

O GEOGEBRA NO ESTUDO DA RETA E CIRCUNFERÊNCIA COM ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEOGEBRA IN THE STUDY OF THE LINE AND CIRCUMFERENCE WITH STUDENTS IN MATHEMATICS

GEOGEBRA EN EL ESTUDIO DE RECTA Y CIRCUNFERENCIA CON ALUMNOS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Barbosa Souza, Lucas Benjamin; Freitas Cabral, Natanael

 **Lucas Benjamin Barbosa Souza ***
prof.lbbs.31@gmail.com
Universidade do Estado do Pará, Brasil

 **Natanael Freitas Cabral ****
natanfc61@yahoo.com.br
Universidade do Estado do Pará, Brasil

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Grupo de Pesquisa sobre Práticas Socioculturais e Educação Matemática, Brasil
ISSN: 1980-3141
ISSN-e: 1980-3141
Periodicidade: Cuatrimestral
vol. 16, núm. 37, 2021
revistarematec@gmail.com

Recepção: 26 Outubro 2020
Aprovação: 15 Dezembro 2020
Publicado: 18 Janeiro 2021

URL: <http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/574/5742385009/index.html>

DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p123-139.id281>

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.



Este trabalho está sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NoComercial-Não Derivada 4.0 Internacional.

Resumo: Este artigo, proveniente de investigações realizadas pelo Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), tem como objetivo apresentar contribuições do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática. A experimentação aqui retratada foi desenvolvida com alunos de graduação e pós-graduação do curso de licenciatura em matemática e refere o uso do GeoGebra no estudo da reta e circunferência. Tomamos como aporte teórico os pressupostos do ensino por atividades e dos registros de representação semiótica. Ao final da investigação, podemos perceber contribuições da utilização do software GeoGebra principalmente na relação entre características da expressão algébrica desses objetos e suas representações no plano de coordenadas cartesianas. Concluímos que a utilização desse tipo de tecnologia (geometria dinâmica) promove um amadurecimento do conhecimento dos alunos, o que permite a estes identificar características e propriedades do objeto seja a partir de sua equação ou de sua representação geométrica.

Palavras-chave: Formação de professores, GeoGebra, Ensino de matemática, Geometria analítica.

Abstract: This article, from of the one investigations developed out by the Research Group on History, Education and Mathematics in the Amazon (GHEMAZ), aims to present contributions from the use of technologies in the process of teaching and learning mathematics. The experimentation portrayed here was developed with students of the mathematics course and postgraduate, refers to the use of the GeoGebra in the study of the straight and circumference. We take as a theoretical contribution the assumptions of teaching by activities and records of semiotic representation. At the end of the investigation, we was see contributions from the use of the GeoGebra software mainly in the relationship between characteristics of the algebraic expression these objects and their representations in the cartesian coordinate plane. We conclude that the use of this type of technology (dynamic geometry) promotes a maturation of the students' knowledge, which allows

them to identify characteristics and properties of the object, either from its equation or its geometric representation.

Keywords: Teacher training, GeoGebra, Mathematics teaching, Analytical geometry.

Resumen: Este artículo, surge a partir de investigaciones realizadas por el Grupo de Investigación en Historia, Educación y Matemáticas en la Amazonía (GHEMAZ), tiene como objetivo presentar contribuciones desde el uso de tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La experimentación aquí descrita se desarrolló con estudiantes de pregrado y posgrado de la carrera de matemáticas y se refiere al uso de GeoGebra en el estudio de la línea y la circunferencia. Tomamos como base teórica los supuestos de la docencia por actividades y registros de representación semiótica. Al final de la investigación, podemos ver contribuciones del uso del software GeoGebra principalmente en la relación entre las características de la expresión algebraica de estos objetos y sus representaciones en el plano cartesiano de coordenadas. Concluimos que el uso de este tipo de tecnología (geometría dinámica) promueve una maduración del conocimiento de los estudiantes, lo que les permite identificar características y propiedades del objeto, ya sea a partir de su ecuación o su representación geométrica.

Palabras clave: Formación de profesores, GeoGebra, Enseñanza de las matemáticas, Geometría analítica.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Toda sociedade vive em constante mudanças, nos seus mais diversos âmbitos, e o âmbito educacional não está isento dessas transformações. Com o avanço das tecnologias e sua inserção nos diversos campos, no âmbito educacional fomos levados a busca e adaptação de novas formas de ensinar, aprender e fazer matemática.

Nesse sentido, destacamos dois pontos pertinentes: o primeiro referente a nossa organização social, isto é, temos ainda a perdurar em nossa sociedade uma grande desigualdade social em que nem todos têm acesso as tecnologias. Outro ponto, contrário a este, refere ao avanço da tecnologia e da facilidade de acesso a alguns tipos de tecnologias.

De todo modo, esses dois pontos servem de reflexão ao qual ressaltamos aqui a necessidade de políticas educacionais voltadas a inserção da população, principalmente de classe baixa, às tecnologias e também a necessidade de os professores buscarem se inovar nas condições que forem possíveis promovendo a aproximação do aluno à essas tecnologias.

Esses recursos, comumente chamados de tecnologia de informação e comunicação (TIC's) têm ressignificado o espaço escolar e o processo de apreensão de conhecimentos. As TIC's enquanto ferramentas tecnológicas contribuem para a mediação entre professor, aluno e objeto de conhecimento, além de

AUTOR NOTES

* Mestrando do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática - Universidade do Estado do Pará (PPGEM-UEPA). Professor de Matemática – Colégio Ideal, Belém, Pará, Brasil. Av. Cmte. Brás de Águiar, 707 – Ed. Alben Almy, apt. 1107 - Nazaré, Belém - PA, 66035-110.

** Doutor em Educação - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC- RJ) – Professor efetivo da Universidade do Estado do Pará (UEPA), Belém, Pará, Brasil, R. do Una, 156 – Universidade do Estado do Pará – Centro de Ciências Sociais e Educação - Telégrafo, Belém - PA, 66050-540.

possibilitar o desenvolvimento de competências e habilidades no aluno segundo a prática docente nela vinculada.

