

FIGURE 3
Démonstration de l´irrationnalité de
Collection CIAM 2e Sciences p.79, 1997

Il ressort de l'analyse institutionnelle que contrairement aux programmes, les manuels scolaires font cas de la démonstration par l'absurde. Si la collection IPN passe sous silence une définition de la démonstration par l'absurde, la collection CIAM définit son principe et demande son utilisation dans des exercices. Il faut tout de même signaler que la démonstration commence dans le système éducatif malien à partir de la 8e année. On peut donc se demander pourquoi ce décalage entre les documents officiels et les manuels scolaires à propos de la démonstration par l'absurde ?

Conclusion générale

Comme signalé dans l'introduction, dans la conclusion nous faisons cas des résultats obtenus par rapport à nos questions de recherche. En faisant une étude épistémologique, notre objectif était de parler de la démonstration de façon générale et de la démonstration par l'absurde en particulier. C'est ainsi que nous avons essayé de donner une définition de la démonstration et d'évoquer quelques techniques de démonstration à savoir : la démonstration directe, la démonstration inductive, la démonstration par l'absurde la démonstration déductive, la démonstration constructive. Parlant de la démonstration par l'absurde il est fait cas de :

· la démonstration par l'absurde positive, quand la conclusion affirme la vérité d'une proposition, non en l'établissant directement par une démonstration tirée de la nature même de la chose, mais indirectement, en faisant voir que la proposition contraire est absurde. Nous avons évoqué les limites de ce mode de démonstration et son application en mathématique ;

· la démonstration par l'absurde négative qui consiste à faire ressortir que la proposition à réfuter conduit à des conséquences absurdes car impossibles (contradictoires avec elles-mêmes ou avec d'autres principes admis comme vrais) ;

· la preuve par l'absurde qui consiste à établir qu'une proposition est vraie en montrant que, si elle ne l'était pas, on arriverait à une conséquence dont la fausseté est établie (démonstration de la plupart des réciproques de théorèmes) ;

· La réduction à l'absurde qui consiste à établir qu'une proposition est fausse en montrant que ses conséquences sont fausses (démonstration de l'irrationalité de) ;

Cette typologie de la démonstration par l'absurde nous permet d'affirmer que la logique mathématique n'est pas la logique naturelle, car elle n'autorise l'esprit à porter, sur ce qui lui est présenté, que deux jugements : tenir la chose affirmée pour vraie ou pour non vraie, toute autre attitude étant exclue (le tiers exclus).

Nous avons analysé les liens éventuels entre les types de démonstration rencontrés fréquemment dans l'enseignement secondaire au Mali ; il s'agit de la démonstration par déduction, la démonstration par contraposé, la démonstration par récurrence et la démonstration par l'absurde. Il ressort de cette analyse que les quatre types de démonstration ont en commun le même type de tâche à savoir la démonstration d'une implication. Ce qui justifie en partie, d'une part la possibilité de passer de la déduction logique à la démonstration par l'absurde et vis-versa, et d'autre part, la confusion entre la démonstration par l'absurde et la démonstration par contraposée

Pour étudier la démonstration par l'absurde par rapport à l'enseignement, nous avons analysé d'une part les documents officiels (programmes et savoir-faire) au niveau de l'enseignement fondamental 2e cycle et de l'enseignement secondaire général au Mali, d'autre part les manuels de deux collections dont l'un au niveau fondamental et l'autre au niveau secondaire. Cette analyse nous a permis de constater qu'aucun des documents officiels des deux niveaux d'enseignement cités ci-dessus ne fait cas de la démonstration par l'absurde.

S'agissant des manuels scolaires le constat est le suivant :

· niveau fondamental : un seul manuel sur les trois de la collection utilise la démonstration par l'absurde dans les exercices et les activités sans pour autant la nommer.

· niveau secondaire : comme au niveau fondamental un manuel sur huit utilise la démonstration par l'absurde sans la nommer.

Références

ALMOULOUD SADDO AG. **Fundamentos da didatica da matematica.** Curitibe: Ed. UFPR, 2007

ARSAC, G. (1987): **L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique RDM** Vol 8/3. p 267-312

ARSAC G., DEVELAY M., TIBERGHIEN A. (1989) : **La transposition didactique en mathématiques, en physique,** en biologie, éd. IREM de Lyon et LIRDIS.

ARTIGUE, M. L'ingénierie didactique. **Recherche en didactique des mathématiques.** La pensée sauvage, vol 9, n°3, p. 283-307.

ASTOLFI J.-P., DEVELAY M. (1989) : **La didactique des sciences** ; P.U.F., coll. Que sais#je, 1989?

BALACHEFF N (1987) : **Processus de preuve et situation de validation Educational Studies** in mathematics, vol 18, n°2,Mai 1987, p 147-176.

BAMBA ABOUBACAR. **Thèse de doctorat; Démonstration par l'absurde : Etude épistémologique et didactique**. Université des Sciences des Techniques et des Technologies de Bamako Mali, 2019.

CANTOR, G; **Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen** Zahlen, J. reine angew. Math., vol. 77, 1874, p. 258-262.

DURAND-GUERRIER V, NJOMGANG-NGANSOP J. **Questions de logique et de langage à la transition secondaire - supérieur. L'exemple de la négation).** EMF 2009 – Groupe de travail 7 Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur. (in http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Durand_Ngansop.pdf, accès 30/10/2018).

SZABO, A. (1977) **Les débuts des mathématiques grecques,** Vrin Paris.

TARSKI A. **La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique,** in Logique, sémantique et mathématique, volume 2 : pp. 265-305. Armand Colin, 1974.

Lien alternatif

https://rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/245 (pdf)