La Rosa Trigonométrica como medio dinámico para la enseñanza de la trigonometría elemental.

The Trigonometric Rose as a dynamic mean by elemental trigonometry teaching.

Mendoza, Angel Deslis

Angel Deslis Mendoza
adeslis@caimanera.cug.co.cu
Centro Universitario Municipal, Cuba

Innovación tecnológica (Las Tunas)
Centro de Información y Gestión Tecnológica y Ambiental de Las Tunas, Cuba
ISSN-e: 1025-6504
Periodicidad: Trimestral
vol. 25, núm. 1, 2019
yanna@ciget.lastunas.cu

Recepción: 24 Octubre 2018
Aprobación: 13 Enero 2019

URL: http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/442/4422484003/index.html

Resumen: Este artículo presenta un medio de enseñanza dinámico creado por el autor. Este medio posee características distintivas en relación a otros existentes que viabilizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conocimientos trigonométricos básicos. Esta contribución práctica se emplea en el análisis de las propiedades de las funciones trigonométricas en la educación preuniversitaria. Presupone la creación del medio la siguiente valoración: se revelan insuficiencias en el aprendizaje de tales conocimientos por parte de los alumnos, condicionado por contradicciones esenciales entre el contenido y la forma en que el maestro enseña, donde se implica la creación de medios apropiados. Tal es el caso de la Rosa Trigonométrica, que juega un papel esencial durante la puesta en práctica de un método de representación dinámica de la relación gráfico-propiedades de las funciones trigonométricas.

Palabras clave: método de representación dinámica, medios de enseñanza dinámicos, rosa trigonométrica.

Abstract: This paper presents a teaching dynamic means created by author. This medium has distinctive features in relation to other existing viable the teaching-learning process of basic trigonometric knowledge. This contribution is used in the practice analysis of the properties of the trigonometric functions in preuniversity education. Means creation presupposes the following assessment: reveal inadequacies in learning such knowledge by students, conditioned by essential contradictions between the content and the way in which the teacher teaches, which involves creating appropriate means. Such is the case of Rose Trigonometrical, which plays an essential role during the implementation of a method of representing graphical relationship dynamics-properties of trigonometric functions.

Keywords: didactic model, dynamic representation method, dynamic teaching means, trigonometric rose.

INTRODUCCIÓN

En la Didáctica como ciencia en general y en la Didáctica de la Matemática en particular, las funciones y sus propiedades constituyen un contenido que se estudia en los diferentes niveles y subsistemas de la educación cubana y foránea. Estos contenidos forman parte de un sistema de relaciones, en el cual se revelan estrechos vínculos cognitivos y como objetos entre ecuaciones, gráficos y propiedades.

En especial, en este documento científico se trata la relación gráfico-propiedades de las funciones trigonométricas. La apropiación de este contenido trasciende en el desarrollo de una habilidad generalizada: relacionar gráfico y propiedades de funciones, dada para el estudio de todo tipo de función en Matemática. Por el amplio nivel de aplicaciones que tienen las funciones trigonométricas en diversas esferas de la realidad, el estudio y tratamiento de estas, merece una atención especial por parte de la comunidad de matemáticos.

Con el avance de la Revolución Científico-Técnica y el auge de las ciencias, los medios de enseñanza experimentan cambios y se perfeccionan a la luz del propio desarrollo de la Matemática y sus aplicaciones. Este hecho impone que el maestro emplee no solo medios tan simples como una lámina o un objeto natural en el momento exacto que el proceso de enseñanza lo requiera, sino que se necesita crear otros medios en los que el aprendiz sea un agente activo en la construcción de los conocimientos.

Tampoco el único recurso activo que es posible emplear para aprender matemática u otra ciencia está relacionado con el uso de los sistemas de aplicación, no siempre dominado por parte de los usuarios.

Las razones expuestas motivan al autor a la elaboración de una tesis doctoral de cuyo eje de construcción teórico-práctica emerge un método de representación dinámica que tiene como sustento material los medios dinámicos como la Rosa Trigonométrica. Esta dinamiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas al lograr una mejor visualización del comportamiento de las propiedades y permitir la manipulación secuencial y predeterminada por parte de maestros y alumnos.