Em termos da literatura, temos percebido em escala nacional e internacional, investigações do uso pedagógico de softwares de geometria dinâmica no ensino de matemática. Estas obras indicam várias potencialidades desses softwares nesse objetivo, como o dinamismo, interatividade, estímulo do pensamento para elaboração de conjecturas e o estabelecimento de generalizações, sendo recomendadas em diferentes níveis da educação básica.

Alguns desses softwares têm incorporado recursos que possibilitam a integração de objetos geométricos e outras formas de representação como gráficos, tabelas, coordenadas, visualizações 3D. O GeoGebra constitui uma plataforma de acesso livre pra esses recursos, e como outros, proporcionam o trabalho com diversos objetos matemáticos, temáticas como equações, expressões algébricas, funções, e geometria podem ser explorados em diversas formas de representação como forma de articulação em uma ação educativa.

Especificamente em relação a geometria analítica, temos ela como um objeto de conhecimento cuja aprendizagem segue de muitas dificuldades por partes dos alunos do ensino médio e que se estende, conseqüentemente, aos alunos de graduação dos cursos de licenciatura em matemática. A Geometria Analítica é um campo matemático no qual é utilizado métodos de análise e conhecimentos algébricos para representar e resolver problemas geométricos, assim existe uma articulação entre a geometria e a álgebra onde uma pode ser utilizada tanto para facilitar o entendimento como para resolver problemas da outra. É neste sentido que podemos considerar a geometria analítica um tópico cujo ensino é facilitado quando aliado ao uso das tecnologias, como o GeoGebra.

Considerando tais contribuições (as quais veremos de modo mais aprofundado adiante) e a importância do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem matemática no contexto atual, ressaltamos a necessidade de o professor ter a capacitação e o conhecimento acerca dessas tecnologias, implementando-as a sua prática docente.

Este artigo visa contribuir para a formação de professores que ensinam matemática, temos por objetivo apresentar contribuições do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática, especificamente em relação ao estudo das equações da reta e da circunferência. Para isso, apresentamos os resultados obtidos numa pesquisa com alunos da graduação e pós-graduação do curso de licenciatura em matemática a fim de capacitá-los para o uso das tecnologias em sua organização didática.

Referente a estrutura do trabalho, inicialmente explanamos acerca de nossos aportes teóricos. Versamos assim, sobre o uso das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem matemática; fazemos considerações em relação ao ensino por atividades e os registros de representação semiótica; apresentamos a metodologia e, por fim, discutimos os resultados obtidos dando destaque as principais atividades destacando nossas observações e as contribuições do uso do GeoGebra no estudo da reta e circunferência.

O USO DAS TIC's NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Conforme supracitado, as Tecnologias da informação e comunicação (TIC's) podem ser definidas como um conjunto de recursos tecnológicos, utilizados de forma integrada, com um objetivo comum. No âmbito educacional, elas possuem grande atuação no processo de ensino-aprendizagem, pois promove a integração, facilita a comunicação e auxilia na prática docente nas diversas modalidades de ensino. Interessa a matemática, pelo fato de que, as TIC's estabelecem ligações desta área de conhecimento com as demais, permitindo a realização da interdisciplinaridade e o dinamismo na ação educativa nos termos de Borba e Penteadó:

[...] à medida que a tecnologia informática se desenvolve, nos deparamos com a necessidade de atualização de nossos conhecimentos sobre o conteúdo ao qual ela está sendo integrada. Ao utilizar uma calculadora ou um computador, um professor de matemática pode se deparar com a necessidade de expandir muitas de suas ideias matemáticas e também

buscar novas opções de trabalho com os alunos. Além disso, a inserção de TI no ambiente escolar tem sido vista como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade (2003, p. 64-65).

Percebemos, nas palavras dos autores acima, as TIC's enquanto um recurso metodológico para desenvolver a prática docente e para promover uma melhor apreensão do conhecimento por parte dos alunos. Neste sentido elas vem para dinamizar o processo de ensino e aprendizagem e nos levar a repensar a questão do espaço e tempo da escola, isto é, “[...] a sala de aula deve deixar de ser o lugar das carteiras enfileiradas para se tornar um local em que professor e aluno podem realizar um trabalho diversificado em relação ao conhecimento” (VALENTE, 1999, p. 8).

Devemos destacar que esta tendência é apresentada desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) em 1998. Estes, por sua vez, determinam, para a Educação Matemática e os recursos tecnológicos, uma relação de reciprocidade em que a matemática deve servir para entender e se apropriar das tecnologias digitais assim como esta deve ser ferramenta para entender a Matemática, deixando evidente a importância das TIC no processo de apropriação do conhecimento matemático.

De acordo com Dallemole e Groenwald (2013) a introdução das TIC's proporcionou um maior desenvolvimento de conhecimentos e habilidades no processo de ensino e aprendizagem. Dentre as diversas tecnologias disponíveis para utilização, as autoras destacam os softwares de geometria dinâmica por auxiliarem no ensino de diversos objetos matemáticos, conforme mencionamos nas considerações iniciais.

Não obstante, estes pesquisadores ressaltam a utilização de softwares de geometria dinâmica no ensino de geometria analítica, enfoque de nossa investigação, por possibilitarem a exploração de propriedades, o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, além de permitir com que eles pensem, levantar hipóteses e conjecturas para validá-las e avalia-las.

A utilização adequada de um software possibilita que o aluno trabalhe melhor seu cognitivo, favorecendo a individualidade e protagonismo em seu processo de aprendizagem. Estes dois elementos são essenciais para sua formação social e no que concerne ao conhecimento matemático.

Em nossa pesquisa escolhemos utilizar o software GeoGebra devido ao seu acesso livre e sua fácil utilização, além de que, o GeoGebra enquanto software de geometria dinâmica auxilia no processo de ensino-aprendizagem da geometria, valorizando tanto o conhecimento em si como sua construção através das ações de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar (ALVES; SOARES, 2003, p. 7).

Especificamente acerca da Geometria Analítica, é possível manipular equações (representação algébrica) bem como visualizar, com o auxílio dos eixos ortogonais cartesianos, o comportamento (representação geométrica) do objeto matemático envolvido, ou seja, mais especificamente, no momento que estamos alterado ou atribuído valores para o coeficiente linear da reta, imediatamente observamos a reta deslocando-se para cima ou para baixo, conseqüentemente, mudando o valor onde “corta” o eixo das ordenadas.

ENSINO POR ATIVIDADE E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Temos nas pesquisas desenvolvidas na área de Educação Matemática diversas investigações e desenvolvimento de metodologias voltadas para o melhor desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Mais recentemente do ponto de vista cronológico temos pesquisas voltadas pra investigação do Ensino de Matemática por atividades, com uma abordagem própria voltada para o ensino por meio da investigação e (re)descoberta.

Essas atividades devem ser elaboradas previamente pelo professor de maneira organizada possuindo objetivos já determinados de modo que ao final da sequência aplicada com os alunos, estes tenham a apreensão do conhecimento. Neste sentido, Mendes e Sá (2006) apontam que:

[...] O ensino da Matemática por atividades visa conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos das atividades [...] a característica essencial desse tipo de abordagem metodológica de ensino está no fato de que os tópicos a serem aprendidos serão descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca que é conduzido pelo professor até que ele seja incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz (p. 16).

A importância da utilização desta metodologia consiste principalmente nas dificuldades apresentadas pelos alunos tanto no ensino fundamental, médio e superior na aprendizagem de matemática. Desta forma, por meio do ensino de atividades, o professor insere em sua prática docente uma dinâmica experimental formativa para os alunos que passam a dar significado aos conteúdos matemáticos ao quais se deparam (MENDES; SÁ 2006).

Assim, o ensino por atividades tem por objetivo segundo Paula (2012) levar o aluno ao desenvolvimento de suas habilidades, organizar informações, descobrir regularidades e relações para solucionar problemas. Voltamo-nos então a utilizar essa abordagem para o ensino de Geometria Analítica a partir de uma sequência de atividades aplicada com uma turma do 1º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Aliamos na proposta de experimentação, a teoria dos Registros de Representações Semióticas desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, tal teoria tem como intuito analisar a influência das representações apresentadas pelos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Essas representações dos objetos matemáticos são feitas a partir dos registros de representações semióticas.

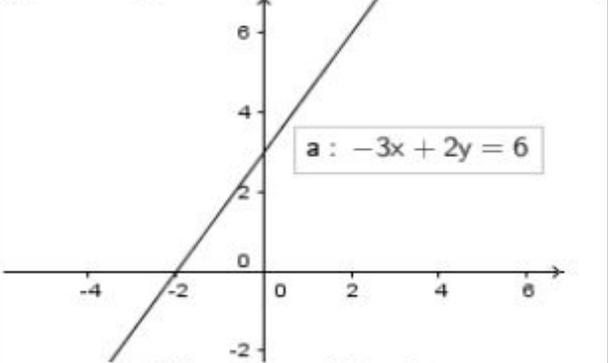
De acordo com Pantoja, Campos e Salcedos (2013), esses registros são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. Assim, os sistemas de representações utilizados para representar determinados objetos matemáticos constituem os registros semióticos, estes formam o sistema de comunicação que possibilita a organização de informações acerca do objeto representado.

Segundo Oliveira e Sá (2010), Duval afirma que a Matemática possui uma singularidade em relação às outras ciências, dada a sua natureza não real. Segundo ele, para se acessar qualquer objeto matemático, é necessária a utilização de registros de representação semiótica. Assim os objetos matemáticos residem no campo das ideias o que gera dificuldade de assimilação de seus conceitos sendo essa uma das preocupações dos pesquisadores da Educação Matemática no que tange a forma como se estabelece o aprendizado e a aquisição do conhecimento.

Neste ponto que entra a contribuição de Duval (2009), os objetos matemáticos não são diretamente observáveis e existe uma variedade de representações semióticas possíveis para serem utilizadas, ou seja, um mesmo objeto matemático pode possuir diferentes representações (língua natural, linguagem algébrica, representação geométrica, representação gráfica, entre outros), desta forma é importante a articulação destes registros por parte dos alunos a fim de estabelecer a aprendizagem do objeto matemático estudado.

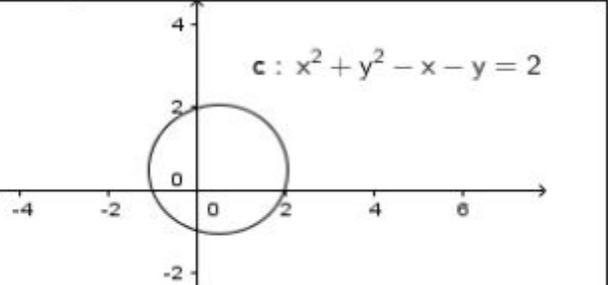
Os Registros de Representações Semióticas têm auxiliado sobremaneira no que tange à organização de situações de aprendizagens, uma vez que essa teoria se apresenta também como uma maneira didático/metodológica que o professor pode vir a utilizar para estabelecer a aquisição de conhecimentos matemáticos, assim para seu ensino é necessário levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (DUVAL, 2003). Abaixo podemos observar alguns dos registros de representações que os objetos matemáticos que escolhemos trabalhar na pesquisa podem possuir. Nos Quadros 1 e 2 temos as representações algébrica e geométrica da reta e da circunferência, respectivamente:

QUADRO 1
Representação algébrica e geométrica da reta

<p>$a: -3x + 2y = 6$</p> <p>Objeto Matemático: Reta Sistema Semiótico: Simbólico Representação: Algébrica</p>	 <p>Objeto Matemático: Reta Sistema Semiótico: Figural Representação: Geométrica</p>
--	--

Elaborado pelos autores.