La construcción de la Rosa Trigonométrica no requiere del empleo de recursos costosos, por lo que se convierte en un medio de enseñanza rentable y adecuada para aprender trigonometría.

MATERIALES Y MÉTODOS

Para el proceso constructivo del medio: cartulina, pegamento, papeles de colores, instrumentos tradicionales de dibujo. De esta manera se obtiene la Rosa trigonométrica en lámina para el uso del maestro en una clase expositiva. Otra variante la constituye la Rosa en madera, en este caso se sustituye el papel de colores por pintura. Se necesitan además accesorios, que se diseñan en acrílico o materiales similares (radio móvil y péndulo articulado a este que funciona por gravedad).

La variante portátil de la Rosa es la digitalizada, obtenida a partir de un simulador en flash.

Para la concepción del método dinámico: se emplean entrevistas, observaciones participantes y registros de experiencias donde se presenta la relataría del uso del medio en el aprendizaje de la trigonometría. Todos estos métodos empíricos sustentan un estudio de casos. A partir de la inducción-deducción y la modelación básicamente se obtiene el método de representación dinámica.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como resultado del trabajo se obtiene una construcción teórico-práctica donde se define el método de representación dinámica de la relación gráfico-propiedades de las funciones trigonométricas, se presentan sus características distintivas, y se explican los procedimientos para su puesta en práctica, en estrecha relación con el uso del medio a que se ha hecho referencia.

Dado lo novedoso del medio y su pertinencia para la implementación del método dinámico propuesto, se ofrecen sus características y se ejemplifica el modo de empleo a partir de ejemplos de situaciones de aprendizaje concretas.

Características distintivas de la Rosa Trigonométrica.

Es un medio plano que contiene grabado cuatro circunferencias concéntricas, con centro común en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Estas circunferencias determinan tres anillos circulares, de manera que si se considera la dirección desde dentro hacia fuera, se consigan los ángulos positivos expresados en grados sexagesimales, en radianes expresados por los coeficientes de π en el anillo intermedio y los ángulos negativos en grados sexagesimales en el anillo exterior (Fig. 1).

El círculo interior limitado por la primera circunferencia, se divide en cuatro cuadrantes que a la vez se subdividen en seis sectores circulares con amplitudes iguales a 15°. Los sectores se colorean de manera que en el primer cuadrante los ángulos notables terminen en un color primario (amarillo, rojo, azul); los axiales con colores neutros (blanco, negro) y el resto con colores secundarios (verde, anaranjado).

La combinación de colores que se obtiene en el resto de los cuadrantes es el resultado de las simetrías tanto axiales como central respecto a los ejes coordenados y al origen respectivamente.

Contiene además tres escalas fijas: escala (1) situada sobre el semieje OX con longitud igual a la longitud del radio seleccionado (preferentemente un múltiplo de 10). Las unidades de medida representan la décima parte de la longitud del radio. Esto posibilita obtener valores aproximados hasta el orden de las centésimas y sirve para determinar el coseno de los ángulos.

La escala (2) está situada en la perpendicular al eje X en el punto T (1; 0) del sistema de coordenadas y tiene iguales características a la escala (1) pero con longitud mayor. Dicha escala sirve para determinar la tangente de ciertos ángulos.

La escala (3) es similar a la escala (2) y está ubicada sobre la perpendicular al eje Y, en el punto S (0; 1) del sistema de coordenadas. Esta permite determinar la cotangente de los ángulos.