QUADRO 2
Representação algébrica e geométrica da circunferência

<p>$c: x^2 + y^2 - x - y = 2$</p> <p>Objeto Matemático: Circunferência Sistema Semiótico: Simbólico Representação: Algébrica</p>	 <p>Objeto Matemático: Circunferência Sistema Semiótico: Figural Representação: Geométrica</p>
---	---

Elaborado pelos autores.

Mais além, um mesmo registro pode possuir diferentes formas de representação, cada qual com características únicas para definir um mesmo objeto, no caso, a reta como se pode observar no Quadro 3:

QUADRO 3
Diferentes formas de representação algébrica da equação de uma reta

Representações Algébricas	Representação Geométrica
$-x + y - 1 = 0$ Forma Genérica $mx + ny + p = 0$	
$y = x + 1$ Forma Genérica $y = mx + n$	
$(y - 2) = 1(x - 1)$ Forma Genérica $(y - y_0) = m(x - x_0)$	

Elaborado pelos autores.

Acima podemos perceber que a reta não só possui uma representação algébrica (equação), mas variadas formas (equações). No quadro 3 podemos identificar a equação geral, reduzida, e paramétrica, respectivamente de uma mesma reta.

Duval afirma que a conversão das diversas representações manifestadas sobre um objeto de estudo são essências no processo de ensino e aprendizagem, pois possibilitam a construção do conhecimento por parte do aluno e a assimilação do objeto estudado, logo a mudança de registros se estabelece como necessária no ensino da Matemática e na elaboração de suas atividades para o seu aprendizado conforme o pensamento a seguir:

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de troca a todo o momento de registro de representação (DUVAL, 2003, p. 14).

Assim podemos perceber com as palavras de Duval que a aquisição do conhecimento em matemática é implicada pela habilidade de trabalhar com diferentes registros de representação. A Teoria possui dois procedimentos principais que atuam no estudo dos objetos matemáticos, sendo a conversão um deles, o outro procedimento é o tratamento, sendo ambos diferentes, Duval (2003, p. 16) os conceitua da seguinte maneira:

- Os tratamentos são transformações de representação dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou representação;
- As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetivos denotados, por exemplo: reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica.

Logo o Tratamento seria o processo de transformação de uma representação semiótica em outra sem que ocorra a mudança do sistema, ou seja, sem alterar o registro do objeto. Já a conversão é o processo de transformação de uma representação semiótica em outro por meio da mudança do registro de representação, analisando o mesmo objeto por meio de outros registros de representação diferentes do inicial.

É perceptível então que a Geometria Analítica possui em seus conteúdos uma variedade de registros semióticos essências que são articulados entre si para que ocorra o seu processo de ensino e aprendizagem. Dallemole e Groenwald (2011; 2013) constataram tal importância e pontuam a necessidade de se investigar as dificuldades apresentadas pelos alunos, bem como do educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem que trabalhem com essa diversidade de registros de representação assim como a articulação entre eles, para que a compreensão do conteúdo seja realizada.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Nossa pesquisa compõe os estudos realizados pelo Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), buscou verificar as contribuições do uso das tecnologias na compreensão dos conceitos de reta e circunferência na geometria analítica. Considerando aos apontamentos da literatura referente a identificação de dificuldades dos alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática em geometria analítica e por ter enfoque na formação de professores, optamos pelo trabalho com os alunos do 1º ano do curso.

Em relação as características da pesquisa, nossa investigação tem cunho qualitativo tendo em vista que o enfoque está no processo, isto é, para além dos resultados apresentados pelos alunos. Para Ludke e André (1986, p. 07) a pesquisa qualitativa:

[...] discute os conceitos básicos e primordiais relacionados ao ambiente natural, visando uma fonte direta dos dados a serem coletados pelo pesquisador, com intuito de obter uma ação investigativa relacionada a um intenso trabalho de campo.

Não obstante, possui caráter experimental que de acordo com Severino (2000) toma o objeto em sua concretude e o coloca em condições técnicas de observação e manipulação experimental, uma vez que, decorre da aplicação de uma proposta de abordagem metodológica para promover uma melhor compreensão dos objetos matemáticos reta e circunferência.

Nosso instrumento metodológico constitui-se de 10 atividades, relacionadas aos conteúdos de reta e circunferência, formuladas com base em na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e os pressupostos do ensino por atividades. A experimentação ocorreu com 12 alunos de graduação e pós-graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará na categoria de minicurso durante a XXI Semana Acadêmica do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE-UEPA).

Os alunos utilizaram o GeoGebra (cujo manuseio foi ensinado previamente a aplicação) para o desenvolvimento das atividades. Essas atividades serão elaboradas com o objetivo de levar os alunos não só a aprenderem os conteúdos de retas e circunferência, mas a manipularem os registros de representação e suas articulações. Foram trabalhadas as formas de representações da reta e circunferência, suas formas de construção, suas equações, os elementos que os compõem, dentre outras características exclusivas de cada uma. A seguir apresentamos cada uma das atividades e nossas análises dos resultados obtidos na experimentação.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ressaltamos a abordagem qualitativa de nossa pesquisa e o enfoque nos indícios de aprendizagem e compreensão dos conceitos de reta e circunferência. Assim, não é nosso interesse no acerto ou erro dos sujeitos investigados e sim em suas concepções em relação aos objetos matemáticos envolvidos e a forma de trabalho com as diferentes formas de representação deste objeto. Desde modo, selecionamos para apresentação neste trabalho, quatro das atividades (duas referentes ao estudo da reta e duas ao estudo da circunferência), cujas respostas são pertinentes para discussão. O foram alunos doravante nomeados de A1 a A12.

A atividade 1 teve por objetivo levar os alunos a relacionar a inclinação de uma reta no plano cartesiano com seu coeficiente angular e comportamento (realizando isomorfismo com a representação de uma função polinomial do 1º grau), a partir da análise de construções no GeoGebra de retas sem a exibição da sua equação. A seguir temos o comando da questão já com a resposta da atividade e a visualização do 1º caso.

Atividade I - Abra a pasta "Atividade I" em seguida, a partir de cada arquivo, determine abaixo a inclinação da reta, a classificação do ângulo, o coeficiente angular e o comportamento da reta.

Arquivo	Inclinação	Classificação de	Coeficiente angular	Comportamento
1º caso	63,43°	Agudo	2	Crescente
2º caso	90°	Reto		-
3º caso	116,57°	Obtuso	-2	Decrescente
4º caso	0°	Raso	0	Constante

Com base nas informações da tabela, descreva suas conclusões quanto à relação de cada elemento no comportamento da reta.

Os alunos utilizaram a ferramenta de determinação de ângulo para determinar a inclinação e o cálculo do ##### para o valor do coeficiente angular (Figura 1) para assim estabelecer as relações. Nesta atividade 8% dos sujeitos investigados deixou em branco a resposta, embora a tabela tenha sido completada corretamente.

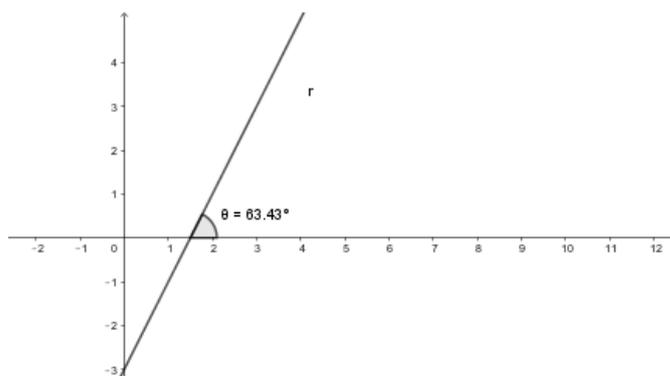


FIGURA 1
1º caso da atividade I
Elaborados pelos autores

Agrupamos as demais respostas em 3 categorias (C) representadas nas respostas dos alunos acima (Quadro 4), são elas:

QUADRO 4
Categorias de resposta da atividade I

C1 - Alunos que identificaram a influência de cada elemento no comportamento da reta, mas não conseguiram formalizar estas relações.
C2 - Alunos apresentaram equívocos conceituais na análise dos elementos.
C3 - Alunos que conseguiram chegar na formalização.

Questionário da pesquisa (2020).

A figuras 2 apresenta as respostas do A8, A3 e A2, respectivamente.

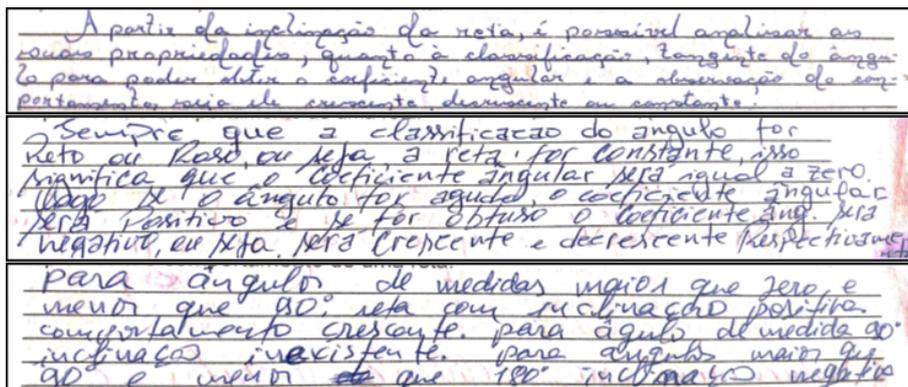


FIGURA 2
Resposta do A8, A3 e A2 na atividade I
Questionário da pesquisa.

Como exemplo da categoria C1, temos a resposta do A8, correspondendo a aproximadamente 58% dos investigados. Neste sentido, podemos observar que os alunos descrevem o que ocorre em cada situação, conseguem relacionar o registro geométrico de modo a fazer a leitura no registro algébrico, todavia, não conseguem estabelecer uma generalização, isto é, apresentaram suas observações de forma intuitiva (DUVAL, 2009).

A Categoria C2, compõe aproximadamente 17% dos alunos e corresponde as respostas em que foi identificado equívocos conceituais. No caso do A3, temos um equívoco no que concerne a inclinação do ângulo e o coeficiente angular correspondente a esta inclinação, o aluno concluiu que o ultimo seria igual a zero para as inclinações de 90° e 180° , embora ela não seja definida para uma inclinação de 90° .

A categoria C3, compõe também aproximadamente 17% dos alunos. Refere as respostas as quais foram identificados uma conclusão mais solida do pensamento, no caso do A2 acima, este conseguiu se aproximar da relação matemática sujeita a inclinação da reta: $(0^\circ < \# < 90^\circ)$ ângulo agudo, coeficiente angular positivo e comportamento funcional crescente; $\# = 90^\circ$ coeficiente angular não definido e sem comportamento funcional; $(90^\circ < \# < 180^\circ)$ ângulo obtuso, coeficiente angular negativo e comportamento funcional decrescente e, por fim, $\# = 180^\circ$ coeficiente angular nulo e comportamento funcional constante.

Apresentamos também para discussão a atividade 4 que diz respeito a equação geral da reta $ax + by + c = 0$. Esta atividade teve por objetivo verificar se os alunos conseguiam realizar o tratamento dentro do registro algébrico para identificação dos coeficientes angular e linear a partir da equação geral. A seguir o comando da atividade e o terceiro caso.

Atividade IV – Abra a pasta “Atividade IV” para responder o que lhe é solicitado.

IV.I. O que você percebe quando variamos somente “a” no intervalo do controle deslizante? E somente b?

IV.II. O que você percebe quando variamos somente “c” no intervalo do controle deslizante?