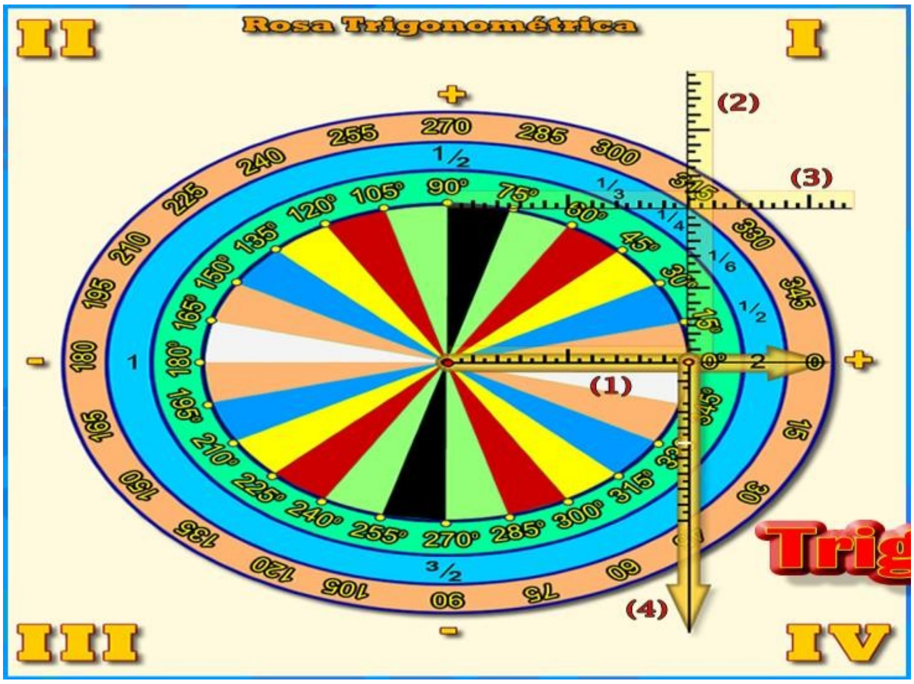


FIG. 1
Rosa Trigonométrica

Como accesorios contiene un radio móvil que consiste en un listón plástico transparente. Este listón tiene grabado, por debajo, una línea que sirve como indicador de medidas para las escalas de la tangente y la cotangente en el punto de intersección con éstas.

Otro accesorio lo constituye otro listón plástico transparente insertado al radio móvil en su extremo; que funciona por gravedad. El mismo posee una cuarta escala similar a las demás y permite determinar el seno del ángulo seleccionado. Posee además una línea similar al radio móvil que indica la medida del coseno del ángulo cuando intercepta a la escala (1). A continuación un resumen de las escalas tratadas y que en lo adelante sólo se hace referencia al número asociado. Fig. 1

- Escala (1): Para la lectura del coseno del ángulo.

• Escala (2): Para la lectura de la tangente del ángulo.
• Escala (3): Para la lectura de la cotangente del ángulo.
• Escala (4): Para la lectura del seno del ángulo.

Estas escalas no se conciben al azar sino que se fundamentan en conceptos básicos establecidos para cada razón trigonométrica, desde el surgimiento de la Trigonometría. Tales conceptos aún siguen vigentes en nuestros programas. En tal sentido se define: "[...] sea α un ángulo agudo de vértice A en un triángulo rectángulo ABC.

Seno de α y se denota sen α a la razón $\frac{a}{c}$ entre el cateto opuesto a α y la hipotenusa.

Coseno de α y se denota cos α a la razón $\frac{b}{c}$ entre el cateto adyacente a α y la hipotenusa.

Tangente de α y se denota tan α a la razón $\frac{a}{b}$ entre el cateto opuesto a α y el cateto adyacente a α [...]"[1]

Estas razones trigonométricas tienen sus limitaciones cuando se enmarcan a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Para el resto de los ángulos incluyendo a los llamados axiales es necesario ubicarlos en un sistema de coordenadas rectangulares y con mayor precisión, en una circunferencia trigonométrica que es la idea inicial como base para la concepción de la Rosa trigonométrica.