IV.III. Utilizando o controle deslizante, determine o que se pede a partir dos valores abaixo estipulados para “a”, “b” e “c”.

	a	b	c	Coef. angular	Coef. linear
1º caso	2	1	-3	-2	3
2º caso	-2	1	3	2	-3
3º caso	6	2	-4	-3	2
4º caso	3	3	6	-1	-2
5º caso	10	5	2	-2	-2/5

A partir da tabela acima apresente suas observações da relação de “a”, “b” e “c” na equação da reta do tipo $ax + by + c = 0$.

Nesta atividade, os alunos foram incumbidos de mover os controles deslizantes (Figura 3) para a construção de cada caso e a partir deles identificar o coeficiente angular e linear na cada reta gerada.

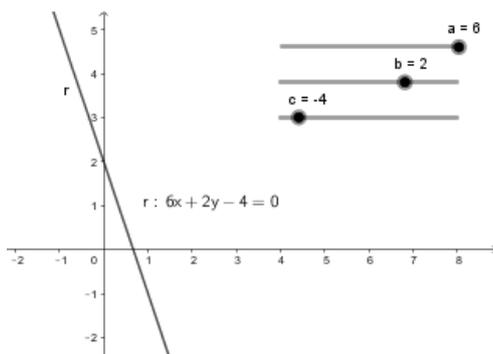


FIGURA 3
3º caso da atividade IV
Elaborados pelos autores

Alguns alunos utilizaram a mesma ferramenta da atividade 1 com o cálculo do do ângulo de inclinação. Nesta questão 8% dos alunos não respondeu a atividade e as demais respostas foram agrupadas em 4 categorias do Quadro 5.

QUADRO 5
Categorias de respostas da atividade IV

C1 - Respostas dos alunos que associaram incorretamente a significação de "a", "b" e "c" da equação geral.
C2 - Respostas dos alunos que apresentaram informações redundantes para significação de "a", "b" e "c".
C3 - Respostas dos alunos que identificaram a influência de cada elemento no comportamento da reta, mas não conseguiram formalizar estas relações.
C4 - Respostas dos alunos que conseguiram expressar a relação entre "a", "b" e "c" da equação geral no comportamento da reta.

Questionário da pesquisa

As atividades IV.I e IV.II buscaram levar os participantes a reconhecerem em que cada coeficiente da equação geral influi no comportamento do gráfico. Na atividade IV. III, os dois primeiros casos servem para o perceber que na equação geral o "c" varia o ponto em que "r" intercepta o eixo y, e com os demais casos perceberia que não sozinho, pois "b" também influi, e encontraria a relação de "c" e "b" para o coeficiente linear e, de modo análogo, "a" e "b" para o coeficiente angular. Apresentamos para discussão as respostas dos alunos A4; A3; A10 e A6 na atividade IV.III (Figura 4) que representam as categorias C1; C2; C3 e C4, respectivamente.

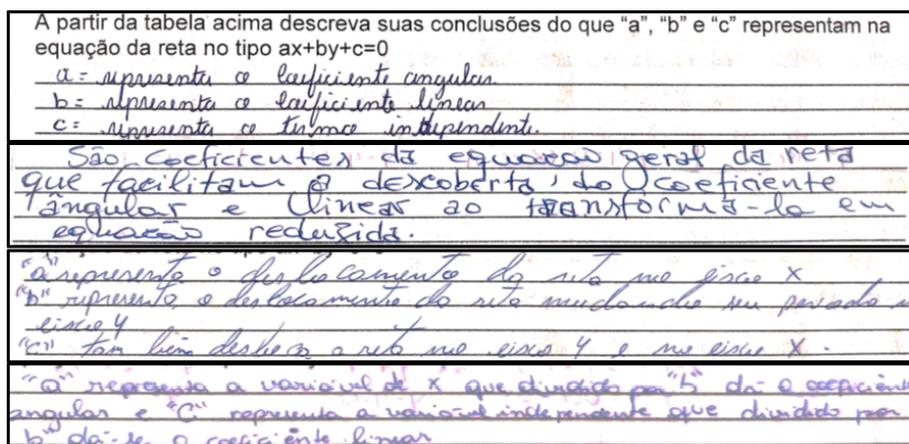


FIGURA 4
 Resposta do A4, A3, A10 e A6 na atividade IV
 Questionário da pesquisa

Na categoria C1, a resposta do A4 remete a um equívoco conceitual em relação as formas de expressão da equação geral e reduzida da reta, neste caso, percebemos este associou o coeficiente de x ao angular e de y ao linear, isto é, não houve o discernimento em relação as duas formas de representação algébrica da reta. Duval (2003) remete isto a uma questão de tratamento dentro deste registro. Esta categoria compõe 34% dos sujeitos investigados.

A categoria C2 representa a resposta de 25% dos alunos cuja conclusão foi redundante ou vaga em relação ao que fora proposto. Percebemos na própria resposta do A3 que este ratificou a influência dos coeficientes da equação geral para a determinação dos coeficientes angular e linear na forma reduzida. Acerca disto, ressaltamos que o ensino por atividades tem por finalidade a construção de noções matemáticas a partir dos objetivos de cada atividade, logo, é essencial que o aluno se permita a explorar seus conhecimentos e busque refletir em cada atividade, Caso contrário, este apenas estará realizando exercícios sem atribuição de significação ao que está sendo estudado (SÁ, 2009; MENDES; SÁ, 2006).

Embora, na disciplina de matemática, como em qualquer outra disciplina escolar o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, P. 23). Por conseguinte, destacamos a resposta do A10 para discussão referente aos 25% dos alunos que se enquadram na categoria C3 desta atividade. Os alunos desta categoria conseguiram identificar a influência de cada elemento no comportamento da reta graficamente. Percebemos que o aluno A10 buscou descrever o que ocorreu ao movimentar no controle deslizante cada coeficiente isoladamente, toda via, não conseguiu expressar a relação destes ao coeficiente angular e linear da reta.

Apenas 8% dos alunos investigados conseguiu expressar a relação e compõe a C4. Para apresentação temos a resposta do A4, embora não tenha se atentado ao valor simétrico de "a" e "c" na expressão dos coeficientes angular e linear, respectivamente. Ao final da atividade foi realizada a formalização, a saber na equação geral da reta dada por $ax + by + c = 0$ temos o coeficiente angular segundo a razão $-\frac{a}{b}$ e o coeficiente linear por $-\frac{c}{b}$.

Em relação ao estudo da circunferência temos as atividades VIII e IX. A atividade VIII teve como objetivo levar o aluno a relacionar as representações algébrica e geométrica da circunferência, bem como compreender as significações de "a", "b" e "r" na equação reduzida. A figura 5 apresenta a construção realizada pelos alunos para esta atividade.

Atividade VIII – Na janela *entrada* do GeoGebra, insira a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Crie controles deslizantes que representam os números “a”, “b” e “r”. Determine o centro da circunferência na função ponto. A partir disso:

VIII.I. Movimento o controle deslizante do número “a” como este influencia no comportamento da circunferência na janela de visualização?

VIII.II. Movimento o controle deslizante do número “b” como este influencia no comportamento da circunferência na janela de visualização?

VIII.III. Movimento o controle deslizante do número “r” como este influencia no comportamento da circunferência na janela de visualização?

VIII.IV. O que podemos concluir em relação ao par de números reais “a” e “b”?

VIII.V. O que podemos concluir sobre o número “r”?

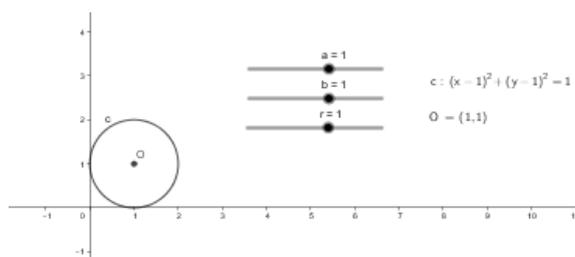


FIGURA 5
Atividade VIII.
Elaborados pelos autores

Deste modo os alunos foram levados a manipular e analisar a construção no GeoGebra a fim de construir significações, fazer inferências e estabelecer generalizações em relação a equação da circunferência. 25% dos alunos deixou em branco esta atividade, no entanto, vale ressaltar que devido sua realização ter sido num segundo momento, parte dos alunos ainda estavam realizando atividades do primeiro momento referente a equação da reta, o que nos leva a considerar a questão do tempo. As respostas da atividade foram agrupadas (Quadro 6) em duas categorias C1 e C2, referente as conclusões do par de números reais “a” e “b” e o número real r nas representações geométricas e algébrica.

QUADRO 6
Categorias de respostas da atividade VIII

C1 - Resposta dos alunos que apresentarem equívocos conceituais em relação a significações ou no par “a” e “b” ou em r.
C2 - Respostas dos alunos reconheceram a influência de cada elemento da equação e suas significações na circunferência.

Questionário da pesquisa

As respostas do A7 e A2 remetem as categorias de respostas estabelecidas nas análises dos questionários dos alunos.

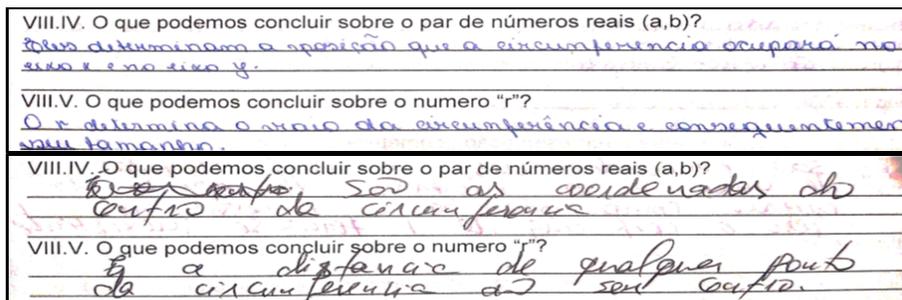


FIGURA 6
 Resposta do A7 e A2 na atividade VIII
 Questionário da pesquisa (2020)

Embora ambos tenham conseguido, cada qual em seu nível de formalização, expressar a significação do número "r", A7 a partir das atividades anteriores (VIII.I a VIII.III) acaba por se equivocar em relação à correspondência do par (#, #) na representação geométrica da circunferência. Duval (2009) alerta que é importante o aluno ter conhecimento que os registros de representação permitem visualizações dos objetos, podemos colocar como lentes, logo, independente do processo de tratamento a conversão de um objeto matemático tem suas propriedades e elas se mantêm, embora cada forma de representação permite uma melhor (ou não) visualização de cada uma delas (a exemplo na atividade anterior em reconhecer o coeficiente angular na equação geral).

Por fim a atividade X teve por objetivo levar os alunos a relacionar as equações reduzida e geral da circunferência, além de estabelecer conclusões em relação às características de alguns tipos de equações com suas representações geométricas. Assim, solicitava aos alunos entrassem com algumas equações quadráticas e usando a ferramenta ponto para determinar a coordenada do centro de cada circunferência. Em seguida, usar a ferramenta distância e para determinar o raio e, enfim, escrever no modelo da expressão anterior trabalhada $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ para responder às indagações levantadas.

Atividade X – Na janela *entrada* do GeoGebra digite as equações a seguir e em seguida utilize as ferramentas *ponto* e *distância* para determinar as coordenadas do centro e o raio da circunferência, enfim transcreva na terceira coluna a equação reduzida da circunferência, apresentada na atividade anterior.

	Expressão quadrática	Centro	Raio	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
1º caso	$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$	(2,4)	2	$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$
2º caso	$x^2 + y^2 = 0$	(0,0)	3	$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$
3º caso	$x^2 + y^2 - 8x + 13,75 = 0$	(4,0)	1,5	$(x - 4)^2 + y^2 = (1,5)^2$
4º caso	$x^2 + y^2 + 10y + 9 = 0$	(0,-5)	4	$x^2 + (y + 5)^2 = 4^2$

X.I. Construa agora, para cada expressão quadrática dada, a equação encontrada na forma descrita na coluna 3 da tabela acima.
 XII. O que você percebe em relação ao objeto matemático construído? Qual a relação entre ambas as equações?
 XIII. Observe em cada caso as equações e suas respectivas posições no plano cartesiano, transcreva suas conclusões em relação à equação quadrática e à localização da circunferência.