Ahora se puede justificar que:

(1) Si $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ (en la circunferencia de radio r =1), entonces el coseno de α depende

exclusivamente del valor de la abscisa del punto P determinado por la intersección del radio con la circunferencia. Así la escala (1) está debidamente justificada para el cálculo del coseno de los ángulos. Fig. 1

[1] CAMPISTROUS. LUIS. (1989). Matemática 10mo grado. Ciudad de La Habana. Ed. Pueblo y Educación. (pag.145)

(4) Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}$, entonces el seno de α depende exclusivamente del valor de la

ordenada del punto P determinado por la intersección del radio con la circunferencia. Así la escala (4) está debidamente justificada para el cálculo del seno de los ángulos.

(2) Si $\tan \alpha = \frac{y}{x}$, donde x = r = 1, entonces la tangente del ángulo dependerá de la

ordenada de los puntos donde el radio intercepta a la escala (2). Esta ordenada es un representante del haz de rectas paralelas al eje Y en el punto T (1; 0). Así queda justificada dicha escala.

(3) Si $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ por ser la razón inversa, entonces dicha razón puede medirse en la

escala (3) y se justifica de manera similar a (2).

Al dejar constancia de las características distintivas de la Rosa, nos proponemos relacionar las principales funciones derivadas de sus posibilidades de empleo para la unidad escogida; desde sus inicios hasta la subunidad que se corresponde con el tema de investigación.

Funciones específica.

• Cálculo de razones trigonométricas de cualquier ángulo sin el uso de tablas trigonométricas ni las fórmulas de reducción con valores admisibles hasta el orden de las centésimas.

• Demostración de la identidad fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

• Resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas.

• Reducción de amplitudes de ángulos de grados sexagesimales a radianes y viceversa, para ángulos múltiplos enteros de 15°.

• Determinación de ángulos positivos, negativos y co-terminales.

• Análisis de las funciones trigonométricas y sus propiedades sin apoyo de la representación gráfica.

Situaciones de aprendizaje concretas.

A continuación se ofrecen algunas situaciones de aprendizaje según las temáticas donde la Rosa Trigonométrica tiene posibilidades de empleo. Esto permite adiestrar tanto a docentes como a estudiantes en el uso de este novedoso medio y ponerlos en mejores condiciones al abordar posteriormente lo esencial de los temas.

Se establece un símil, entre lo que se establece para las clases actuales y lo que se desea introducir con el uso del medio. Por otra parte, los contenidos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría están incluidos desde el 9no grado hasta el 12mo grado de la educación general y en los primeros años de la formación inicial del docente.

Ejemplo 1. Determinación de razones trigonométricas para ángulos pertenecientes al I Cuadrante.

Procedimiento normal establecido

Sea $\alpha = 45^\circ$ el ángulo escogido, en este caso se procede normalmente de la forma siguiente:

Para determinar el seno y el coseno se busca en la tabla de valores trigonométricos [2] y según sea el caso a través de la intersección entre filas y columnas se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 45^\circ \approx 0{,}7071 \\ \cos 45^\circ \approx 0{,}7071 \end{array}\right\} \text{Valores aproximados con cuatro cifras decimales}$$

Para determinar la tangente se busca en la tabla y se concluye que: tan 45° = 1 (valor exacto para este ángulo).

Otra vía que tiene disponible el estudiante para el caso de los ángulos notables, es memorizarlos según la tabla siguiente[3] :

α	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Empleando la Rosa (véase fig. 1)

En este caso para mayor efectividad en los cálculos el medio debe permanecer en posición de plano vertical. Las piezas adicionales (radio móvil y péndulo) pueden emplearse simultáneamente o por separado, según la función deseada. Además se pone de manifiesto el principio de la composición de movimientos de rotación-traslación en el plano.

Para determinar las razones trigonométricas de $\alpha = 45^\circ$, procedemos así: Anexo 1

• Fijamos el radio móvil por su extremo en el valor que indica 45˚, en el anillo más interior.

• Como la escala (4) al fijarse al radio móvil en su extremo, cae en forma de péndulo , entonces es perpendicular al semieje OX ; por lo que para ángulos agudos siempre quedará determinado un triángulo rectángulo lo cual asegura la validez de las escalas (1) y (4) de manera tal que:

Sen 45˚ » 0,71 Valor obtenido en la escala (4) cuando es intersecada por la escala (1).