Apenas 25% dos alunos responderam a esta atividade, ressaltamos a questão do tempo devido ao período definido para realização do minicurso que ocorreu durante um evento acadêmico. Todavia, todos os alunos que responderam conseguiram atingir o objetivo da atividade, a exemplo temos a resposta do A5 na figura 7.

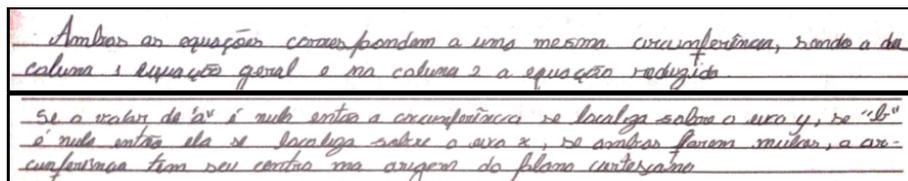


FIGURA 7
Resposta do A5 na atividade X
Questionário da pesquisa.

Todos os alunos que responderam a atividade X, conseguiram expressar mesmo que de forma intuitiva como se comportava a representação geométrica a partir de características da representação algébrica. Ao fim da atividade realizamos a formalização com os alunos, a saber se temos o valor de “a” nulo e circunferência não terá deslocamento horizontal sendo sua equação reduzida do tipo $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, de modo análogo se “b” for nulo a mesma não terá deslocamento vertical e equação do tipo $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, para o caso de ambos, não temos deslocamento, logo, seu centro coincide com o centro do plano cartesiano $x^2 + y^2 = r^2$.

Percebemos nesta atividade benefícios da conversão e sua contribuição para facilitar o reconhecimento dessas características na equação da circunferência e sua representação no plano. A conversão, como descrito por Duval (2003) não deve se restringir a uma simples tradução de um sistema em outro, mas como uma forma de permitir a manipulação e experimentação para estabelecer as relações entre as formas de representação do objeto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetos matemáticos possuem uma natureza abstrata e para sua compreensão utilizamos de representações, associações, relações. Nesse sentido para que ocorra a aprendizagem matemática é essencial que o aluno seja capaz de estudar um mesmo conteúdo em diferentes lentes e conversar cada um desses sistemas. Não obstante, o professor possui o papel de promover a interação do aluno com o conhecimento e auxiliá-lo para conseguir estabelecer as relações matemáticas necessárias para isso. As TIC's configuram-se como uma forma de abordagem metodológica que cumpre a estes objetivos de aprendizagem.

Neste artigo, tivemos por objetivo apresentar contribuições do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática, especificamente em relação ao estudo das equações da reta e da circunferência. Utilizamos o GeoGebra como ferramenta para desenvolver a proposta metodológica. Assim, esperamos que o GeoGebra seja uma ferramenta para desenvolvimento do cognitivo do aluno, isto é, que corrobore para exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos.

Ao longo as atividades além de proporcionar uma instrumentalização sobre o software para formação docente dos alunos participantes, permite que estes futuros professores possam desenvolver sua própria estratégia de ensino embasa nessa metodologia com diferentes objetos matemáticos. Temos por expectativa também que este trabalho alcance os professores da educação básica a fim de permitir a variabilidade de sua abordagem metodológica no ensino de matemática, considerando sempre as realidade e particularidades de cada aluno.

Constatamos que o ensino dos conteúdos de reta e circunferência por atividades proporcionou uma maior compreensão tanto da equação dessas curvas quanto de seus elementos o que cada elemento, em cada forma da equação de sua representação algébrica influi na sua representação gráfica. Acreditamos que o ensino por atividades quando vinculado a uma teoria, como a dos registros de representação, tem seu potencial elevado e no caso da Geometria Analítica a utilização do GeoGebra proporcionou uma melhor análise, conversa das linguagens e conseqüentemente a apreensão de conhecimentos desses objetos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ALVARES, G. S.; SOARES, A. B. **Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae**. 2003. Disponível em: <http://www.javasoft.com.br/academic/sbc2003/arq0121.pdf>. Acesso em: Julho/2020.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte. MG: Autêntica 2007.
- DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, C. L. O. Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica. VIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, CIAEM. **Anais...** Recife, PE. 26 a 30, Jun. 2011.
- DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, C. L. O. A Geometria Analítica e algumas Tendências Metodológicas para seu processo de Ensino e Aprendizagem. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. **Anais...** ULBRA – Canoas, RS. 16 a 18, Out. 2013.
- DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- DUVAL. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, 2003.
- LUDKE, M.; ANDRE, M. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas**. Editora Vozes, 1986.
- MENDES, I. A; SÁ, P. **Matemática por atividades: sugestões para sala de aula**. Natal: Flecha do Tempo, 2006.
- OLIVEIRA, L.T; SÁ, T. **Uma análise das contribuições dos Registros de Representação Semiótica para a Educação Matemática**. X Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM – Salvador, BA. 7 a 9, jul. 2010.
- PANTOJA, L. F. L; CAMPOS, N.; SALCEDOS, R. **A Teoria dos Registros de Representações Semióticas e o estudo de Sistemas de equações algébricas lineares**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, ULBRA – Canoas, RS. 16 a 18, out. 2013.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo horizonte: Autêntica, 2006.
- SÁ, P. **Atividades para o ensino de matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.
- SANTOS, R. **Tecnologias Digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no software GRADEQ**. 2008. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS), Porto Alegre. 2008.
- SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 21. Ed. São Paulo, SP: Cortez, 2000.
- VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. In: Núcleo de informática aplicada à educação. Campinas: Unicamp, 1999.

LIGAÇÃO ALTERNATIVE

<https://rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/281> (pdf)