Cos 45˚ » 0,71 Valor obtenido en la escala (1) cuando es intersecada por la escala (4).

[2] Ibidem. (pag. 336-338)

[3] Ibidem. (pag. 153)

Tan 45˚ = 1 Valor exacto obtenido en la escala (3) cuando es intersecada por el radio móvil.

Los valores aproximados obtenidos son admisibles tanto desde el punto de vista práctico como teórico donde siempre existe un límite de error que en este caso es de $1 \cdot 10^{-2}$.

Ejemplo 2. Demostración de la identidad $^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

La demostración que se orienta aparece en el Teorema 1a)[4] que puede ser consultada por el interesado. Dicha demostración puede ser reforzada con el uso de la Rosa, si se tiene en cuenta que: Fig. 1

Para todo $\alpha\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ siempre es posible encontrar un triángulo ABC rectángulo en C, donde el cateto opuesto a α está contenido en la escala (4) y el cateto adyacente está contenido en la escala (1), correspondientes al seno y coseno respectivamente. En tales condiciones se cumple por el Teorema de Pitágoras:

Sen $^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$ pero $r = 1$ (por ser el radio de la circunferencia unitaria).

Luego: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Para $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ es válida la identidad pues: 02+12 = 12 + 02 = 1

Por lo que es válida para todo α. l.q.q.d.

Ejemplo 3. Analizar las propiedades de la función y = sen x.

Por la cantidad de propiedades el análisis se limita a algunas de ellas, el resto quedan a consideración del interesado. De otra parte se sugiere ver el procedimiento establecido para estos casos en el libro de texto Matemática 10mo grado, así se prioriza el procedimiento con el medio de enseñanza que es el propósito fundamental.

3.1 Monotonía en el I cuadrante.

En este caso como el seno del ángulo depende del valor de la ordenada de cada punto de la circunferencia, se procede tal como se explica a continuación (en la versión digital o portátil se hace clic en los botones 00 y 900, ubicación que puede observarse también en la figura 1)

• Partir de la posición inicial en 00.

• Girar el radio móvil en sentido positivo, de manera continua hasta 900. Observe cómo durante este movimiento las ordenadas varían de menor a mayor mientras las amplitudes de los ángulos varían en igual sentido, desde 0 hasta1 en el intervalo [0°; 90°].

[4] Ibidem. (pag. 157)

• Concluir que es monótona creciente.

3.2 Ceros

Por definición son los valores de x, para los cuales f(x) = 0. Si se rota el radio tanto en sentido positivo como negativo podemos observar que esta condición se cumple para $x = 0^0$ y $x = 180^0$. Además se consideran todos los ángulos coterminales de estos, por lo que queda mejor interpretada la expresión $x = k \cdot 180^0,\ k \in Z$ que determina los ceros de esta función. Fig. 1

El resto de las propiedades así como las demás funciones trigonométricas se pueden analizar y concretar con el uso de este medio de enseñanza sin que necesariamente se disponga de los gráficos correspondientes.

De esta manera permite justificar desde la circunferencia trigonométrica el origen y comportamiento de las propiedades en cada gráfico.

Ejemplo 4: Aplicación práctica.

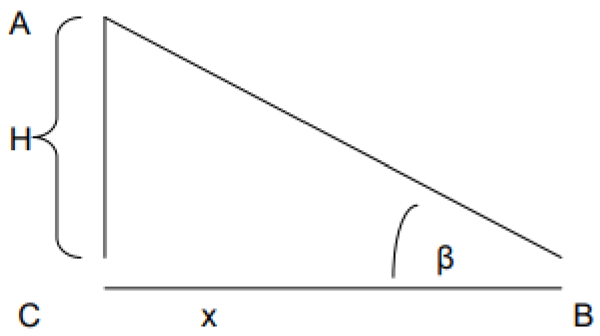
Dada una pieza cilíndrica con diámetro d = 50 mm y el ángulo de elevación de la línea helicoidal $\beta = 30^\circ$, determinar el paso H de la línea helicoidal.

$$x = \pi \cdot d = 3{,}14 \cdot 50mm = 15{,}7mm$$

El valor de H que se desea encontrar es el cateto AC opuesto a $\beta = 30^\circ$ por lo que debe aplicarse la razón:

$$\tan \beta = \frac{H}{x} \qquad H = x \cdot \tan 30^0 = 8{,}949mm \approx 9mm$$

El valor de tan 30º se puede encontrar con el uso de la Rosa. Según se indica en el ejemplo 1, resulta que tan 30º = 0,57



El paso H de la línea helicoidal es aproximadamente 9mm.

CONCLUSIONES

Se propone un método de representación dinámica que se materializa con el uso de un medio de enseñaza dinámico como posible solución a las insuficiencias que se revelan en la comprensión de propiedades de las funciones trigonométricas. A partir de dicho método se derivan procedimientos didácticos.

La Rosa Trigonométrica deviene en uno de esos medios, esencial en la instrumentación de los procedimientos por parte de los alumnos y el profesor. Este medio tiene características que lo distinguen de otros existentes y permite imprimir una dinámica al proceso de visualización de las propiedades de las funciones trigonométricas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ballester Pedroso, Sergio. et al. (2003) El transcurso de las Líneas Directrices en los Programas de Matemática y la Planificación de la Enseñanza. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.
2. Campistrous Pérez, Luis. et al. (1989) Matemática Décimo grado. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación, 347 p.
3. Cubero, José, et al. (1979) Los medios de enseñanza en la educación superior. Ciudad de La Habana. Editorial Libros para la Educación.

4. Deslis Mendoza, Angel. (1991) La Rosa trigonométrica y sus complementos. Ponencia presentada en el VI Forum Provincial de Piezas de Repuesto y Tecnologías de Avanzada, Guantánamo, Cuba.

5. Deslis Mendoza, Ángel; García, María. (2009) Reflexiones sobre la didáctica de la Matemática y las investigaciones en la sociedad del conocimiento del siglo XXI. Holguín. Publicado en el I Taller Internacional FIMAT XXI, ISP "José de la Luz y Caballero".

6. ________________(1994) Medio para la enseñanza de la trigonometría elemental. Ciudad de La Habana. Registrado en Oficina Nacional de Invenciones Información Técnica y Marcas.

7. _______________(2008) Importante innovación de profesor caimanerense. Guantánamo. Publicado en línea en Archivo de noticias, Página Web, Biblioteca Municipal "Doris Aguiar Oliveros", Caimanera. Publicado en http://www.gtmo.cult.cu/bibliotecas/bmdaguiar/index.php

8. _______________(2008) La Rosa trigonométrica como medio para la enseñanza de la Trigonometría en la educación preuniversitaria. Holguín. Publicado en el II Taller Nacional de Proyectos de Investigación, ISP José de la Luz y Caballero.

9. MINED. (1989) Programa Matemática Décimo grado. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

10. ________________(2001) Adecuación de los programas de Matemática Décimo, Decimoprimero y Decimosegundo. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

11. _______________(2006) Programa Décimo Grado Educación Preuniversitaria. Primer Año Educación Técnica y Profesional. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

12. _______________(1989) Orientaciones Metodológicas Décimo Grado Matemática. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

13. Norma Cubana, NC 57-08:80. Equipamiento Escolar y Medios de Enseñanza. Nomenclatura de los Índices de Calidad. Ciudad de la Habana. Registrado en Oficina Nacional de Normas Cubanas.

14. Schoenwald, Justin P. (1984) Trigonometry visualizer and Method of making same. Ciudad de La Habana. Registrado en Oficina Nacional de Invenciones Información Técnica y Marcas.

15. Sharp, Henry. (1969) Elementos de trigonometría plana. La Habana. Editorial Instituto del Libro.

16. Uría Peña, Ana María, et al. (1990) Efectividad de los medios de enseñanza en el proceso docente. En Pedagogía ´90. Ciudad de La Habana. MINED.